Др Војислав Андрић • Маријана Стефановић
Ђорђе Голубовић • Вељко Ћировић

МАТЕМАТИКА 8

Уџбеник са збирком задатака
за осми разред основне школе

2. део

Математички клуб
ДИОФАНТ

МАТЕМАТИКА 8

Уџбеник са збирком задатака за осми разред основне школе

2. део

	Редакција Фондације Алек Кавчић
Аутор	др Војислав Андрић, Маријана Стефановић, Ђорђе Голубовић, Вељко Ћировић
Рецензенти	др Владимир Мићић, проф. математике Вера Јоцковић, проф. математике Александра Милошевић, ОШ „Жарко Зрењанин ", Нови Сад
Главни уредник	Смиљка Наумовић
Предметни уредник	др Радослав Божић
Илустрације	Марија Поповић, Shutterstock
Лектура и коректура	Милица Шаренац, др Драгана Бедов
Дизајн	Слађана Николић
Прелом	Срђан Попов

Издавач	Математички клуб „Диофант", Поп Лукина 38, Ваљево
За издавача	др Војислав Андрић
Штампа	Birograf Comp d. o. o., Земун
Тираж	3.000
	Прво издање, 2022.
ISBN	978-86-6148-001-0

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)

МАТЕМАТИКА 8 : уџбеник са збирком задатака за осми разред основне школе. Део 2 / Војислав Андрић ... [и др.] ; [илустрације Марија Поповић]. - 1. изд. - Ваљево : Математички клуб „Диофант", 2022 (Земун : Birograf Comp). - 184 стр. : илустр. ; 29 cm

Тираж 3.000. - Решења: стр. 160-183. - Регистар. - Библиографија: стр. 184.

ISBN 978-86-6148-001-0
ISBN 978-86-6148-002-7 (низ)

1. Андрић, Војислав, 1953- [аутор]

COBISS.SR-ID 65369353

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије одобрило је овај уџбенички комплет за употребу у школама решењем број:
650-02-00309/2021-07 од 12. 04. 2022. године.

САДРЖАЈ

Водич 4
Реч аутора 6

ПИРАМИДА 7

5.1. Пирамида: појам, врсте, елементи 8
5.2. Мрежа пирамиде 14
5.3. Површина пирамиде 18
5.4. Површина правилне тростране и правилне шестостране пирамиде 22
5.5. Запремина пирамиде Запремина четворостране пирамиде 27
5.6. Запремина правилне тростране и правилне шестостране пирамиде 31
Предлог задатака за додатни рад 35
Питалице 36
Предлог теста знања 37
Предлог контролне вежбе 38

ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ 39

6.1. Линеарна функција $y = kx + n$ 40
6.2. Примери линеарних функција 43
6.3. График линеарне функције 46
6.4. Неке карактеристичне линеарне функције и њихови графици 51
6.5. Нуле и знак линеарне функције 56
6.6. Раст и опадање линеарне функције 59
6.7. Имплицитни облик линеарне функције 61
6.8. Примене линеарне функције 65
6.9. „Читање" графика линеарне функције 68
Предлог задатака за додатни рад 74
Питалице 75
Предлог теста знања 76
Предлог контролне вежбе 77

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА 79

7.1. Појам система линеарних једначина са две непознате 80
7.2. Еквивалентност система линеарних једначина са две непознате 85
7.3. Решавање система линеарних једначина са две непознате методом смене 89
7.4. Решавање система линеарних једначина са две непознате методом супротних коефицијената 93
7.5. Решавање система линеарних једначина са две непознате графичком методом 97
7.6. Решавање неких карактеристичних система линеарних једначина са две непознате 102
7.7. Примена система линеарних једначина са две непознате 105
Предлог задатака за додатни рад 109
Питалице 112
Предлог теста знања 113
Предлог контролне вежбе 114

ВАЉАК, КУПА, ЛОПТА 115

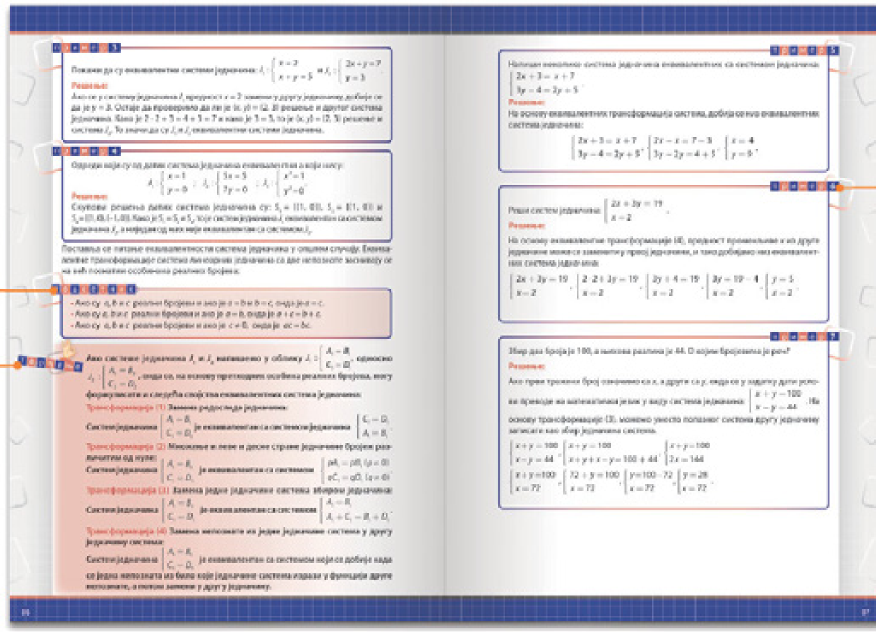
8.1. Ваљак 116
8.1.1. Основни елементи ваљка. 116
8.1.2. Равни пресеци ваљка 119
8.1.3. Мрежа ваљка, површина ваљка 123
8.1.4. Запремина ваљка. 127
8.2. Купа 131
8.2.1. Основни елементи купе. 131
8.2.2. Равни пресеци купе. 134
8.2.3. Мрежа купе, површина купе. 138
8.2.4. Запремина купе. 143
8.3. Лопта 147
8.3.1. Основни елементи лопте и сфере. 147
8.3.2. Равни пресеци лопте (сфере). 150
8.3.3. Површина и запремина лопте. 152
8.4. За додатни рад Уписана и описана тела. 154
Предлог задатака за додатни рад 156
Питалице 157
Предлог теста знања 157
Предлог контролне вежбе 158

Решења 159
Индекс појмова 184
Литература 184

ВОДИЧ

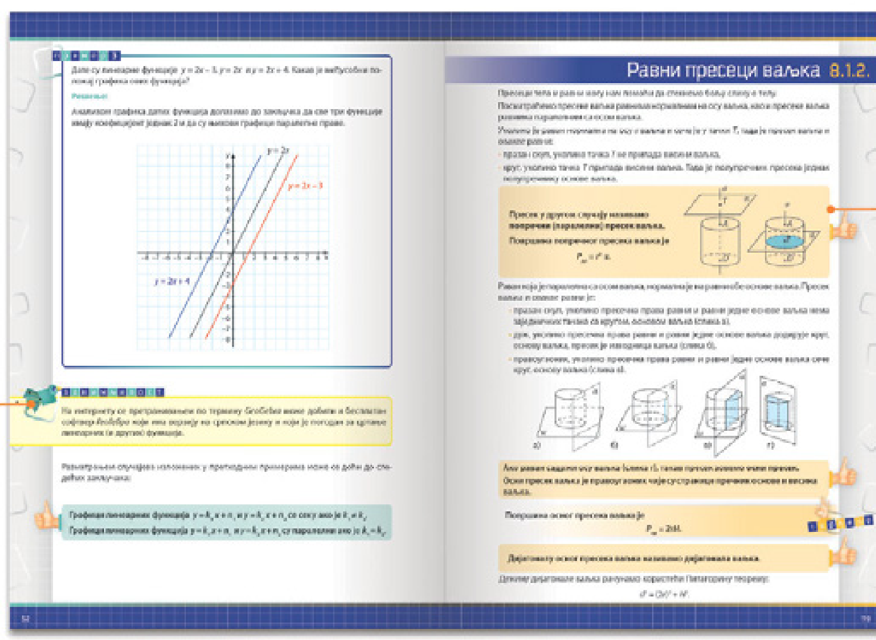
Подсетник–
подсећање на претходно усвојено градиво

Пример –
решени примери за разумевање изложеног градива у лекцији



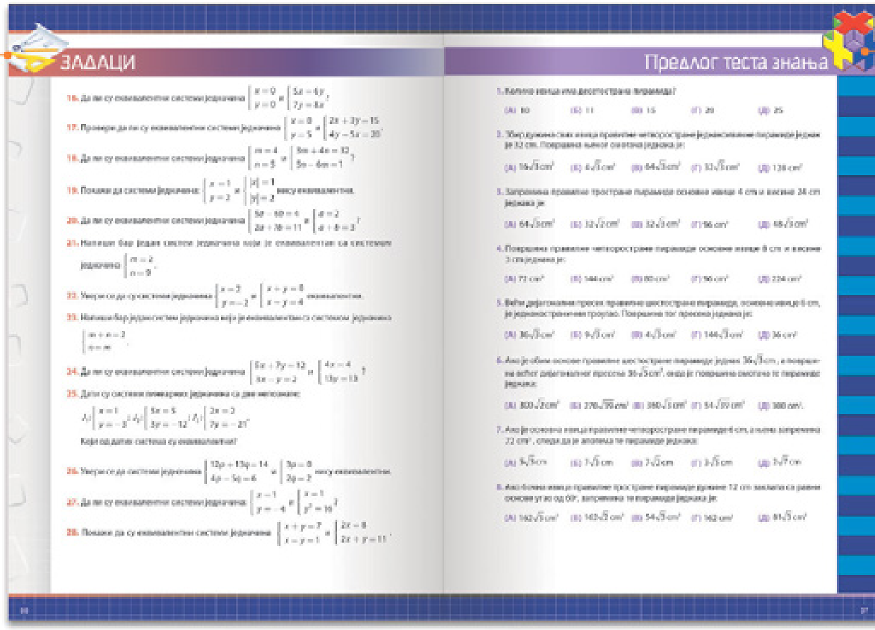
Тврђење –
математичко тврђење које се користи у процесу математичког закључивања

Дефиниција –
објашњење математичког појма

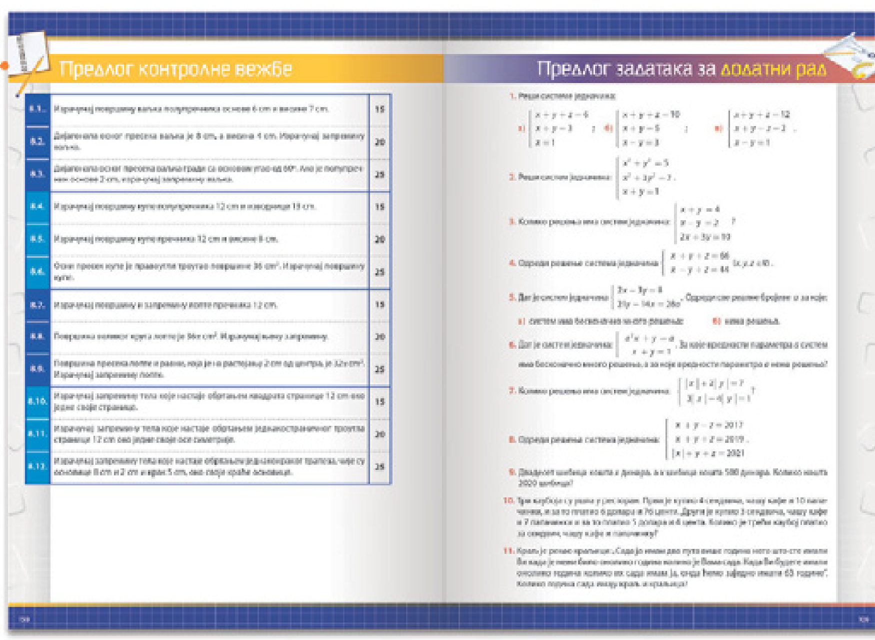


Занимљивост –
интересантне чињенице у вези са наставним садржајем у оквиру одређене лекције

Задаци –
задаци за увежбавање поређани
по тежини и сложености



Предлог теста знања –
тестови на крају сваке тематске целине
садрже по осам задатака вишеструког избора
углавном са пет понуђених одговора



Предлог контролне вежбе –
контролни задаци на
крају тематске целине за
самопроцену знања ученика
дати су диференцирано и по
образовним нивоима

Предлог задатака за додатни рад–
задаци засновани на
проширењима наставних
садржаја примерено узрасту
и математичким
способностима ученика

ВОДИЧ

Питалице – кратки задаци на које се траже брзи одговори (да/не) и који се углавном решавају без великог рачунања

РЕЧ АУТОРА

Драги ученици,

Пред вама је други део уџбеника Математика 8 у ком су обрађене наставне теме: „Пирамида”, „Линеарне функције”, „Системи линеарних једначина”, „Ваљак, купа, лопта”. Надамо се да ће вам уџбеник бити од користи приликом усвајања нових и провере стечених знања. Верујемо да ће бити од помоћи и наставницима при осмишљавању редовне и додатне наставе и њене реализације.

Захваљујемо уредницима на труду да књига буде прегледна и усклађена са стандардима квалитета уџбеника, и рецензентима на примедбама и сугестијама.

Аутори

5 ПИРАМИДА

ЗАНИМЉИВОСТ

Човек је направио бројне пирамиде широм света, које представљају права ремек-дела архитектуре. У Египту су пирамиде грађене да би биле гробнице фараона, а у неким другим деловима света, да би допринеле естетским решењима.

Египатске пирамиде данас сведоче о значају њихове цивилизације, богатству фараона и животу у том добу, па су и својеврсна туристичка атракција.

За једну од најзначајнијих сматра се Кеопсова пирамида из Гизе. Поред Египта, пирамиде су правили и у Мексику (Ел Кастиљо и Пирамида сунца), Италији (Цестијева пирамида у Риму), али и у бројним другим крајевима света.

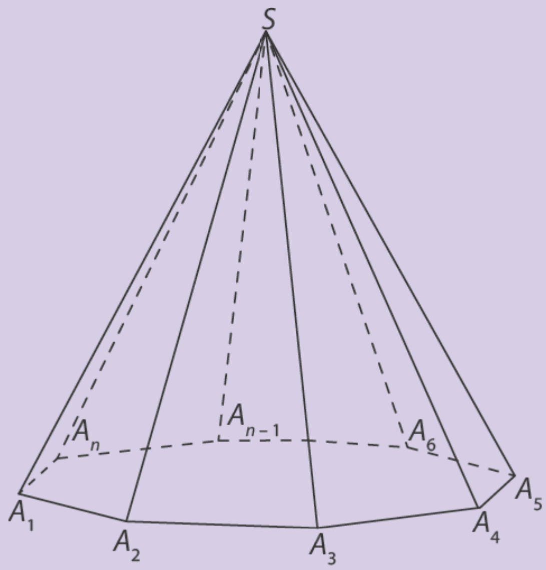
Пирамида представља и атрактивно архитектонско решење, па су тако, на пример, у новије време у Сједињеним Америчким Државама неке спортске дворане и хотели прављени баш у облику пирамида (нпр. кошаркашка дворана у Мемфису, хотел Луксор у Лас Вегасу). У Паризу се, такође, налази велика пирамида од стакла и метала, која представља главни улаз у музеј Лувр.

У свакодневном животу, далеко од математичких проблема, често се среће и термин *пирамида правилне исхране*. Она подразумева комплекс правила исхране која се заснивају на равнотежи, разноврсноси и умерености.

ПИРАМИДА

Реч „пирамида" потиче од грчке речи *πυραμισ* (чита се *пирамис*), којом су Грци називали египатске пирамиде.

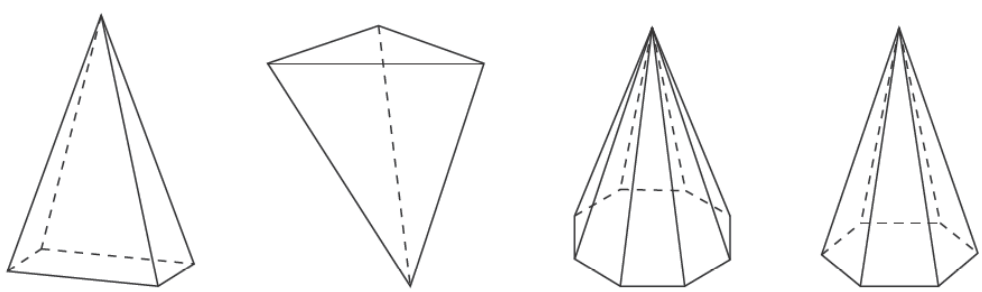
Пирамида $SA_1A_2...A_n$ је полиедар чију површ чине један многоугао $A_1A_2...A_n$ и n троуглова SA_1A_2, SA_2A_3, ... , SA_nA_1. Притом, број n је природан и већи или једнак са 3.



5.1. Пирамида: појам, врсте, елементи

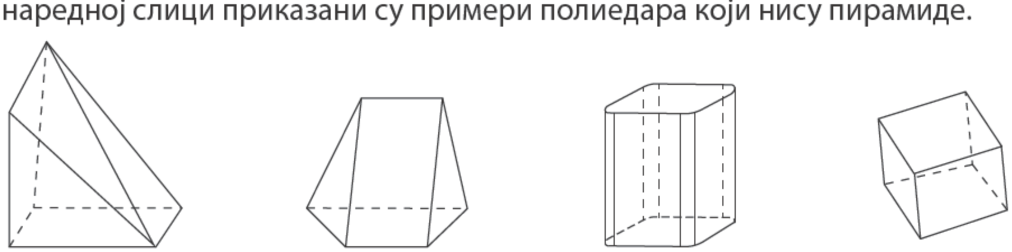
пример 1

На наредној слици приказани су примери полиедара који су пирамиде.



пример 2

На наредној слици приказани су примери полиедара који нису пирамиде.



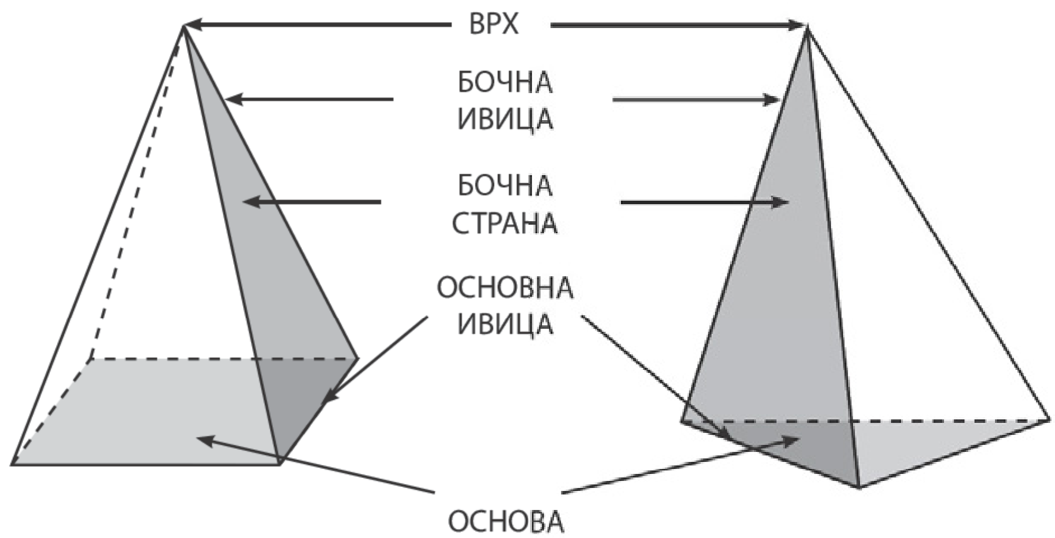
Многоугао (*n*-тоугао) је *основа* (*база*) пирамиде, а троуглови су бочне стране пирамиде. Све бочне стране чине омотач пирамиде.

Број страница многоугла основе одређује назив пирамиде. Ако је основа троугао – пирамида је тространа, ако је четвороугао – пирамида је четворострана итд. На слици у примеру 1. су приказане четворострана, тространа, осмострана и шестострана пирамида (слева на десно).

Странице основе пирамиде су основне ивице пирамиде. Странице бочних страна, које нису основне, називају се бочне ивице пирамиде.

Дакле, *n*-тострана пирамида има *n* основних ивица и *n* бочних ивица.

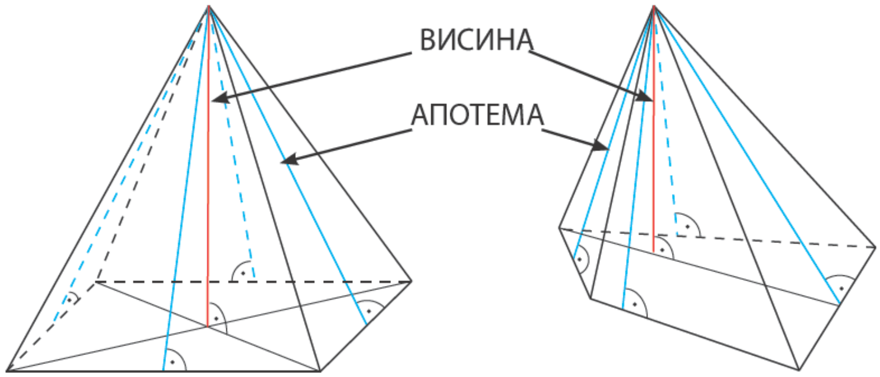
Све бочне стране и све бочне ивице пирамиде имају једну заједничку тачку, које се назива врх пирамиде.



Растојање врха пирамиде од равни њене основе назива се висина пирамиде.

Растојање врха пирамиде од њене основне ивице (висина бочне стране) назива се апотема.

Свакој бочној страни пирамиде одговара једна апотема.



Ако је основа пирамиде правилни многоугао и ако је права одређена врхом пирамиде и средиштем основе нормална на раван основе – каже се да је пирамида правилна.

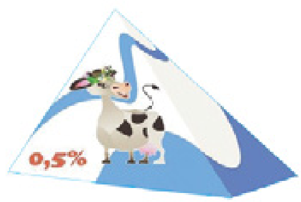
За пирамиду чије су све бочне ивице једнаких дужина кажемо да је **права**.

Ако су све ивице пирамиде једнаких дужина, за ту пирамиду кажемо да је једнакоивична.

За тространу пирамиду се још каже да је **тетраедар**, а једнакоивичну тространу пирамиду још зовемо **правилним тетраедром**.

пример 3

Занимљив пример правилног тетраедра је паковање за јогурт, које популарно називамо тетрапак.



У наставку ћемо размотрити неке пресеке пирамиде и равни.

пример 4

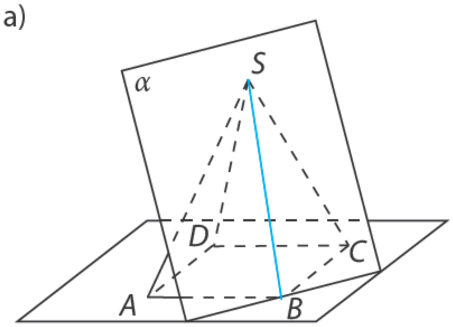
Шта могу бити пресеци правилне четворостране пирамиде и равни која садржи врх пирамиде и сече основу?

Решење:

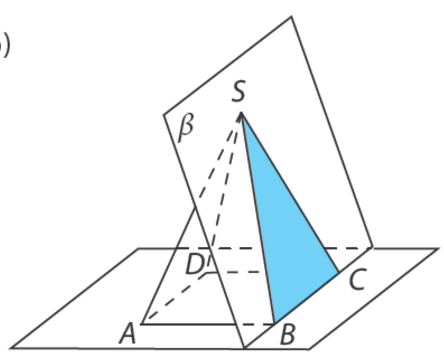
Нека је $SABCD$ правилна четворострана пирамида.

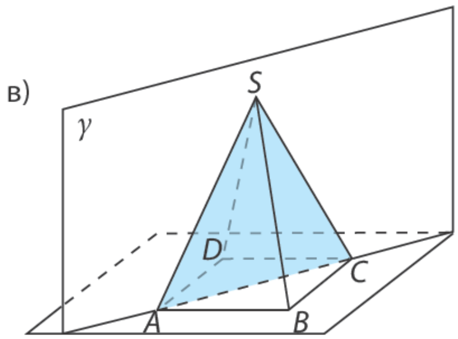
- Ако раван α садржи врх пирамиде и сече раван основе по правој која са основом има заједничко једно теме – пресек је бочна ивица одређена тим теменом (слика а).
- Ако раван β садржи врх и два суседна темена основе пирамиде – пресек је бочна страна одређена тим теменима (слика б).
- Ако раван γ садржи врх и два несуседна темена основе – пресек је троугао чије су странице дијагонала основе и две бочне ивице пирамиде (слика в).
- Ако раван δ садржи врх и сече две основне ивице пирамиде – пресек је троугао (слика г).

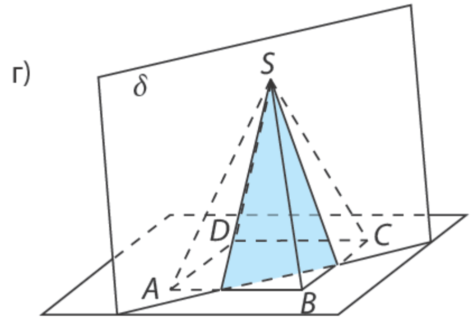
а)



б)







За пресек пирамиде и равни која садржи врх и дијагоналу основе кажемо да је дијагонални пресек.

пример 5

Израчунај површину дијагоналног пресека *ACS* правилне четворостране пирамиде *ABCDS*, основне ивице 6 cm и висине 10 cm.

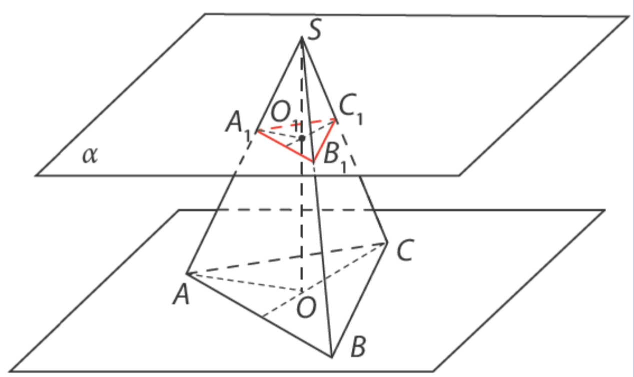
Решење:

Дијагонални пресек *ACS* је једнакокраки троугао (види слику в) из претходног примера) чија је основа једнака дијагонали квадрата странице 6 cm, а висина му је једнака висини пирамиде, тј. 10 cm. Како је дијагонала квадрата дужине $6\sqrt{2}$ cm, то је површина тог пресека једнака $P_P = 6\sqrt{2}\cdot\dfrac{10}{2}\,\mathrm{cm}^2,\ P_P = 30\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$.

пример 6

Дата је правилна тространа пирамида основне ивице $a = 4$ cm и висине $H = 6$ cm. Одреди пресек те пирамиде и равни α која је паралелна равни основе, од врха пирамиде је удаљена 2 cm, нема заједничких тачака са основом и сече бочне ивице те пирамиде.

Решење:



Нека је *SABC* дата правилна тространа пирамида и раван α паралелна равни основе пирамиде. Паралелне равни *ABC* и α секу раван *ABS* по правама *AB* и A_1B_1 које су паралелне међусобно. Види слику! Одатле следи да су троуглови *ABS* и A_1B_1S слични, па важи $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AS}{A_1S}$ (1).

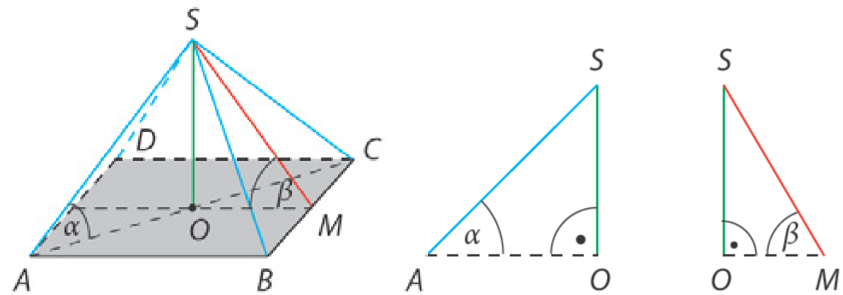
Нека је тачка *O* средиште основе и нека права *SO* продире раван α у тачки O_1. Троуглови *AOS* и A_1O_1S су слични, па је $\dfrac{AS}{A_1S} = \dfrac{OS}{O_1S}$ (2). Сада, из пропорција (1) и (2) и датих података следи да је $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{OS}{O_1S} = \dfrac{6}{2} = 3$. На сличан начин показујемо да је $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{OS}{O_1S} = 3$, где је C_1 продор ивице *CS* кроз раван α. Пресек пирамиде и равни α је троугао $A_1B_1C_1$ сличан троуглу *ABC*. Притом, коефицијент сличности једнак је размери растојања равни основе и равни пресека од врха пирамиде.

Јасно је да ово разматрање важи и за било коју пирамиду.

Угао између бочне ивице и равни основе представља угао између те ивице и њене нормалне пројекције на раван основе.

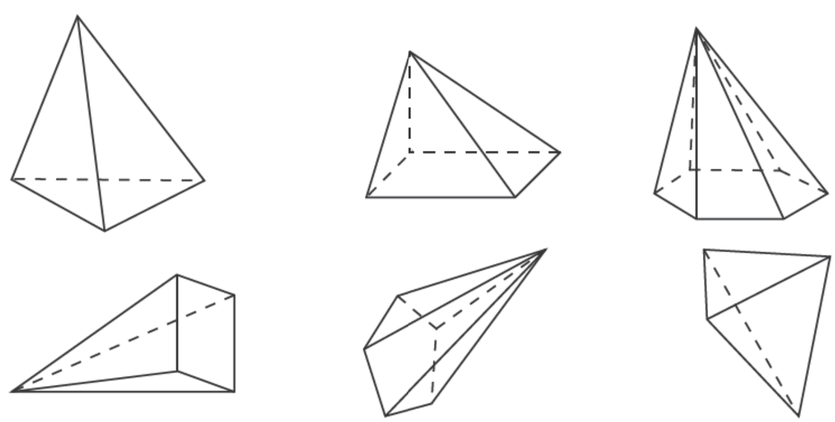
пример 7

Код правилне четворостране пирамиде *ABCDS*, са центром основе *O*, угао *SAO* је угао између бочне ивице *AS* и равни основе *ABCD*. Нека је тачка *M* средиште основне ивице *BC*, тада је угао *SMO*, угао између апотеме и равни основе те пирамиде.



ЗАДАЦИ

1. На слици је приказано неколико пирамида. Обележи њихова темена, а затим за сваку од њих одреди основу, бочне стране и врх.



2. Да ли постоји пирамида чије свако теме може бити врх?

3. Колико страна, темена, основних ивица, бочних ивица и бочних страна има шестострана пирамида?

4. Десетострана пирамида има:

а) 10 темена; б) 11 темена; в) 10 страна;

г) 11 страна; д) 10 ивица; ђ) 20 ивица.

Заокружи слова испред тачних одговора.

5. Одреди збир темена, ивица и страна четворостране пирамиде.

6. Ако четворострана пирамида има једнаке бочне ивице, тада основа те пирамиде може бити:

а) правоугаоник; **б)** квадрат; **в)** ромб;

г) правоугли трапез; **д)** једнакокраки трапез.

Заокружи слова испред тачних одговора.

7. Може ли пирамида да има тачно четири:

а) темена; **б)** ивице; **в)** стране?

8. Да ли постоји пирамида са 13 ивица?

9. Да ли висина пирамиде може бити већа од дужине:

а) основне ивице; **б)** бочне ивице?

10. Бочне стране правилне пирамиде не могу бити:

а) једнакокраки; **б)** једнакостранични; **в)** разностранични;

г) једнакокраки правоугли; **д)** једнакокраки тупоугли троуглови.

Заокружи слово испред тачног одговора.

11. Ако је раван основе правилне пирамиде пројекцијска раван, шта је ортогонална пројекција:

а) основне ивице; **б)** основе;

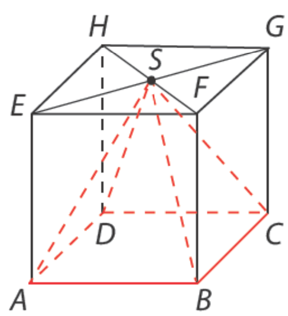
в) бочне ивице; **г)** бочне стране;

д) врха пирамиде?

12. Основа четворостране пирамиде је страна *ABCD* коцке *ABCDEFGH*, а врх је средиште *S* стране *EFGH*.

а) Да ли је та пирамида правилна? Образложи одговор!

б) Израчунај дужине бочних ивица, висину и апотеме те пирамиде, ако је дужина ивице коцке 8 cm.



13. Основа четворостране пирамиде је страна *ABCD* коцке *ABCDEFGH*, а врх је теме *F*. Да ли је та пирамида правилна?

14. Израчунај апотему правилне:

а) четворостране; **б)** тростране; **в)** шестостране;

пирамиде чија је основна ивица 10 cm, а бочна ивица 13 cm.

15. Одреди површину дијагоналног пресека правилне четворостране призме бочне ивице 5 cm и висине 4 cm.

16. Бочне ивице тростране пирамиде *SABC* су једнаке. Нормала из врха пирамиде продире раван основе у:

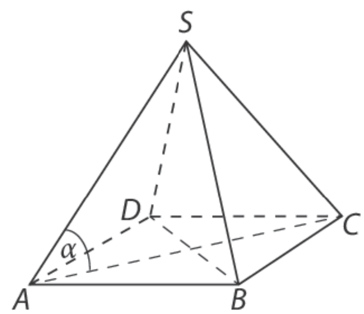
а) центру описане кружнице; **б)** центру уписане кружнице;

в) ортоцентру; **г)** тежишту троугла *ABC*.

Заокружи слово испред тачног одговора.

17. Пирамида *SABCD* је правилна четворострана једнакоивична, основне ивице 4 cm. Израчунај обим и површину троугла *SAC*.

18. Израчунај угао (α) између бочне ивице и основе правилне једнакоивичне четворостране пирамиде. Види слику!



19. Нека је *SABCD* правилна четворострана пирамида основне ивице 10 cm и бочне ивице 13 cm. Израчунај обим и површину пресека пирамиде и равни *SMN* где су *M* и *N* средишта ивица *AB* и *BC*.

20. Основна ивица и висина правилне

а) четворостране; **б)** шестостране;
пирамиде су редом 12 cm и 10 cm.
Израчунај обим пресека пирамиде и равни која је паралелна основи и садржи средиште висине.

Мрежа пирамиде 5.2.

У претходним лекцијама упознали смо се са појмом мреже призме и са елементима пирамиде. Као код призме, тако се и код пирамиде може уочити њена мрежа.

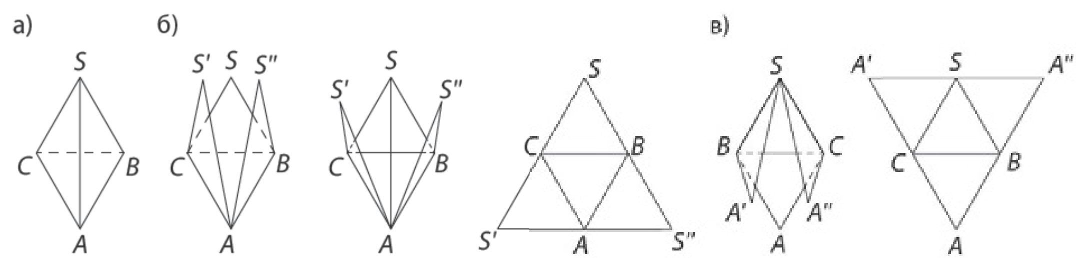
пример 1

Представи мрежу правилне тростране пирамиде чија је основна ивица 3 cm и бочна ивица 4 cm (слика а).

Решење:

Нека је *SABC* дата пирамида. Мрежа може да се конструише на више начина, а овом приликом приказана су два.

Ако пирамиду разрежемо дуж свих бочних ивица, добија се мрежа приказана на слици б). Ако дату пирамиду разрежемо дуж бочне ивице *AS* и основних ивица *AB* и *AC*, тада се добија мрежа која је приказана на слици в).

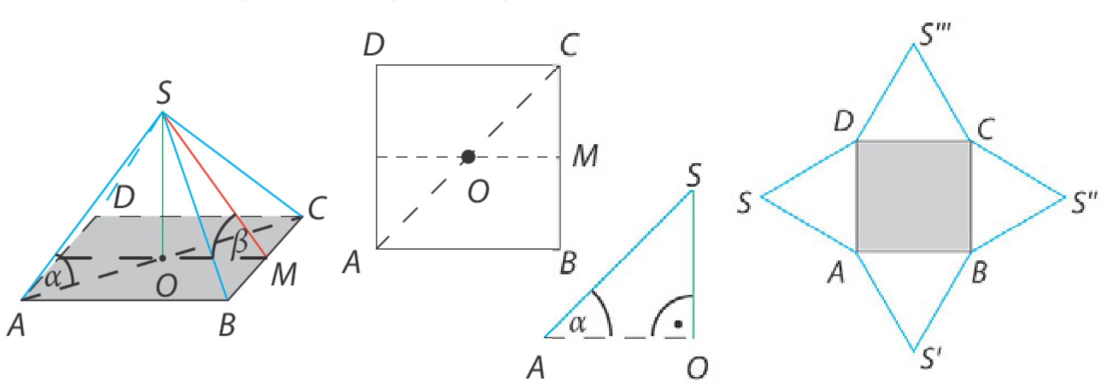


пример 2

Конструиши мрежу правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица $a = 4$ cm и нагибни угао бочне ивице према основи $\alpha = 45^\circ$.

Решење:

С обзиром на то да је ортогонална пројекција праве *AS* на раван основе пирамиде права *AO*, где је *O* центар основе, то је нагибни угао бочне ивице *AS* према равни основе једнак углу *OAS*. Тај угао је угао троугла *ASO*, при чему је дужина дужи *AO* једнака половини дужине дијагонале квадрата *ABCD* (такође, дужина дужи *AO* је полупречник кружнице описане око основе), *AS* је бочна ивица, а дужина *OS* је висина пирамиде. Троугао *AOS* је, у овом случају, одређен катетом $AO = \dfrac{AC}{2}$ и угловима $\sphericalangle AOS = 90^\circ$ и $\sphericalangle OAS = 45^\circ$. Хипотенуза *AS* једнака је бочној ивици, па можемо да конструишемо мрежу пирамиде.

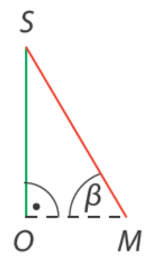


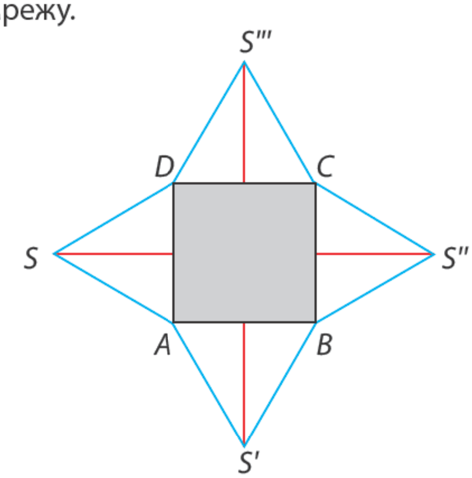
пример 3

Конструиши мрежу правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица $a = 4$ cm и угао између апотеме и равни основе је $\beta = 60°$.

Решење:

Угао између апотеме и равни основе, посматрајући, на пример, апотему бочне стране BCS, јесте угао између апотеме SM и њене нормалне пројекције OM. (Видети слику пирамиде из претходног примера.) Дакле, угао SMO је угао троугла SMO. Дужина дужи SM је једнака апотеми пирамиде. Дуж MO је једнака половини странице квадрата. (Дужина дужи MO је једнака полупречнику кружнице уписане у основу.) У овом случају, троугао MOS је одређен катетом $OM = \dfrac{AB}{2}$ и угловима $\sphericalangle MOS = 90^\circ$ и $\sphericalangle OMS = 60^\circ$. Дужина хипотенузе MS је апотема дате пирамиде, те имамо довољно података да можемо да конструишемо мрежу.



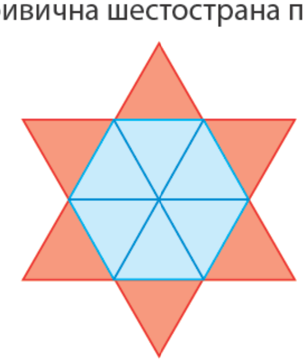


пример 4

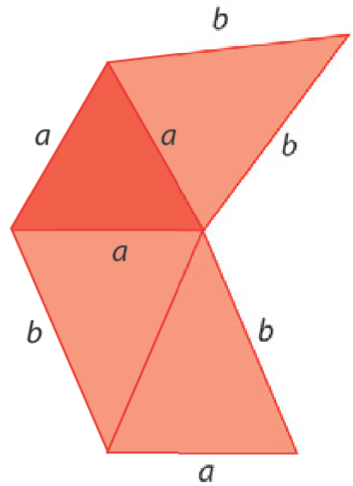
Да ли постоји једнакоивична шестострана пирамида?

Решење:

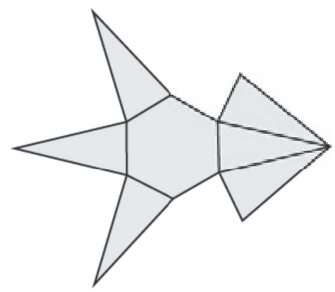
Подсетимо се да је основа правилне шестостране пирамиде правилан шестоугао, који представља унију шест једнакостраничних (карактеристичних) троуглова, чија је ивица једнака ивици шестоугла. Када би таква једнакоивична пирамида постојала и сви троуглови у омотачу били би подударни са појединачним (карактеристичним) троугловима у основи. Одговарајућа мрежа је приказана на слици. Међутим, од такве мреже не бисмо могли да саставимо пирамиду, јер приликом савијања бочних страна, дошло би до преклапања са основом. Одатле закључујемо да, код шестостране пирамиде, апотема мора бити дужа од полупречника уписаног круга основе. Дакле, једнакоивична шестострана пирамида не постоји.



21. Да ли је на следећој слици приказана мрежа правилне тростране пирамиде?



22. Мрежа које пирамиде је приказана на слици?



23. Конструиши мрежу правилне тростране пирамиде чија је:

а) основна ивица 4 cm, апотема 5 cm;

б) бочна ивица 7 cm, апотема 4,5 cm.

24. Конструиши мрежу правилне шестостране пирамиде ако су:

а) основна ивица 3 cm, бочна ивица 5 cm;

б) бочна ивица 5 cm, висина 4 cm.

25. Ако се развијени омотач четворостране пирамиде састоји од четири једнакостранична троугла, тада је основа те пирамиде:

а) ромб; **б)** једнакокраки трапез; **в)** квадрат.

Заокружи слово испред тачног одговора.

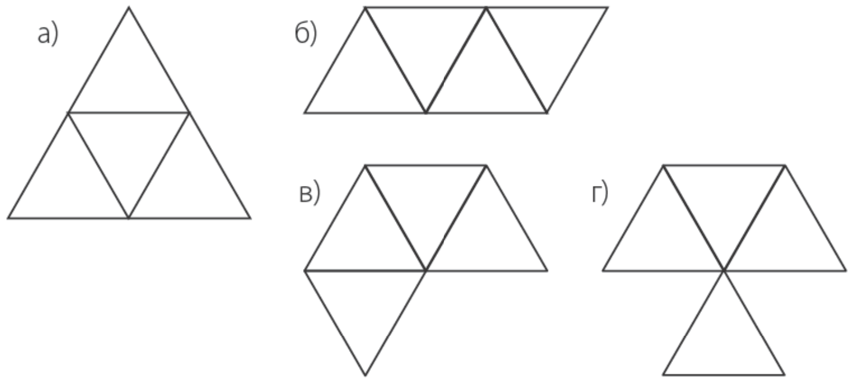
26. Једна страна коцке је основа пирамиде, а средиште наспрамне стране те коцке је врх пирамиде. Конструиши мрежу те пирамиде ако је ивица коцке 4 cm.

27. Конструиши мрежу правилне шестостране пирамиде чија је основна ивица $a = 4$ cm, а нагибни угао:

а) бочне ивице према основи је 30°;

б) апотеме према основи је 45°.

28. Која од фигура на слици није мрежа тростране пирамиде?



29. Конструиши мрежу четворостране пирамиде чија је основа правоугаоник страница 4 cm и 6 cm, а бочна ивица је 5 cm.

5.3. Површина пирамиде

Збир површина страна пирамиде једнак је површини пирамиде.

Ако са B обележимо површину основе пирамиде, а са M површину њеног омотача, онда је површина те пирамиде једнака:

$$\boldsymbol{P = B + M.}$$

пример 1

Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице 4 cm и апотеме 3 cm.

Решење:

Основа те пирамиде је квадрат, па је површина њене основе једнака $B = 16\ \text{cm}^2$.

Омотач се састоји од четири једнакокрака троугла, па је $M = 4 \cdot \dfrac{(4\ \text{cm}) \cdot (3\ \text{cm})}{2}$, односно $M = 24\ \text{cm}^2$.

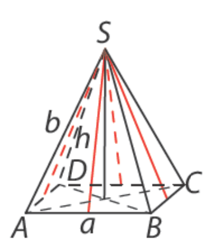
Дакле, одатле је

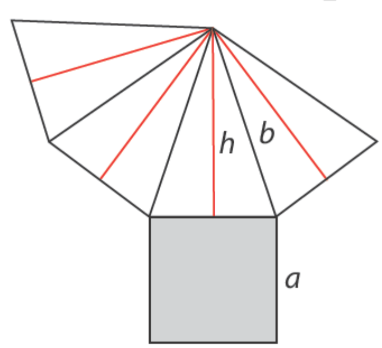
$$P = B + M,\ P = 40\ \text{cm}^2\ .$$

Ако је позната страница правилне четворостране пирамиде a и апотема h, тада је површина основе те пирамиде једнака $B = a^2$, а њен омотач је $M = 4 \cdot \dfrac{ah}{2}$, $M = 2ah$.

Дакле, одатле је

$P = B + M,\ P = a^2 + 2ah$.





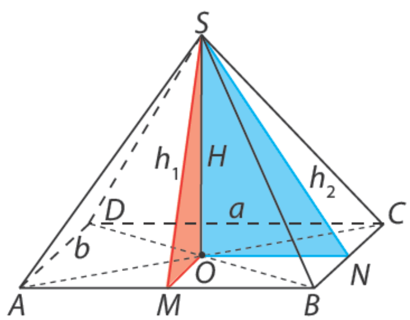
пример 2

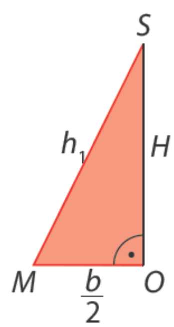
Основа пирамиде је правоугаоник $ABCD$, такав да је $AB = 8$ cm и $BC = 6$ cm. Висина пирамиде је 6 cm, а све бочне ивице су једнаких дужина. Израчунај површину те пирамиде.

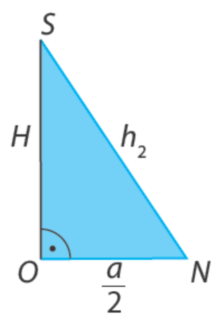
Решење:

Пошто су бочне ивице једнаке, следи да нормала из врха пирамиде продире раван основе у пресеку дијагонала правоугаоника $ABCD$. Бочне стране те пирамиде су једнакокраки троуглови, при чему је $\Delta ABS \cong \Delta CDS$, $\Delta BCS \cong \Delta DAS$, где је тачка S врх те пирамиде.

Апотеме израчунавамо као висине које одговарају основицама ових троуглова. Тачке M и N су редом средишта ивица AB и BC, а O тачка продора нормале из врха S кроз раван основе.







Из троугла MOS је $SM^2 = MO^2 + OS^2, SM^2 = (3\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2$, $SM = h_1 = 3\sqrt{5}$ cm.

Слично, из троугла NOS је $SN = h_2 = 2\sqrt{13}$ cm.

Површина пирамиде је једнака $P = B + M$.

$$B = P(ABCD),\ M = P(ABS) + P(BCS) + P(CDS) + P(DAS),$$

$$P(ABCD) = ab,\ P(ABS) = P(CDS) = \frac{ah_1}{2},\ P(BCS) = P(DAS) = \frac{bh_2}{2},$$

$$P = ab + 2\frac{ah_1}{2} + 2\frac{bh_2}{2},$$

$$P = ab + ah_1 + bh_2.$$

Дакле, $P = 48 + 8\cdot 3\sqrt{5} + 6\cdot 2\sqrt{13}$, то јест $P = \left(48 + 24\sqrt{5} + 12\sqrt{13}\right)\text{ cm}^2$.

пример 3

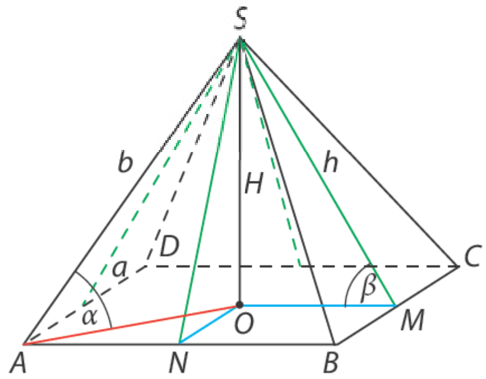
Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је основна ивица $a = 4$ cm, а бочна ивица $b = 8$ cm.

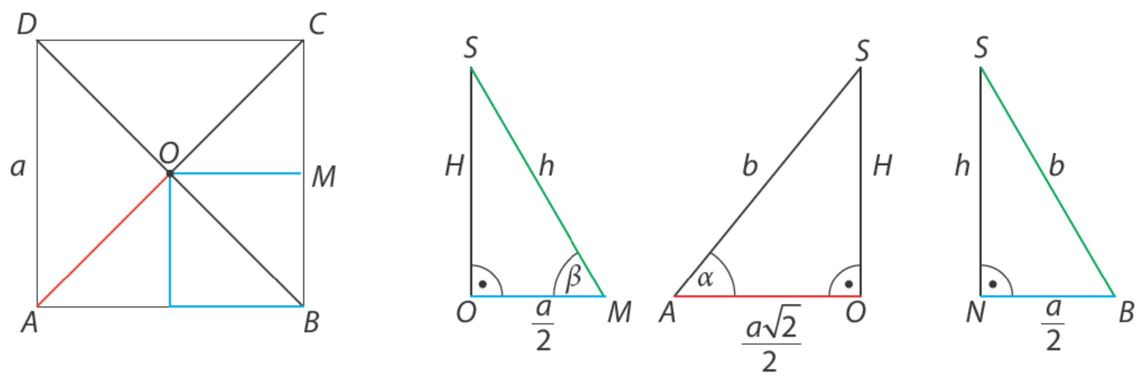
Решење:

Користећи слику из примера 1, уочавамо да је апотема једнака $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

односно $h = 2\sqrt{15}$ cm. Непосредно се израчунава да је $P = \left(16 + 16\sqrt{15}\right)\text{ cm}^2$, односно $P = 16\left(1 + \sqrt{15}\right)\text{ cm}^2$.

30. Нека су за правилну четворострану пирамиду *SABCD* елементи обележени са: a основна ивица, b бочна ивица, H висина, h апотема, α нагибни угао бочне ивице према основи, β нагибни угао апотеме према основи.



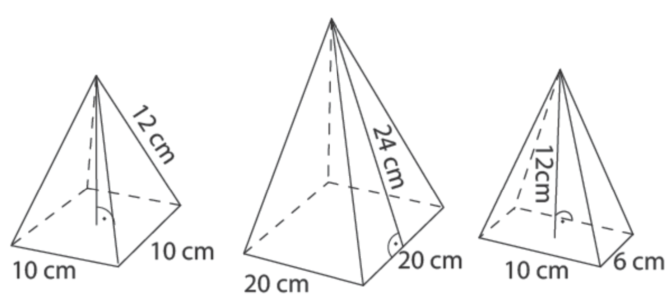


Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је:

а) $a = 7\,\text{cm}$, $h = 4\,\text{cm}$; **б)** $a = 8\,\text{cm}$, $H = 3\,\text{cm}$; **в)** $b = 10\,\text{cm}$, $h = 8\,\text{cm}$;

г) $H = 12\,\text{cm}$, $h = 13\,\text{cm}$; **д)** $a = 10\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$; **ђ)** $a = 12\,\text{cm}$, $\beta = 60°$.

31. Израчунај површине пирамида са слике.



32. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице 6 cm и бочне ивице 5 cm.

33. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде, ако је површина основе $B = 36\,\text{cm}^2$, а висина $H = 4\,\text{cm}$.

34. Израчунај површину правилне четворостране једнакоивичне пирамиде ивице 8 cm.

35. Основа четворостране пирамиде је правоугаоник страница 8 cm и 6 cm. Ако је њена бочна ивица 5 cm, колика је површина те пирамиде?

36. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде *SABCD* ако је бочна страна *ABS* једнакостранични троугао површине $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

37. Површина правилне четворостране пирамиде једнака је 125 cm^2. Ако основа и све бочне стране те пирамиде имају једнаке површине, тада је њена апотема једнака:

а) 2,5 cm; **б)** 5 cm; **в)** 7,5 cm; **г)** 9 cm; **д)** 10 cm.
Заокружи слово испред тачног одговора.

38. Збир свих ивица једнакоивичне четворостране пирамиде је 32 cm. Њена површина је:

а) $16\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$, **б)** $4\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$, **в)** $16\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.
Заокружи слово испред тачног одговора.

39. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице $a = 8$ cm, ако је њена висина једнака основној ивици.

40. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде чија је висина једнака 24 cm, а полупречник круга уписаног у основу износи 7 cm.

41. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде чији је дијагонални пресек једнакостранични троугао површине $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

42. Ана има самолепљиви папир облика квадрата странице 19 cm. Да ли тим папиром може да облепи све стране правилне четворостране пирамиде чије су све ивице по 10 cm? (Дозвољено је било како сећи папир.)

43. Излетници су од водоотпорног материјала направили шатор облика правилне четворостране пирамиде основне ивице $a = 2{,}5$ m и висине $H = 2{,}5$ m. Колико је материјала потребно за израду тог шатора, без његовог дна?

44. Израчунај површину омотача правилне четворостране пирамиде, ако су њене бочне ивице по 10 cm, а углови при врху бочних страна по 45°.

45. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је бочна ивица 20 cm, а нагибни угао те ивице према равни основе 30°.

46. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је њена висина 10 cm, а нагибни угао бочне ивице према равни основе 45°.

47. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је површина дијагоналног пресека $\sqrt{3}\,\text{m}^2$, а нагибни угао бочне ивице према равни основе 60°.

48. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде *SABCD* ако је пресек *SAC* правоугли троугао површине 32 cm^2.

49. Израчунај површину правилне једнакоивичне четворостране пирамиде чија је апотема 5 cm.

50. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице 10 cm, ако је угао између апотеме и равни основе 60°.

51. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде висине $9\sqrt{3}\,\text{cm}$, ако је угао између апотеме и равни основе 60°.

52. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је њена апотема $10\sqrt{2}\,\text{cm}$, а угао између апотеме и равни основе 45°.

53. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице 6 cm, ако је њена апотема за 1 cm дужа од висине.

54. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде, ако је површина њеног омотача 80 cm², а основна ивица и апотема су у размери 2 : 5.

55. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде, ако је њена апотема 13 cm, а основна ивица и висина су у размери 5 : 6.

56. Основа пирамиде је квадрат *ABCD* странице 6 cm. Бочна ивица $SA = 8\,\text{cm}$ нормална је на раван основе. Површина омотача ове пирамиде једнака је:

а) 96 cm²; б) $12\sqrt{55}\,\text{cm}^2$; **в)** $\left(48+6\sqrt{55}\right)\text{cm}^2$; **г)** 108 cm²; **д)** 144 cm².
Заокружи слово испред тачног одговора.

5.4. Површина правилне тростране и правилне шестостране пирамиде

С обзиром на то да се површина сваке пирамиде рачуна по формули $P = B + M$, при чему је B површина основе, а M површина омотача пирамиде, у наредна четири примера показаћемо како се израчунавају површине правилне тростране и правилне шестостране пирамиде.

пример 1

Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако је основна ивица 6 cm и апотема 10 cm.

Решење:

Основа правилне тростране пирамиде је једнакостранични троугао, па је њена површина једнака $B = \dfrac{(6\,\text{cm})^2\sqrt{3}}{4}$, $B = 9\sqrt{3}\text{cm}^2$. Бочне стране те пирамиде су подударни једнакокраки троуглови, па је површина омотача једнака $M = 3\cdot\dfrac{(6\,\text{cm})\cdot(10\,\text{cm})}{2}$, $M = 90\,\text{cm}^2$. Одатле следи да је површина дате пирамиде једнака

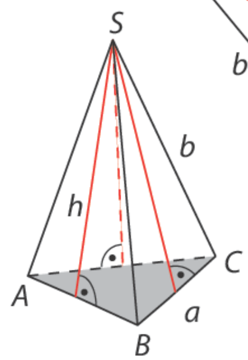
$$P = \left(9\sqrt{3}+90\right)\text{cm}^2, \qquad P = 9\left(\sqrt{3}+10\right)\text{cm}^2.$$

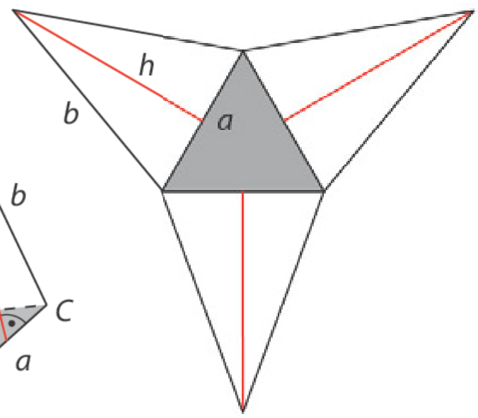
Ако је позната страница правилне тростране пирамиде a и апотема h, тада одређујемо површину пирамиде на следећи начин:

Основа те пирамиде је једнакостранични троугао, па је њена површина једнака

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Бочне стране те пирамиде су подударни једнакокраки троуглови, па је површина омотача једнака $M = 3 \cdot \frac{ah}{2}$. Одатле следи да је одговарајућа површина пирамиде једнака: $P = B + M$, $\quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{ah}{2}$.





пример 2

Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако су растојања врха пирамиде од темена основе по 10 cm, а растојања врха од основних ивица по 8 cm.

Решење:

Растојање врха пирамиде од темена основе, једнако је дужини бочне ивице, а растојање врха од основних ивица једнако је апотеми.

Дакле, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$, односно $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 10^2 - 8^2$, одакле се добија да је $a = 12$ cm.

Одатле следи да је $P = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{12 \cdot 8}{2} = \left(36\sqrt{3} + 144\right)\text{cm}^2 = 12\left(3\sqrt{3} + 12\right)\text{cm}^2$.

пример 3

Израчунај површину правилне шестостране пирамиде чија је основна ивица 9 cm и апотема 12 cm.

Решење:

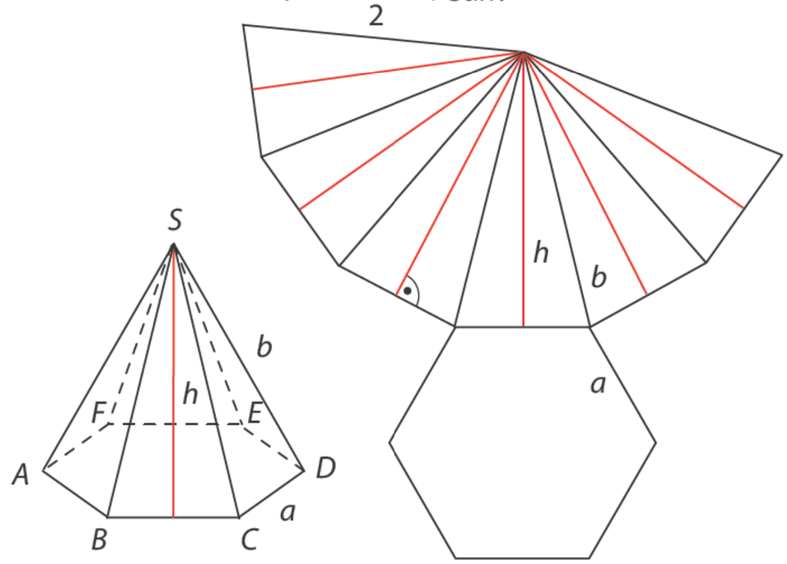
Основа правилне шестостране пирамиде је правилни шестоугао, па је њена површина једнака $B = \frac{6 \cdot 9^2\sqrt{3}}{4}$, $B = \frac{243\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$. Бочне стране те пирамиде су једнакокраки троуглови, па је површина омотача једнака $M = 6\frac{9 \cdot 12}{2}$, односно $M = 324\ \text{cm}^2$.

Дакле, површина пирамиде једнака је $P = \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + 324\right)\text{cm}^2$.

У општем случају, када је a основна ивица правилне шестостране пирамиде, а h њена апотема, основа те пирамиде је правилни шестоугао странице a, па је површина основе једнака $B=6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, односно $B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Бочне стране те пирамиде су једнакокраки троуглови, па је површина омотача једнака $M=6\frac{ah}{2}$, односно $M=3ah$.

Дакле, површина те пирамиде једнака је $P=B+M$, односно

$$P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+3ah.$$



п р и м е р 4

Израчунај површину правилне шестостране пирамиде, ако је дужа дијагонала основе 16 cm, а њена висина 11 cm.

Решење:

С обзиром на то да је дужа дијагонала основе једнака двострукој основној ивици, добија се да је основна ивица a = 8 cm. Нека је $ABCDEFS$ та пирамида и тачка M средиште ивице AB. Тада тачка M, средиште основе O и врх пирамиде S одређују правоугли троугао MOS. Из овог троугла добија се да је

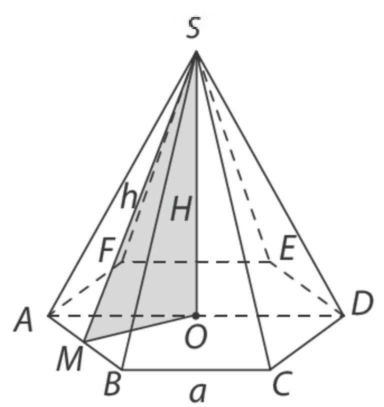
$$SM^2=MO^2+OS^2,\ h^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+H^2,\ h^2=\left(\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2+11^2,\ h^2=48+121,\ h=13\,\text{cm}.$$

Сада је $B=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, односно $B=\frac{3\cdot 8^2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$, тј. $B=96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, а за омотач имамо да је $M=6\cdot\frac{ah}{2}$, $M=3ah$.

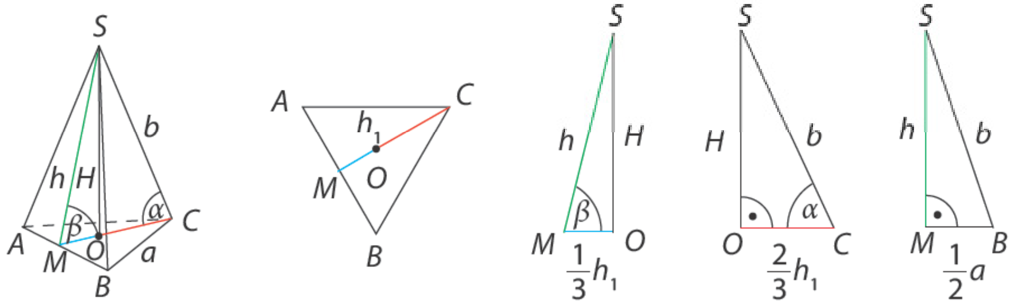
Дакле, можемо израчунати површину

$$P=B+M,\ P=\frac{3\cdot 8^2\sqrt{3}}{2}+3\cdot 8\cdot 13,$$

$$P=\left(96\sqrt{3}+312\right)\text{cm}^2,\ P=24\left(4\sqrt{3}+13\right)\text{cm}^2.$$



57. Нека су елементи правилне тростране пирамиде $SABC$: a основна ивица, b бочна ивица, H висина, h апотема, h_1 висина основе, α нагибни угао бочне ивице према основи, β угао између апотеме и равни основе.



Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако је:

а) $a = 12$ cm, $h = 7$ cm; **б)** $a = 6$ cm, $b = 5$ cm;

в) $a = 6$ cm, $H = 3$ cm; **г)** $b = 13$ cm, $H = 12$ cm.

58. Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако је:

а) обим основе 12 cm, бочна ивица 8 cm;

б) површина основе $25\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, апотема 10 cm;

в) површина омотача 48 cm², апотема 8 cm.

59. Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако је збир свих основних ивица 18 cm, а збир свих бочних ивица 12 cm.

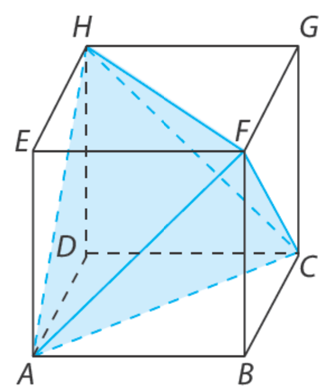
60. Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако је основна ивица $a = 12$ cm, а угао између апотеме и равни основе $\beta = 60°$.

61. Ивица основе правилне тростране пирамиде је једнака висини пирамиде, $a = H = 12$ cm. Одреди њену површину.

62. Мрежа правилне једнакоивичне тростране пирамиде је једнакостранични троугао странице 24 cm. Колика је површина омотача те пирамиде?

63. Израчунај површину правилне тростране пирамиде чија је висина 6 cm, а апотема 8 cm.

64. Темена A, C, F и H коцке $ABCDEFGH$ су темена тростране пирамиде. Да ли је та пирамида правилна? Образложи одговор!



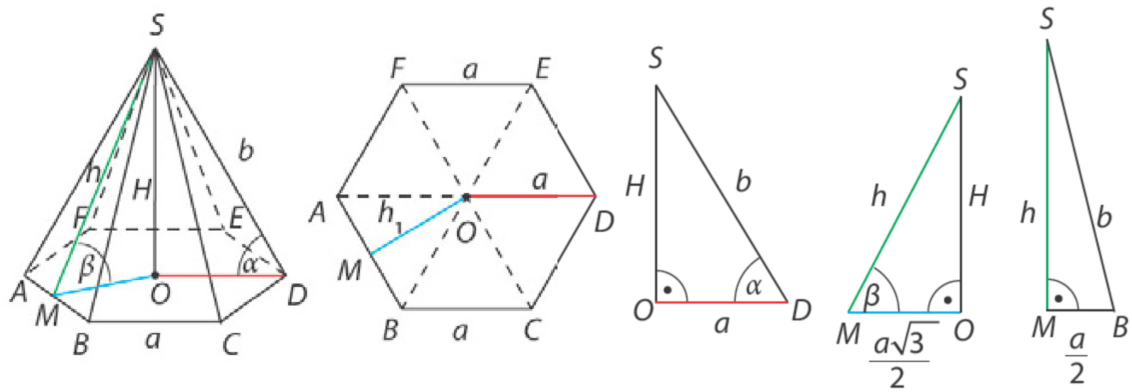
65. Ако је ивица коцке једнака 12 cm, за пирамиду из претходног задатка израчунај:

а) дужину ивица и висину;

б) површину.

66. Ако је површина правилне тростране једнакоивичне пирамиде једнака $36\sqrt{3}\,cm^2$, колика је основна ивица те пирамиде?

67. Нека су елементи правилне шестостране пирамиде *SABCDEF*: a основна ивица, b бочна ивица, H висина, h апотема, h_1 висина карактеристичног троугла основе, α нагибни угао бочне ивице према основи, β угао између апотеме и равни основе.



Израчунај површину правилне шестостране пирамиде, ако је:

а) $a = 10$ cm, $h = 12$ cm; **б)** $a = 6$ cm, $b = 12$ cm;

в) $a = 6$ cm, $H = 3$ cm; **г)** $a = 13$ cm, $h = 12$ cm.

68. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је:

а) обим основе 24 cm, апотема 1 dm;

б) површина основе $600\sqrt{3}\,cm^2$, апотема 26 cm;

в) површина омотача 48 cm^2, обим основе 12 cm.

69. Краћа дијагонала основе правилне шестостране пирамиде је $d = 12\sqrt{3}$ cm, а њена висина је $H = 8$ cm. Израчунај површину те пирамиде.

70. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је дужа дијагонала основе 20 cm, а висина пирамиде 5 cm.

71. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде, ако је апотема $h = 12\sqrt{3}$ cm, а угао између апотеме и равни основе 60°.

72. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је површина њене основе $150\sqrt{3}\,cm^2$, а угао између апотеме и равни основе 30°.

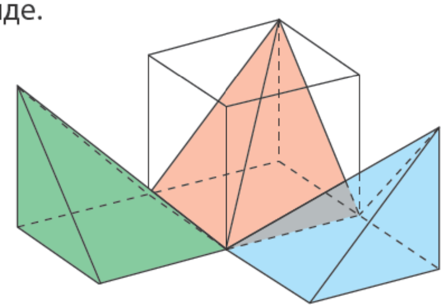
73. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде основне ивице 6 cm, ако је угао између бочне ивице и основе 60°.

74. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је основна ивица $4\sqrt{3}$ cm, а центар основе је од бочне стране на растојању од $3\sqrt{3}$ cm.

75. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је основна ивица $2\sqrt{5}$ cm, а центар основе је од бочне ивице на одстојању од 4 cm.

Запремина пирамиде
Запремина четворостране пирамиде 5.5.

Експерименталним путем се може показати да је запремина пирамиде једнака трећини запремине призме чија је висина једнака висини пирамиде, а основе су им међусобно подударне. Тако, на пример, на наредној илустрацији представљена је подела коцке на три подударне пирамиде.



Запремина пирамиде чија је површина основе једнака B, а висина H, једнака је

$$V=\frac{1}{3}BH.$$

У овој књизи неће бити приказан доказ ове тврдње. Један од начина да се у то искуствено уверимо јесте коришћење модела четворостране призме (квадра) и пирамиде, чије су основе међусобно подударне, а висине су им једнаке, уз пресипања песка, шећера или течности из једног у други модел.

пример 1

Одреди запремину четворостране пирамиде чија је основа правоугаоник ивица $a=6$ cm и $b=4$ cm, ако је висина пирамиде $H=10$ cm.

Решење:

Погледај слику из примера 2. у лекцији 5.3. Површина основе те пирамиде једнака је површини правоугаоника, па је $B=(6\,\text{cm})\cdot(4\,\text{cm})=24\,\text{cm}^2$.

Сада је запремина те пирамиде једнака $V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot(24\,\text{cm}^2)\cdot(10\,\text{cm})=80\,\text{cm}^3$.

пример 2

Основна и бочна ивица правилне четворостране пирамиде $SABCD$ су редом $a=6$ cm, $b=8$ cm. Израчунај њену запремину.

Решење:

Одредимо најпре висину те пирамиде. У овом случају, висина пирамиде је висина једнакокраког троугла ACS која одговара основици.

$H^2=b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$, где је d дијагонала основе (квадрата).

$$H^2=b^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2,\ H^2=8^2-\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2,\ H=\sqrt{46}\,\text{cm}.$$

Запремина је $V=\frac{1}{3}BH$, односно $V=\frac{a^2H}{3}=\frac{(6\,\text{cm})^2\sqrt{46}\,\text{cm}}{3}=12\sqrt{46}\,\text{cm}^3$.

пример 3

Основа четворостране пирамиде је страна *ABCD* коцке *ABCDEFGH*, а врх је средиште *S* коцке. Израчунај запремину, ако је ивица коцке једнака a.

Решење:

Скицирај слику коцке *ABCD* и њеног средишта *S*, па уочи пирамиде чије су основе стране коцке, а врхови у средишту коцке. Таквих пирамида има 6 и можемо замислити да се све оне могу довести до поклапања. Коцка је разложена на 6 пирамида (чије унутрашње области немају заједничких тачака), па је њена запремина једнака збиру запремина тих пирамида.

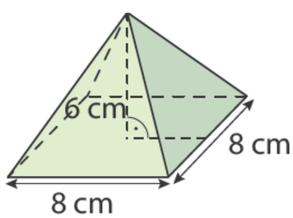
Дакле, запремина пирамиде *ABCDS* једнака је $V = \frac{a^3}{6}$.

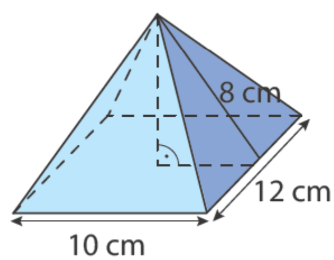
Основа ове пирамиде је квадрат површине a^2, висина је $\frac{a}{2}$.

Пошто је $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2}$, можемо закључити да је запремина ове пирамиде једнака трећини запремине одговарајуће призме.

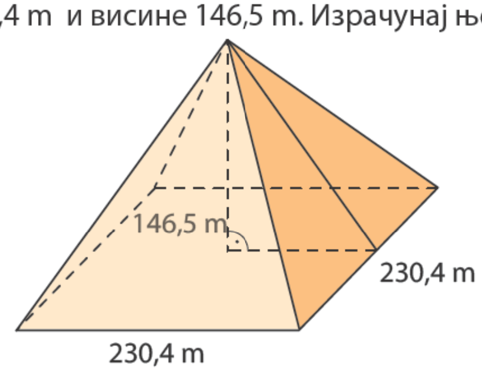
ЗАДАЦИ

76. Израчунај запремину пирамида на слици.





77. Кеопсова пирамида која је поменута у уводном тексту овог поглавља, за коју се често каже и да је Велика пирамида у Гизи, правилна је четворострана пирамида основне ивице 230,4 m и висине 146,5 m. Израчунај њену запремину.



78. Нека су за правилну четворострану пирамиду *SABCD* њени елементи обележени са: a основна ивица, b бочна ивица, H висина, h апотема, α нагибни угао бочне ивице према основи, β угао између апотеме и равни основе. (Види слику из задатка 30.)

Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде, ако је:

а) $a = 9$ cm, $H = 4$ cm; **б)** $a = 8$ cm, $h = 5$ cm; **в)** $b = 10$ cm, $H = 8$ cm;

г) $H = 12$ cm, $h = 13$ cm; **д)** $a = 8$ cm, $\alpha = 45°$; **ђ)** $a = 12$ cm, $\beta = 30°$

79. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако је обим основе 32 cm и

а) висина 9 cm; **б)** бочна ивица 6 cm; **в)** апотема 8 cm.

80. Површина једне бочне стране правилне четворостране пирамиде је 12 cm^2 и

а) основна ивица 4 cm; **б)** апотема 12 cm; **в)** површина основе 24 cm^2.

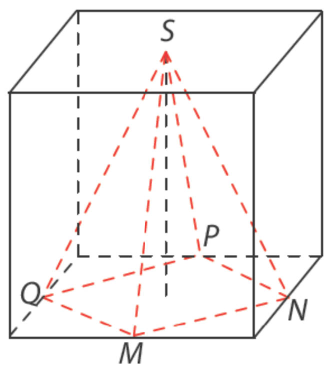
Израчунај запремину те пирамиде.

81. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде, ако је бочна ивица $b = 10$ cm и висина $H = 8$ cm.

82. У коцку ивице $a = 12$ cm уписана је пирамида $MNPQS$ (M, N, P и Q су средишта ивица једне стране коцке, а S је средиште наспрамне стране).

а) Израчунај запремину пирамиде;

б) Одреди размеру запремина пирамиде и коцке.



83. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако је њена висина 30 cm, а нагибни угао бочне ивице према основи 45°.

84. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако њена бочна ивица има дужину 6 cm, а са равни основе заклапа угао од 45°.

85. Израчунај површину и запремину правилне четворостране пирамиде ако је основна ивица 10 cm, а нагибни угао бочне ивице према основи 60°.

86. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако је основна ивица $20\sqrt{2}$ cm, а нагибни угао бочне ивице према основи 60°.

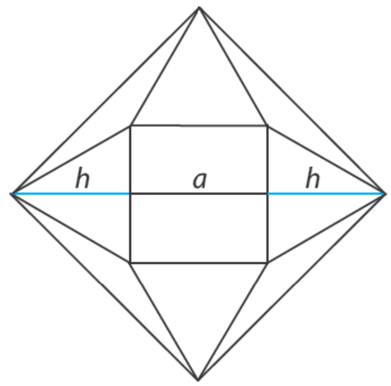
87. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако је њена апотема 10 cm, а угао између апотеме и равни основе 60°.

88. Збир површина основе и једне бочне стране правилне четворостране пирамиде је 36 cm^2. Разлика површина омотача и основе је 64 cm^2. Израчунај запремину те пирамиде.

89. Наспрамне бочне ивице правилне четворостране пирамиде образују прав угао. Израчунај запремину те пирамиде ако је бочна ивица 4 cm.

90. Површина омотача правилне четворостране пирамиде једнака је 60 cm^2. Израчунај запремину те пирамиде, ако је однос основне ивице и апотеме једнак 3 : 2.

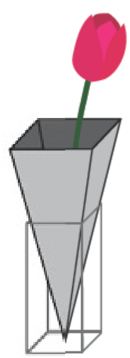
91. Мрежа правилне четворостране пирамиде уцртана је у квадрат странице $12\sqrt{2}$ cm. Израчунај запремину те пирамиде ако је дужина основне ивице једнака апотеми.



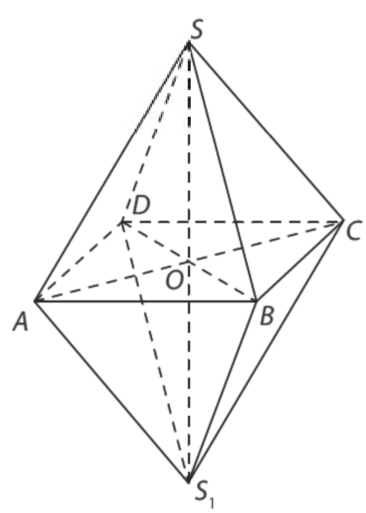
92. Запремина правилне четворостране пирамиде једнака је 48 cm^3, а основна ивица 6 cm. Колика је површина те пирамиде?

93. Основа праве пирамиде је правоугаоник страница 15 cm и $\sqrt{31}$ cm. Ако је бочна ивица 17 cm, израчунај запремину те пирамиде.

94. На слици је приказана ваза за цвеће. Ако је њена висина 35 cm, а запремина 6 720 cm^3, колика је површина те вазе?



95. Израчунај запремину тела које се састоји од две правилне четворостране једнакоивичне пирамиде залепљене по основама, ако је ивица 8 cm. Види слику! Ово тело се назива октаедар и представља један од пет правилних полиедара.



Запремина правилне тростране и правилне шестостране пирамиде 5.6.

У претходној лекцији научили смо да је $V=\frac{1}{3}BH$, где је са B обележена површина основе, са H висина, а са V запремина пирамиде.

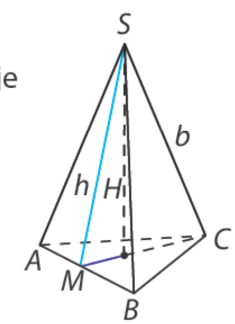
пример 1

Израчунај запремину правилне тростране пирамиде, ако је њена основна ивица 4 cm, а висина 6 cm.

Решење:

Површина основе те пирамиде је $B=\frac{(4\,\text{cm})^2\sqrt{3}}{4}$, $B=4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Сада је $V=\frac{1}{3}\cdot\left(4\sqrt{3}\ \text{cm}^2\right)\cdot(6\,\text{cm})$, односно $V=8\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

Када је позната основна ивица a правилне тростране пирамиде и њена висина H, тада је површина основе те пирамиде једнака $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па за њену запремину важи $V=\frac{1}{3}BH$, односно $V=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H}{3}$. Након сређивања, добија се да је **запремина правилне тростране пирамиде** $V=\frac{a^2\sqrt{3}\cdot H}{12}$.

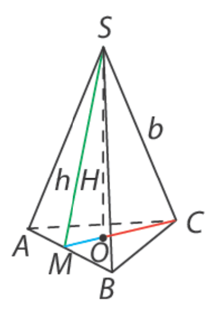


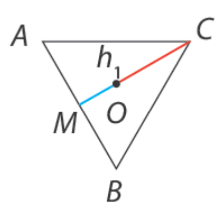
пример 2

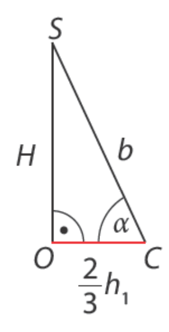
Израчунај запремину правилне тростране, ако је основна ивица 6 cm, а бочна ивица $4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Решење:

Нека је $ABCS$ дата пирамида. Одредимо најпре њену висину. Ако је O средиште основе, тада из троугла SOC имамо да је $H^2=b^2-\left(\frac{2}{3}h_1\right)^2$, односно $H^2=b^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$.







Одатле је $H^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{6\sqrt{3}}{3}\right)^2$, $H=6\,\text{cm}$.

Сада за запремину те пирамиде важи $V=\frac{1}{3}BH$, односно

$$V=\frac{6^2\sqrt{3}\cdot 6}{12},\text{ па је } V=18\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

пример 3

Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде, ако је основна ивица 2 cm и висина 5 cm.

Решење:

Површина основе те пирамиде је $B=\dfrac{6(2\text{ cm})^2\sqrt{3}}{4}$, тј. $B=6\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, па је њена запремина једнака $V=\dfrac{1}{3}\cdot\left(6\sqrt{3}\text{ cm}^2\right)\cdot\left(5\text{cm}\right)$, односно $V=10\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

За правилну шестострану пирамиду основне ивице a и висине H површина основе је једнака $B=\dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4}$. Њена запремина једнака је $V=\dfrac{1}{3}BH$, односно $V=\dfrac{\dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H}{3}$.

Након сређивања израза, добија се да је **запремина правилне шестостране пирамиде**

$$\boldsymbol{V=\dfrac{a^2\sqrt{3}\cdot H}{2}}.$$

пример 4

Израчунај висину правилне шестостране пирамиде, ако је њена запремина једнака $144\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, а основна ивица 6 cm.

Решење:

Када заменимо дате вредности у једнакости $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}H}{2}$, добија се да је $144\sqrt{3}\text{ cm}^3=\dfrac{(6\text{ cm})^2\sqrt{3}H}{2}$. Одатле следи да је $H=\dfrac{144\sqrt{3}\text{ cm}^3\cdot 2}{36\text{ cm}^2\sqrt{3}}$, $H=8\text{ cm}$.

ЗАДАЦИ

96. Нека су елементи правилне тростране пирамиде $ABCS$: a основна ивица, b бочна ивица, H висина, h апотема, h_1 висина основе, α нагибни угао бочне ивице према основи, β угао између апотеме и равни основе. (Види слику из задатка 57.) Израчунај запремину правилне тростране пирамиде ако је:

а) $a=12$ cm; $H=6$ cm; **б)** $a=6$ cm; $b=5$ cm;

в) $b=6$ cm; $H=3$ cm; **г)** $b=13$ cm; $h=12$ cm.

97. Запремина правилне тростране пирамиде је $48\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ и основна ивица 12 cm. Израчунај висину те пирамиде.

98. Израчунај масу модела једнакоивичне тростране пирамиде чија је ивица 6 cm, а густина дрвета $\rho\approx 0{,}7g/\text{cm}^3$.

99. Ивица основе правилне тростране пирамиде је 12 cm, а површина омотача је $\dfrac{2}{3}$ површине пирамиде. Запремина те пирамиде је:

а) $144\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; **б)** $72\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; **в)** $144\sqrt{6}\,\text{cm}^3$; **г)** 216 cm^3; **д)** 288 cm^3.

Заокружи слово испред тачног одговора.

100. Израчунај запремину правилне тростране пирамиде ако је површина њене основе једнака $B = 36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, а бочна ивица $s = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

101. Правилна тространа призма и правилна тространа пирамида имају подударне основе и једнаке запремине. Размера висина те призме и те пирамиде је:

а) 1 : 2 ; **б)** 2 : 1; **в)** 1 : 3; **г)** 3 : 1; **д)** 4 : 1.

Заокружи слово испред тачног одговора.

102. Површина омотача правилне тростране пирамиде је 144 cm^2 и основна ивица 12 cm. Израчунај запремину те пирамиде.

103. Израчунај запремину правилне тростране пирамиде, ако њена бочна ивица $b = 6$ cm заклапа са основом угао од 60°.

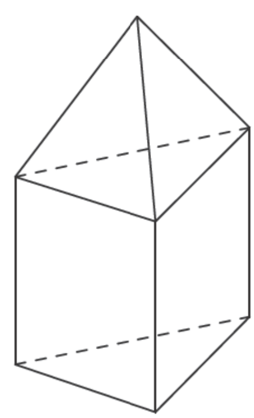
104. Израчунај запремину правилне тростране пирамиде, ако бочна ивица заклапа са основом угао од 45° и:

а) основна ивица је 18 cm; **б)** висина је 8 cm.

105. Израчунај површину и запремину правилне тростране пирамиде $ABCS$ ако је бочна ивица $b = 9$ cm једнака висини основе.

106. Бочне стране правилне тростране пирамиде су правоугли троуглови. Ако је бочна ивица 4 cm, израчунај запремину те пирамиде.

107. На правилну једнакоивичну тространу призму ивице 4 cm постављена је правилна једнакоивична пирамида. (Види слику!) Израчунај површину и запремину тог тела.



108. Нека су елементи правилне шестостране пирамиде $SABCDEF$: a основна ивица, b бочна ивица, H висина, h апотема, h_1 висина карактеристичног троугла основе, α нагибни угао бочне ивице према основи, β угао између апотеме и равни основе. (Види слику из задатка 67.)

Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде ако је:

а) $a = 6$ cm; $H = 3$ cm; **б)** $a = 6$ cm; $b = 12$ cm;

в) $a = 6$ cm; $h = 6\sqrt{3}$ cm; **г)** $b = 13$ cm, $h = 12$ cm.

109. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде основне ивице 5 cm и висине 3 cm.

110. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде чији је обим основе 60 cm, а висина је за 2 cm дужа од основне ивице.

111. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде основне ивице $a = 6$ cm, ако је површина омотача три пута већа од површине основе.

112. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде, ако је основна ивица $a = 8$ cm и бочна ивица $b = 17$ cm .

113. Висина правилне шестостране пирамиде је 6 cm, а бочна ивица заклапа са основом угао од 45°. Израчунај запремину те пирамиде.

114. Површина основе правилне шестостране пирамиде је $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, а површина омотача је 60 cm^2. Израчунај запремину те пирамиде.

115. Површина омотача правилне шестостране пирамиде је 432 cm^2, а основна ивица 12 cm. Израчунај запремину те пирамиде.

116. Површина основе правилне шестостране пирамиде је $96\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, а запремина је 96 cm^3. Израчунај површину те пирамиде.

117. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде, ако бочна ивица $b = 8$ cm заклапа са основом угао од 45°.

118. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде, ако апотема заклапа са основом угао од 45° и:

а) основна ивица је $6\sqrt{3}$ cm; б) висина је 4 cm.

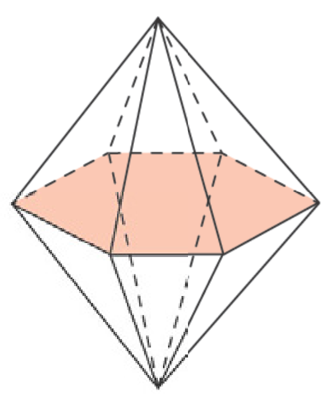
119. Бочна ивица правилне шестостране пирамиде је три пута већа од основне ивице. Израчунај запремину пирамиде, ако је њена висина једнака $8\sqrt{2}$ cm .

120. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде, ако је њена запремина једнака $24\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, а основна ивица $2\sqrt{3}$ cm.

121. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде, ако је њена запремина једнака $864\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, а висина је 4 cm.

122. Угао између висине и апотеме правилне шестостране призме је 30°. Ако је површина њене основе једнака $6\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, одреди површину и запремину те пирамиде.

123. На слици је приказан дијамант у облику тела, које се састоји од две подударне правилне шестостране пирамиде залепљене по основама. Густина тог дијаманта је 3,51 g/cm^3. Ако је основна ивица једне од тих пирамида једнака 5 mm, а бочна ивица 13 mm, колика је маса дијаманта? ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$)



Предлог задатака за додатни рад

1. Основа правилне тростране пирамиде има страницу дужине 6 cm, а апотеме пирамиде са равни основе граде угао од 45°. Израчунај површину и запремину те пирамиде.
2. Апотема правилне тростране пирамиде нагнута је према равни основе под углом од 60°. Израчунај одстојање тежишта основе од бочне стране, ако је основна ивица пирамиде једнака 16 cm.
3. Од дрвеног предмета облика коцке истесан је правилан тетраедар тако да су дијагонале страна коцке ивице тетраедра. Одреди однос површина коцке и добијеног тетраедра.
4. Површине основе и омотача правилне шестостране призме односе се као $\sqrt{3}:2$. Ако је основна ивица пирамиде 10 cm, колика је њена висина?
5. Квадрат странице a представља мрежу тростране пирамиде. Колика је запремина те пирамиде?
6. У ком односу се налазе запремине квадра $ABCDA'B'C'D'$ и тетраедра $AB'C'D'$?
7. У правилну четворострану пирамиду уписана је правилна четворострана призма тако да доња основа призме припада основи пирамиде, а темена горње основе призме су тежишта бочних страна пирамиде. Одреди однос запремина призме и пирамиде.
8. Бочне стране ABM, BCM и CAM тростране пирамиде $ABCM$ су међусобно нормалне и имају редом површине 54 cm², 96 cm² и 72 cm². Израчунај запремину пирамиде и мерне бројеве сваке од ивица пирамиде.
9. Дат је правилан тетраедар $ABCD$, основне ивице a. Ако је E средиште дужи одређене врхом D и подножјем нормале на основу ABC, докажи да су дужи AE, BE и CE нормалне једна на другу.
10. Све апотеме тростране пирамиде су једнаких дужина. Ако је површина те пирамиде једнака $\frac{3}{2}$ површине њеног омотача, одреди угао између апотеме и основе пирамиде.
11. Израчунај површину и запремину правилног октаедра (тела које се састоји од две једнакоивичне четворостране пирамиде залепљене по основама), чија основна ивица има дужину a.
12. У правилној шестостраној пирамиди основна ивица једнака је висини пирамиде. Израчунај нормално растојање подножја висине пирамиде од бочне стране пирамиде, ако је основна ивица пирамиде $a=\sqrt{21}$ cm.
13. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунај површину те пирамиде.
14. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од 60°. Одреди x ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине.
15. Правилна шестострана пирамида основне ивице a и бочне ивице s пресечена је са равни која садржи средишта двеју суседних основних ивица и нормална је на раван основе. Одреди површину пресека.

Питалице

1.	Пирамида је раванска фигура.	да	не
2.	Бочне стране пирамиде су троуглови.	да	не
3.	Бочне стране пирамиде могу бити правоугаоници.	да	не
4.	Тространа пирамида има 6 ивица.	да	не
5.	Пресек пирамиде и равни може бити квадрат.	да	не
6.	Пресек пирамиде и равни може бити трапез.	да	не
7.	Дијагонални пресек пирамиде је троугао.	да	не
8.	Површина омотача пирамиде мања је од површине њене основе.	да	не
9.	Код шестостране пирамиде може се уочити више неподударних дијагоналних пресека.	да	не
10.	Површина правилне једнакоивичне тростране пирамиде ивице 1 cm је $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.	да	не

1. Колико ивица има десетострана пирамида?

(А) 10 **(Б)** 11 **(В)** 15 **(Г)** 20 **(Д)** 25

2. Збир дужина свих ивица правилне четворостране једнакоивичне пирамиде једнак је 32 cm. Површина њеног омотача једнака је:

(А) $16\sqrt{3}\,cm^2$ **(Б)** $4\sqrt{3}\,cm^2$ **(В)** $64\sqrt{3}\,cm^2$ **(Г)** $32\sqrt{3}\,cm^2$ **(Д)** $128\ cm^2$

3. Запремина правилне тростране пирамиде основне ивице 4 cm и висине 24 cm једнака је:

(А) $64\sqrt{3}\,cm^3$ **(Б)** $32\sqrt{2}\,cm^3$ **(В)** $32\sqrt{3}\,cm^3$ **(Г)** $96\ cm^3$ **(Д)** $48\sqrt{3}\,cm^3$

4. Површина правилне четворостране пирамиде основне ивице 8 cm и висине 3 cm једнака је:

(А) $72\ cm^2$ **(Б)** $144\ cm^2$ **(В)** $80\ cm^2$ **(Г)** $96\ cm^2$ **(Д)** $224\ cm^2$

5. Већи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде, основне ивице 6 cm, је једнакостранични троугао. Површина тог пресека једнака је:

(А) $36\sqrt{3}\,cm^2$ **(Б)** $9\sqrt{3}\,cm^2$ **(В)** $4\sqrt{3}\,cm^2$ **(Г)** $144\sqrt{3}\,cm^2$ **(Д)** $36\ cm^2$

6. Ако је обим основе правилне шестостране пирамиде једнак $36\sqrt{3}\,cm$, а површина већег дијагоналног пресека $36\sqrt{3}\,cm^2$, онда је површина омотача те пирамиде једнака:

(А) $300\sqrt{2}\,cm^2$ **(Б)** $270\sqrt{39}\,cm^2$ **(В)** $360\sqrt{3}\,cm^2$ **(Г)** $54\sqrt{39}\,cm^2$ **(Д)** $300\ cm^2$.

7. Ако је основна ивица правилне четворостране пирамиде 6 cm, а њена запремина $72\ cm^3$, следи да је апотема те пирамиде једнака:

(А) $5\sqrt{3}\,cm$ **(Б)** $7\sqrt{3}\,cm$ **(В)** $7\sqrt{2}\,cm$ **(Г)** $3\sqrt{5}\,cm$ **(Д)** $2\sqrt{7}\,cm$

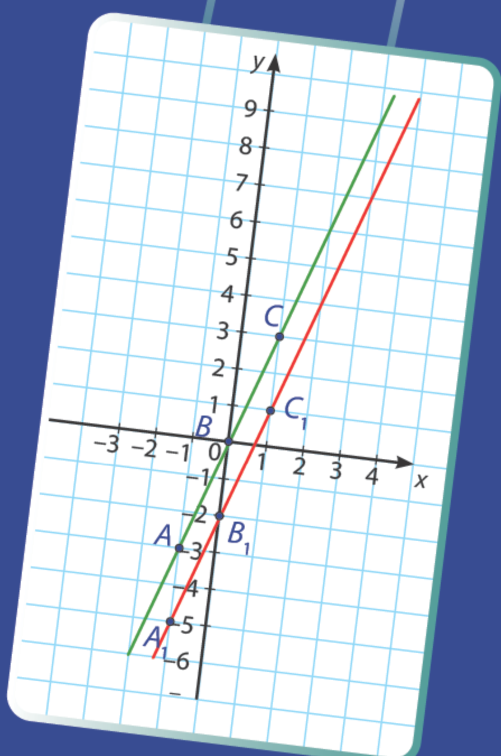
8. Ако бочна ивица правилне тростране пирамиде дужине 12 cm заклапа са равни основе угао од 60º, запремина те пирамиде једнака је:

(А) $162\sqrt{3}\,cm^3$ **(Б)** $162\sqrt{2}\,cm^3$ **(В)** $54\sqrt{3}\,cm^3$ **(Г)** $162\ cm^3$ **(Д)** $81\sqrt{3}\,cm^3$

Предлог контролне вежбе

5.1.	Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице 10 cm и апотеме 8 cm.	**15**
5.2.	Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице 10 cm и висине 12 cm.	**20**
5.3.	Израчунај површину правилне четворостране пирамиде основне ивице $8\sqrt{3}$ cm , ако је њена апотема нагнута према равни основе под углом од 30º.	**25**
5.4.	Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде ако је основна ивица 10 cm, а бочна ивица 26 cm.	**15**
5.5.	Израчунај површину и запремину правилне шестостране пирамиде, ако је основна ивица 6 cm, а висина је за 2 cm краћа од бочне ивице.	**20**
5.6.	Површина основе правилне шестостране пирамиде је $24\sqrt{3}$ cm^2 , а површина омотача је 60 cm^2. Израчунај њену запремину.	**25**
5.7.	Израчунај површину правилне тростране пирамиде, ако је основна ивица 12 cm, а апотема 15 cm.	**15**
5.8.	Израчунај запремину правилне тростране пирамиде, ако је површина основе $20,25\sqrt{3}$ cm^2, а површина омотача 108 cm^2.	**20**
5.9.	Израчунај површину и запремину правилне тростране пирамиде, ако је основна ивица 12 cm, а апотема заклапа са основом угао од 60º.	**25**
5.10.	Израчунај површину правилне тростране једнакоивичне пирамиде, ако је основна ивица 6 cm.	**15**
5.11.	Израчунај запремину правилне тростране једнакоивичне пирамиде, ако је основна ивица 9 cm.	**20**
5.12.	Израчунај запремину правилне тростране једнакоивичне пирамиде, ако је њена површина $144\sqrt{3}$ cm^2 .	**25**

6 ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА



У свакодневном животу, али и док учимо физику, математику или неку другу науку, често се налазимо у ситуацијама које зависе од неких величина чије вредности се могу мењати.

Тако, на пример, дужина пређеног пута зависи од времена и брзине којом се тело креће. Али, ако је та брзина константна (непромењива), онда дужина пређеног пута зависи само од времена кретања.

Слично је и са обимом једнакостраничног троугла. Вредност обима зависи од дужине странице. Ако је страница краћа, обим је мањи, ако је страница дужа, обим је већи.

Сличних примера, који се срећу у свакодневном животу, има много. Бавећи се њима још од давнина, математичари су тражили форму како да те зависности опишу и научно, прецизно и поуздано проучавају, да описују њихове особине и сва значајна својства која им припадају.

У осмом разреду срећемо се са линеарном функцијом, а током каснијег школовања имаћете прилику да се бавите и неким другим, знатно сложенијим функцијама, за које се слободно може рећи да на њима, у извесном смислу, почива математика.

6.1. Линеарна функција $y = kx + n$

Раније смо се срели са појмовима **зависних величина и директне пропорционалности.** За две величине x и y каже се да су зависне ако се променом вредности једне мења и вредност друге величине. А за зависне величине x и y говорили смо да су директно пропорционалне када постоји реалан број k ($k \neq 0$) такав да је

$$\boldsymbol{y = k \cdot x}.$$

Број k је коефицијент директне пропорционалности.

пример 1

Мила продаје поморанџе на градској пијаци. Цена тог воћа по килограму је 75 динара. Ако са x обележимо масу поморанџи, а са y њихову цену, јасно је да се онда, користећи формулу $y = 75 \cdot x$, може израчунати цена произвољне количине поморанџи коју купци желе да купе. Па тако, Јован за 3 kg треба да плати $75 \cdot 3 = 225$ динара, а Сара за 5 kg треба да плати $75 \cdot 5 = 375$ динара.

Нека су a и b реални бројеви, такви да је $a \neq 0$, тада за израз $ax + b$ кажемо да је линеарни израз по промењивој x.

пример 2

Изрази $2x-7, \frac{1}{3}x+8$ и $\sqrt{2}x+10$ су линеарни изрази, док изрази $\sqrt{2x}-3, \frac{2}{x}+5$ и 5 то нису.

За $a = 0$ израз $ax + b$ постаје константа b.

пример 3

У следећој таблици дате су бројевне вредности два линеарна израза за различите вредности промењиве x.

x	-2	-1	0	1	2	3
$3x$	-6	-3	0	3	6	9
$-2x+3$	7	5	3	1	-1	-3

Правило по коме се реалном броју x придружује реалан број y такав да је

$$y = kx + n,$$

где су n и k неки дати реални бројеви, назива се **линеарном функцијом.**

При таквом придруживању променљиву x зовемо **независном променљивом** или само променљивом. Док променљиву y, с обзиром на то да се њена вредност мења у зависности од вредности променљиве x, називамо **зависном променљивом.**

Број k зовемо **коефицијент**, а n је **слободан члан** линеарне функције.

Често се вредност зависно променљиве y обележава са $y = f(x)$, а одговарајућа функција са $f(x) = kx + n$.

пример 4

Линеарна функција чији је коефицијент $k = 2$, а слободан члан $n = -7$ је $y = 2x - 7$, а линеарна функција чије је коефицијент $k = \frac{1}{7}$ и слободан члан $n = \frac{2}{9}$ је $y = \frac{1}{7}x + \frac{2}{9}$.

пример 5

Вредност функције $y = 3x - 7$ за $x = 1$ је

$y = 3 \cdot 1 - 7, \quad y = -4,$

а за $x = 0$ је

$y = 3 \cdot 0 - 7, \quad y = -7.$

пример 6

За функцију $f(x) = -2x + 1$ њена вредност за $x = -2$ једнака је

$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 1, f(-2) = 5,$

а за $x = 2$ је

$f(2) = -2 \cdot 2 + 1, \quad f(2) = -3.$

пример 7

Запиши линеарну функцију којом се изражава обим правилног шестоугла странице a.

Решење:

Обим правилног шестоугла једнак је шестострукој вредности дужине једне странице, односно $O = 6a$.

ЗАДАЦИ

1. Допуни следећу табелу, како је започето.

Функција	$y = 2x - 30$	$y = -x$			
Коефицијент	2		3	–3	1
Слободан члан	–30		200	–200	0

2. Дата је функција $y = -2x + 3$. Допуни табелу као што је започето.

x	1	2		–1			100	$\frac{1}{2}$
y	1		3		– 9	203		

3. Запиши линеарну функцију чији је:

а) коефицијент $k = 2$, а слободан члан $n = -\frac{3}{5}$;

б) коефицијент $k = -3$, а слободан члан $n = 0{,}5$;

в) коефицијент k реципрочна вредност најмањег простог броја, а слободан члан је једнак 0.

4. У табели су дате вредности две зависне промењљиве a и b.

a	1	2	3	4
b	2	–3	–8	–13

Којом од следећих линеарних функција се може изразити та зависност:

а) $b = -7a + 5$; **б)** $b = -5a + 7$; **в)** $b = 3a - 8$; **г)** $b = -5a - 7$?

5. Дата је функција $f(x) = 0{,}5x + 2$. Колико је $f(2)$, а колико $f(-2)$?

6. Дата је линеарна функција $f(x) = 2x - 2 \cdot (1 - 5x) + 1$. Одреди њен коефицијент и слободан члан.

7. Одреди линеарну функцију $f(x) = kx + n$ за коју је $f(0) = 0$ и $f(2) = 6$.

8. а) Запиши обим квадрата у функцији дужине његове странице.

б) Запиши страницу квадрата у функцији његовог обима.

в) Да ли су добијене функције линеарне?

9. Изрази обим једнакокраког трапеза у зависности од дужине крака c, ако су дужине основица једнаке $a = 7$ cm и $b = 3$ cm.

10. Линеарне функције су приказане табеларно:

а)

x	4	6	10	16	24
y	5	7	11	17	25

б)

x	0	1	2	3	4
y	–5	–3	–1	1	3

Запиши их у облику $y = kx + n$.

11. Дата је функција $y = 3x + 7$. За коју вредност променљиве x је $y = -13$?

12. Дата је функција $y = -2x + 5$. За коју вредност променљиве x је:

а) $y = -5$, **б)** $y = 1$, **в)** $y = 0{,}5$; **г)** $y = 10$?

Примери линеарних функција 6.2.

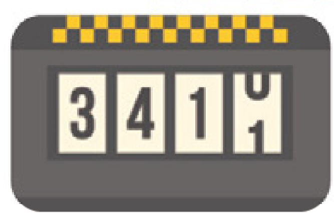
У свакодневном животу је често, ради лакшег сагледавања и решавања, погодно неке проблеме или ситуације моделирати математичким језиком. Бројни су примери у којима се одређене зависности могу представити линеарном функцијом, а неке од њих ћемо приказати у овој лекцији.

пример 1

Бициклиста се креће равномерном брзином од $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Дужина пута s који он пређе за време t (у секундама) једнака је $s = 10\,t$. Тако он за 1 min = 60 секунди пређе пут $s = 600$ m, а за 1 h = 3 600 секунди пређе пут дужине $s = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3\,600$ s, односно $s = 36\,000$ m = 36 km.

пример 2

Приликом вожње таксијем, путник најчешће плаћа износ који се формира на основу збира тзв. „стартног износа" и цене на основу пређених километара. Тако, на пример, у такси удружењу „Мат-такси", „стартни износ" је 50 динара, а сваки пређени километар се наплаћује по додатних 65 динара.



Сарин тата је јуче на посао отишао користећи услуге „Мат-таксија". С обзиром на то да од куће до посла има 7 километара, колико је он платио вожњу?

Решење:

Приметимо да, ако са s обележимо пређени пут (у километрима), а са c цену вожње (у динарима), онда је $c = 50 + 65 \cdot s$.

С обзиром на то да се Сарин тата возио 7 километара, цена његове вожње била је

$c = 50 + 65 \cdot 7 = 505$ динара.

пример 3

Из физике је познато да се температура у Келвиновим степенима (K) израчунава тако што се температури израженој у Целзијусовим степенима (C) дода 273, тј. помоћу функције $f(x) = x + 273$. Тако, на пример, температура од 10°C једнака је 283 K, док је температура од –3°C једнака 270 K.

пример 4

Свећа дужине 30 cm изгори 2 mm за један минут. Дужина свеће изражена у милиметрима, након паљења пламена, може се израчунати по формули $y = 300 - 2x$, где је x број минута горења свеће. Тако ће, после 15 минута, дужина свеће бити једнака $y = 300 - 2 \cdot 15$, $y = 270$ mm, а после 2 сата њена дужина ће бити једнака $y = 300 - 2 \cdot 120$, $y = 60$ mm.

пример 5

Сара је на познатом београдском излетишту Ада Циганлија изнајмила ролере. Цена изнајмљивања је 200 динара, уз додатних 50 динара за сваки започети сат.

а) Табеларно прикажи зависност између цене изнајмљивања ролера (у динарима) и времена изнајмљивања (у сатима);

б) Прикажи ту зависност линеарном функцијом цене (y) од времена (x).

Решење:

а) Цену употребе ролера рачунамо тако што број сати коришћења ролера помножимо са 50 и додамо 200 динара. У наредној табели су приказане цене за изнајмљивање ролера до пет сати.

Време изнајмљивања ролера (сат)	1	2	3	4	5
Цена изнајмљивања (динар)	250	300	350	400	450

б) Користећи добијене податке, закључујемо да је $y = 50x + 200$.

ЗАДАЦИ

13. Приход једне компаније која продаје кревете рачуна се по формули $y = 18\,000x$, где је x број продатих кревета.

а) Колики је приход од 15 продатих кревета?

б) Колико кревета је продато, ако је приход био 522 000 динара?

14. Број становника у једном селу се повећавао линеарно. На почетку 2010. године, то село је имало 3 750 становника, док је 2015. било 4 250 становника. Имајући то у виду, Пера тврди да се број становника тог села може одредити по формули $y = 3\,750 + 100t$, где је t број година протеклих од 2010. године. Да ли је Пера у праву?

15. Ваздушни притисак на нивоу мора је 1 013 милибара и опада приближно за 1 милибар на сваких 10 метара надморске висине.

а) Одреди функцију која показује надморску висину *nh* у зависности од ваздушног притиска *p* који је очитан са барометра.

б) Одреди колика је приближно надморска висина, ако барометар показује 982 милибара?

16. Чланарина у једној библиотеци износи 1 250 динара, а у њој је могуће купити и књиге. Цена сваке књиге је 600 динара, а Даница их је купила *m* и уз то платила чланарину. Запиши формулу којом се може изразити износ који је Даница платила библиотеци.

17. Неки аутомобил троши један литар бензина на сваких 15 пређених километара пута.

а) Изрази функцијом потрошњу бензина *p* (у литрима), у зависности од пређеног пута *s* (у километрима).

б) Колико литара бензина се потроши након 180 пређених километара?

в) Колико километара може прећи тај аутомобил, ако су у његовом резервоару 32 литре бензина?

18. Ширина једног правоугаоника је *a*, а дужина 3 cm. Његов обим се може изразити формулом:

а) $O = a + 3$; **б)** $O = 2a + 3$; **в)** $O = 2a + 6$; **г)** $O = 2a - 6$.

19. Базен се пуни пумпом која у току једног минута упумпа 100 литара воде.

а) Колико литара воде има у базену након 2 сата пуњења?

б) Ако је за комплетно пуњење базена потребно 200 тона воде, за које време би он био напуњен?

20. У табели је дата зависност цене огрлице од броја употребљених дијаманата за њену израду. Ако је та зависност изражена линеарном функцијом, која од наведених функција је одређује?

Број дијаманата	2	4	6	8
Цена огрлице	700	950	1200	1450

а) $f(x) = 550 + 75x$; **б)** $f(x) = 500 + 100x$; **в)** $f(x) = 450 + 125x$;
г) $f(x) = 600 + 50x$; **д)** $f(x) = 200 + 150x$.

21. Правила рачунања поена на једном пријемном испиту дата су у табели:

Тачан одговор	Нетачан одговор	Без одговора
+5 поена	–1 поен	0 поена

Ако ученик на тесту од 50 питања на 9 није одговорио, а погрешио је у *x* питања, која од следећих функција рачуна његов број поена на тесту?

а) $f(x) = 250 - x$; **б)** $f(x) = 205 - x$; **в)** $f(x) = 250 - 9x$;
г) $f(x) = 205 - 6x$; **д)** $f(x) = 250 - 6x$.

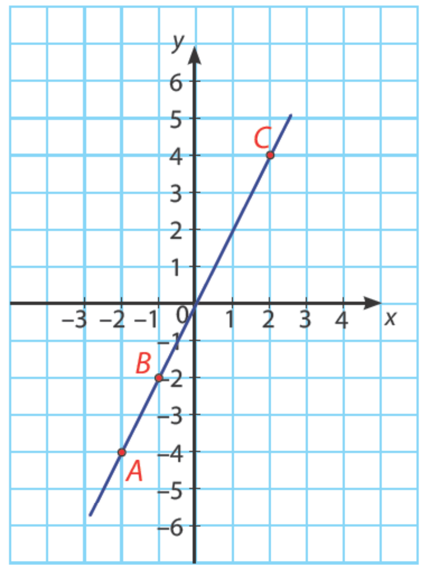
6.3. График линеарне функције

У седмом разреду упознали смо се са директно пропорционалним величинама и уочили да се свакој таквој зависности може придружити график који је права линија.

пример 1

За величине x и y задате табеларно одговарајући график зависности приказан је илустрацијом.

x	-2	-1	0	$\sqrt{2}$	2	$3{,}5$
y	-4	-2	0	$2\sqrt{2}$	4	7



На графику су приказане и три тачке које му припадају $A(-2, -4)$, $B(-1, -2)$ и $C(2, 4)$.

У овом тексту, уколико не буде другачије поменуто, независна променљива узима све вредности из скупа реалних бројева.

Подсетимо се, такође, да две бројевне праве које се секу под правим углом образују **правоугли координатни систем.** Праву x називамо ***x*-оса** или **апсцисна оса**, а праву y, тј. ***y*-осу** зовемо још и **ординатна оса**. Пресек тих координатних оса је **координатни почетак.**

График линеарне функције $y = kx + n$ је скуп свих тачака (x, y) у координатној равни, чије координате задовољавају једнакост $y = kx + n$.

пример 2

Користећи претходну дефиницију, проверимо да ли тачке $A(2, 5)$ и $B(-1, 4)$ припадају графику функције $y = 3x - 1$.

Решење:

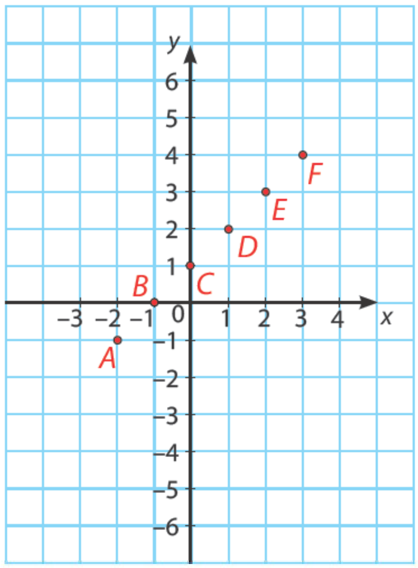
С обзиром на то да је једнакост $5 = 3 \cdot 2 - 1$ тачна, а да једнакост $4 = 3 \cdot (-1) + 1$ није тачна, закључујемо да тачка A припада, а тачка B не припада графику дате функције.

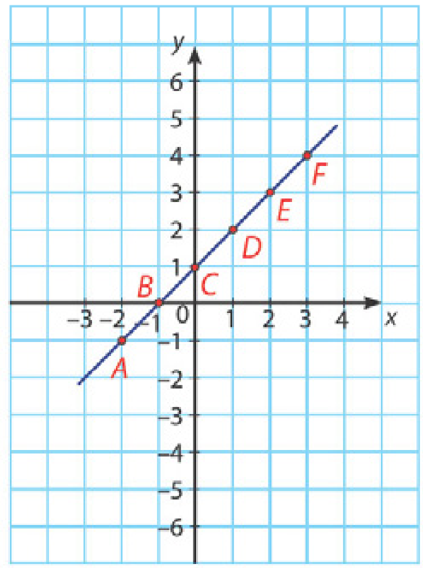
пример 3

Прикажимо график функције $y = x + 1$. Следећа таблица приказује неколико вредности променљиве x и одговарајућих вредности променљиве y, добијених придруживањем задатим одговарајућом формулом $y = x + 1$.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4

На левој слици су приказане одговарајуће тачке, а на десној права која их садржи. Та права управо представља график наведене функције.





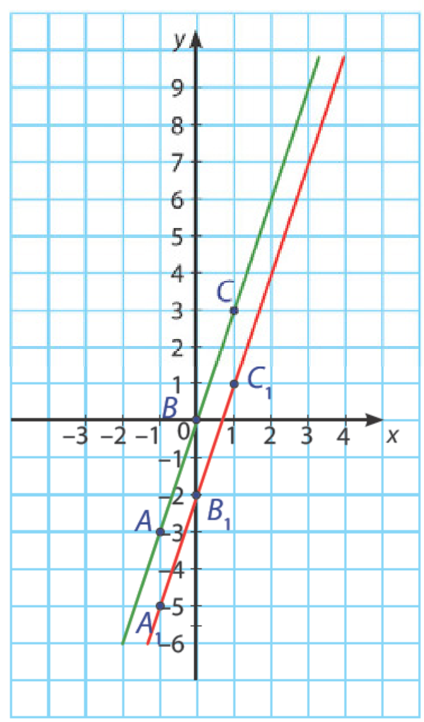
пример 4

Прикажимо графике функција $y = 3x$ и $y = 3x - 2$ у истом координатном систему.

Решење:

Представимо најпре ове функције табеларно, за неке вредности променљиве x.

x	-1	0	2	3
$y = 3x$	-3	0	6	9
$y = 3x - 2$	-5	-2	4	7



Графици ових функција су приказани на наредној слици. Такође, на слици су истакнуте и тачке $A(-1, -3)$, $B(0, 0)$ и $C(1, 3)$ које припадају графику прве, као и тачке $A_1(-1, -5)$, $B_1(0, -2)$ и $C_1(1, 1)$ које припадају графику друге функције.

Примећујемо да су графици ових функција међусобно паралелне праве, као и да су вредности функције $y = 3x - 2$ мање за 2 у односу на одговарајуће вредности функције $y = 3x$. Графички, то се манифестује у померању графика на доле за 2 (због слободног члана једнаког -2) за исте вредности променљиве x.

На основу претходно изложених примера закључујемо да је график линеарне функције права.

пример 5

Одредити две произвољне тачке које припадају графику функције $y = 3x - 7$.

Решење:

Узмимо произвољне вредности променљиве x и израчунајмо вредност функције за тако одабране бројеве. Ако је, на пример $x = 1$, тада је $y = 3 \cdot 1 - 7 = -4$, па је одговарајућа тачка која припада графику $A(1, -4)$. Ако је $x = 5$, тада је $y = 3 \cdot 5 - 7 = 8$, па је одговарајућа тачка која припада графику $B(5, 8)$.

ЦРТАЊЕ ГРАФИКА ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

С обзиром на то да је график линеарне функције права, закључујемо да је за цртање графика линеарне функције довољно одредити две тачке које припадају графику.

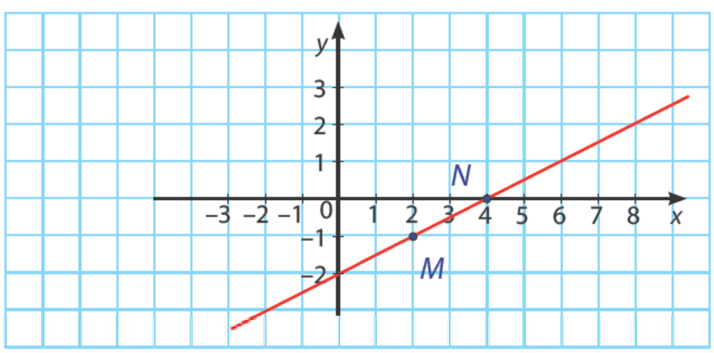
пример 6

Прикажимо график функције $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Решење:

Слично претходном примеру, одредимо две произвољне тачке које припадају овом графику. Приметимо да ће, на пример за $x = 2$ бити $y = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$, а за $x = 4$ биће $y = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 = 0$. Дакле, тачке $M(2, -1)$ и $N(4, 0)$ припадају графику дате функције.

Означавањем те две тачке у координатном систему, а затим и цртањем праве која их садржи, добијамо график функције приказан на слици.



Често се цртање графика линеарне функције једноставно изводи одређивањем пресечних тачака графика са координатним осама. Тако се за функцију $y = kx + n$ могу одредити пресеци њеног графика са осама на следећи начин:

Пресек са x-осом. Тачка пресека са том осом имаће ординату (y-координату) једнаку 0 па се тај пресек једноставно одређује убацивањем вредности $y = 0$ у једначину $y = kx + n$. Дакле, из $0 = kx + n$ добијамо $x = -\dfrac{n}{k}$, па је одговарајућа тачка пресека $(-\dfrac{n}{k}, 0)$.
Пресек са y-осом. Тачка пресека са том осом имаће апсцису (x-координату) једнаку 0, па се тај пресек једноставно одређује убацивањем вредности $x = 0$ у једначину $y = kx + n$. Дакле, из $y = k \cdot 0 + n$ добијамо $y = n$, па је одговарајућа тачка пресека $(0, n)$.

пример 7

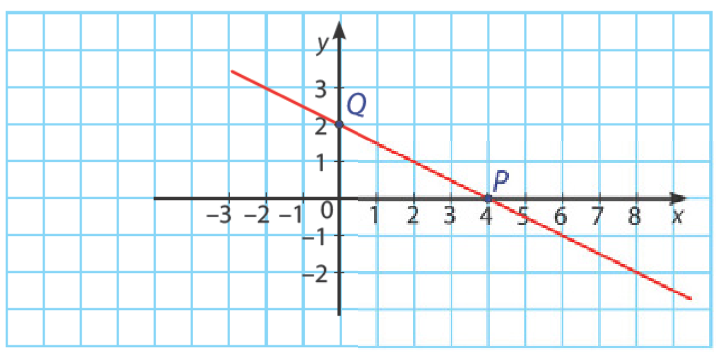
Прикажимо график функције $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Решење:

Одредимо најпре пресек тог графика са x-осом. За $y = 0$ је $0 = -\dfrac{1}{2}x + 2$. Та једначина еквивалентна је са једначином $x = 4$, па је одговарајућа тачка $P(4, 0)$.

Одредимо затим пресек са y-осом. За $x = 0$ је $y = -\dfrac{1}{2}x + 2 = 2$, па је одговарајућа пресечна тачка $Q(0, 2)$.

Одговарајући график функције приказан је на слици.



ЗАДАЦИ

22. Да ли тачка $A(1, 2)$ припада графику функције $y = 3x - 1$?

23. Које од тачака $M(0, 1)$, $N(-1, 2)$, $P(-2, 3)$ и $Q(-3, 4)$ припадају, а које не припадају графику функције $f(x) = -x + 1$?

24. Нацртај график функције $y = 2x + 3$. Да ли том графику припада тачка $T(121, 245)$?

25. За које $y \in R$ тачка $T(-3, y)$ припада графику функције $y = 11x + 20$?

26. За које $x \in R$ тачка $T\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ припада графику функције $y = 2x - \dfrac{1}{2}$?

27. Одреди апсцису тачке $T(x, 1)$ која припада графику функције $f(x) = 2x - 7$.

28. Одреди ординату тачке $V(-2, y)$ која припада графику функције $f(x) = -3x + 10$.

29. Одреди две произвољне тачке A и B које припадају графику функције:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = \frac{2}{3}x + 5$; в) $y = -\frac{1}{3}x + 4$; г) $y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{2}$.

30. Одреди тачке пресека дате функције са координатним осама:

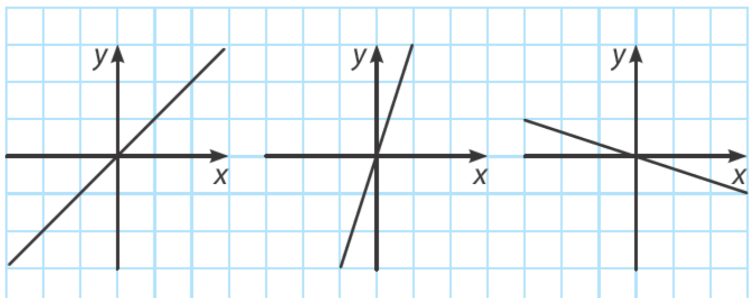
а) $y = x - 3$; б) $y = -2x + 4$; в) $y = 10x + 20$; г) $y = -5x$.

31. Нацртај график функције:

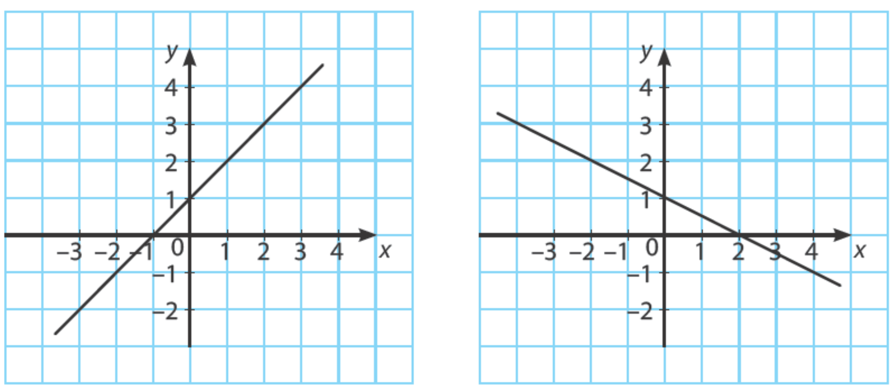
а) $y = 4x$; б) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = -2x + 5$;

д) $y = -3x + \frac{1}{2}$; ђ) $y = -4x + \frac{5}{2}$; е) $y = 10x - 7$; ж) $y = \frac{5}{2}x - 0{,}4$.

32. Одреди функције чији су графици дати на сликама. (Дата мрежа је квадратна.)



33. Одреди функције чији су графици дати на сликама.



34. Одреди за које $a \in R$ график линеарне функције $y = \left(\frac{a}{2} - 5\right)x + 2a - 1$ садржи координатни почетак.

35. Да ли график дате функције садржи координатни почетак?

а) $f(x) = 2\,000x$; б) $f(x) = 100x - 100$?

36. Одреди линеарну функцију $y = kx + n$ чији график садржи тачке $A(0, 5)$ и $B(-4, 0)$.

37. Одреди линеарну функцију $y = kx + n$ чији график садржи тачке $A(0, 3)$ и $B(1, 2)$.

38. Одреди линеарну функцију чији је коефицијент $k = 4$, а њен график сече y-осу у тачки 5.

39. Одреди линеарну функцију чији је коефицијент $k = -1$, а њен график сече y-осу у тачки -3.

Неке карактеристичне линеарне функције и њихови графици 6.4.

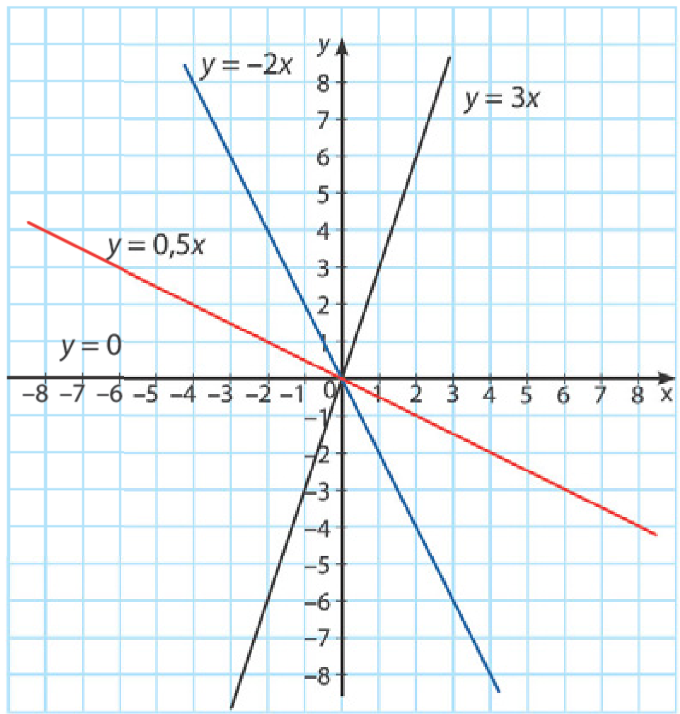
Циљ ове лекције јесте да се прикажу неки међусобни односи графика у координатној равни *xOy* и на основу њихових положаја изведу одговарајући закључци. За то ће од користи бити знања стечена у претходним лекцијама.

пример 1

Увери се да график линеарне функције $y = kx$ (k је неки реалан број) садржи координатни почетак за ма коју вредност реалног броја k.

Решење:

Како је у функцији $y = kx + n$, коефицијент $n = 0$, то је за ма коју вредност реалног броја k, за $x = 0$ и $y = 0$. То значи да свака од правих $y = kx$ садржи координатни почетак, тј. тачку (0, 0).

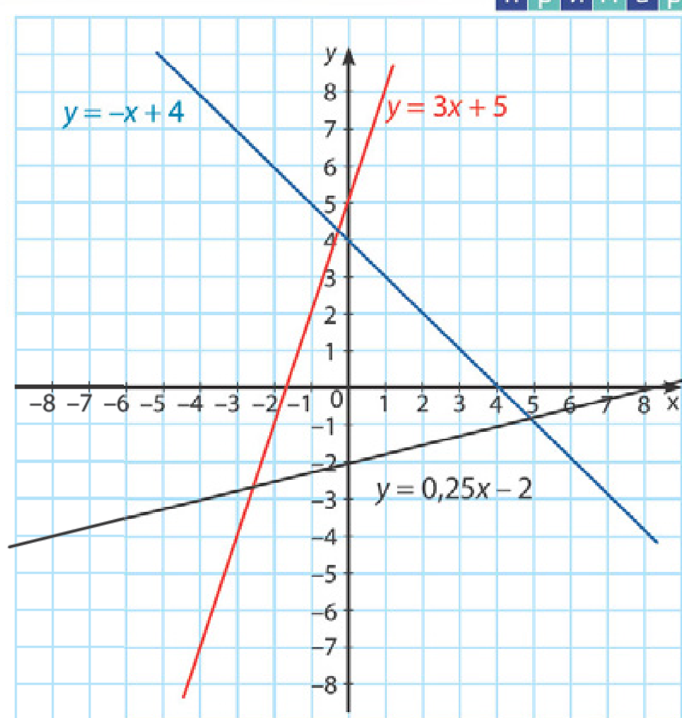


пример 2

Дате су линеарне функције $y = 3x + 5$, $y = -x + 4$ и $y = 0{,}25x - 2$. Какав је међусобни положај графика ових функција?

Решење:

Анализом графика датих функција долазимо до закључка да све три функције имају различите коефицијенте и да се њихови графици (праве) секу.

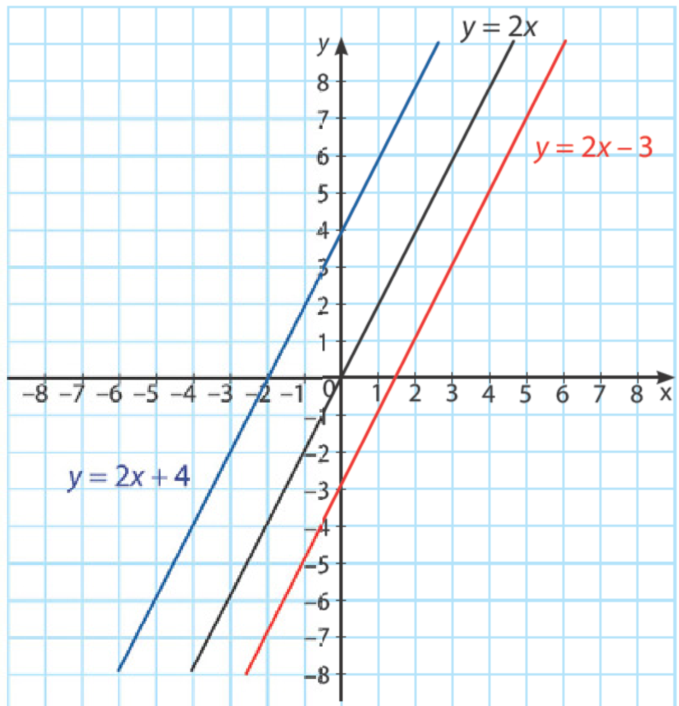


пример 3

Дате су линеарне функције $y = 2x - 3$, $y = 2x$ и $y = 2x + 4$. Какав је међусобни положај графика ових функција?

Решење:

Анализом графика датих функција долазимо до закључка да све три функције имају коефицијент једнак 2 и да су њихови графици паралелне праве.



занимљивост

На интернету се претраживањем по термину *GeoGebra* може добити и бесплатан софтвер *ГеоГебра* који има верзију на српском језику и који је погодан за цртање линеарних (и других) функција.

Разматрањем случајева изложених у претходним примерима може се доћи до следећих закључака:

Графици линеарних функција $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ се секу ако је $k_1 \neq k_2$.
Графици линеарних функција $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ су паралелни ако је $k_1 = k_2$.

пример 4

Дате су линеарне функције $y = -5$, $y = 3$ и $y = x + 1$. Какав је међусобни положај графика ових функција?

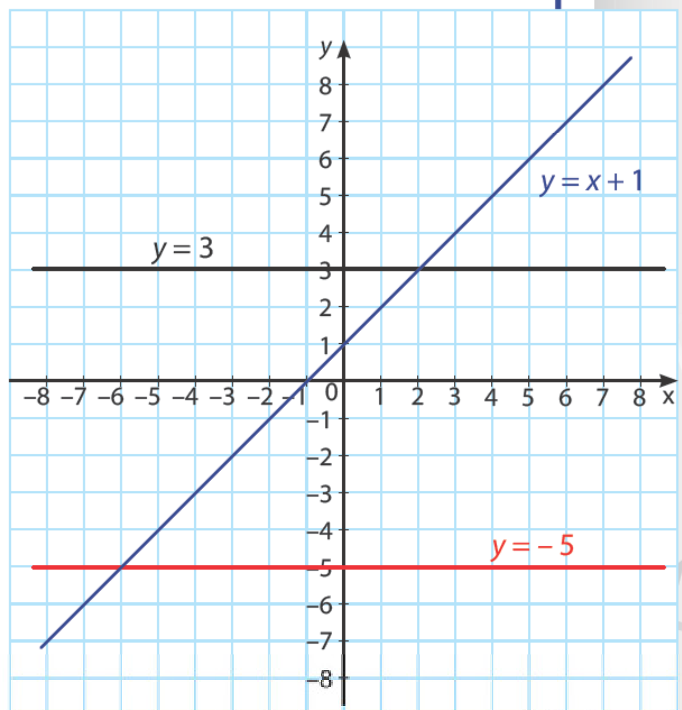
Решење:

Функција $y = 0 \cdot x - 5$, тј. $y = -5$, за ма коју вредност променљиве x, узима вредност $y = -5$, па график те функције чине тачке $(-7, -5)$, $(0, -5)$, $(3, -5)$... Права која садржи наведене тачке паралелна је x-оси.

Функција $y = 0 \cdot x + 3$, $y = 3$, за ма коју вредност променљиве x, узима вредност $y = 3$, па график те функције чине тачке $(-6, 3)$, $(0, 3)$, $(4, 3)$... Права која садржи наведене тачке паралелна је x-оси.

Графици функција $y = -5$ и $y = 3$ јесу међусобно паралелне праве (обе имају коефицијент једнак 0) и паралелне су са x-осом.

График линеарне функције $y = x + 1$ је права која сече обе већ уочене праве, што се могло и наслутити због различитих коефицијената ($0 \neq 1$).



Из овог примера се може закључити:

График функције $y = 0 \cdot x + n$, $y = n$ јесте права која је паралелна са x-осом.

Функцију $y = n$, где је n неки реалан број, зваћемо константном функцијом.

У претходном разматрању уочили смо да график функција $y = n$, у xOy координатном систему представља праву паралелну са x-осом.

пример 5

Одреди реалан број a такав да су графици функција $y = 3x - 7$ и $y = (a - 2)x + 4$:
а) паралелни; б) секу се.
Могу ли се графици датих функција поклапати?
За коју вредност реалног броја a је график функције $y = (a - 2)x + 5$ паралелан са x-осом?

Решење:

а) Да би графици двеју линеарних функција били паралелни, функције морају имати једнаке коефицијенте, што значи да је $a - 2 = 3$, тј. $a = 5$ и тада друга функција постаје $y = 3x + 4$.

б) Графици тих функција се секу ако је $a - 2 \neq 3$, тј. $a \neq 5$.

Графици датих функција се не могу поклапати јер график функције $y = 3x - 7$, на пример, садржи тачку $(0, -7)$, а график функције $y = 3x + 4$ тачку $(0, 4)$, па y-осу секу у различитим тачкама.

График функције $y = (a - 2)x + 5$ паралелан је са x-осом, ако је $a - 2 = 0$, тј. ако је $a = 2$ и $y = 5$.

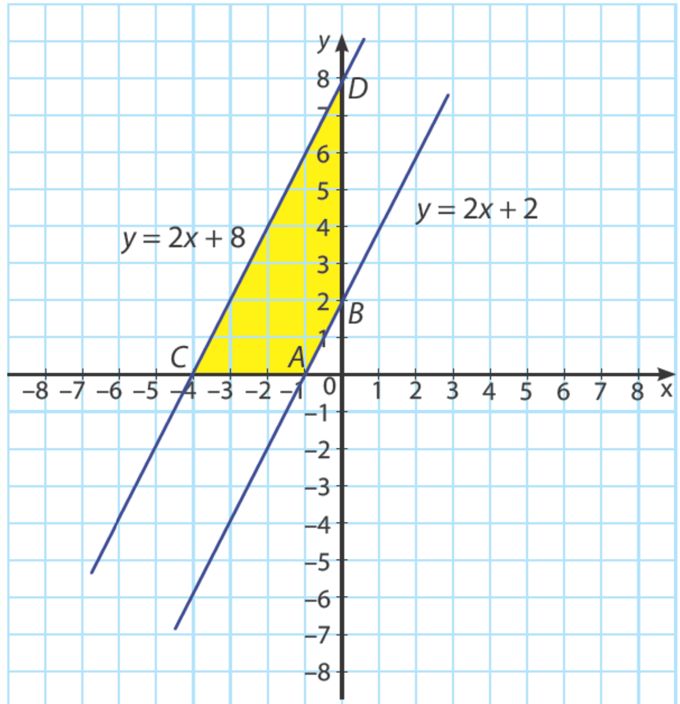
пример 6

Дате су линеарне функције $y = 2x + 2$ и $y = 2x + 8$. Одреди површину четвороугла који одређују координатне осе и графици датих функција. Којој групи четвороуглова припада добијени четвороугао?

Решење:

Како графици функција $y = 2x + 2$ и $y = 2x + 8$ имају коефицијент једнак 2, то су они паралелни, па је добијени четвороугао трапез, који је приказан на илустрацији.

Површина трапеза се добија када се од површине троугла OCD одузме површина троугла OAB и једнака је $P = \frac{4 \cdot 8}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2}$, $P = 15$.



ЗАДАЦИ

40. Дате су линеарне функције $y = -3x + 1$, $y = 4$, $y = -3x - 2$ и $y = -3$. Нацртај графике датих функција и одреди њихов међусобни положај.

41. Међу датим линеарним функцијама повежи парове оних чији су графици паралелни.

$y = -2x$	$y = x + 7$
$y = \frac{1}{2}x - 3$	$y = \frac{1}{2}x + 7$
$y = x$	$y = \frac{1}{10}x - 3$
$y = 0{,}1x + 1$	$y = -2x + 3$

42. Одредити реалан број k тако да графици функција $y = kx + 11$ и $y = 5x - 7$ буду паралелни.

43. Нацртај графике функција $y = -4$ и $y = 8$ и одреди колико је растојање између њих.

44. Одреди реалан број k ($k \neq 0$) тако да графици функција $ky = 2kx + 4k$ и $y = kx - 3$ буду паралелне праве.

45. Одреди реалне бројеве k ($k \neq 0$), a и b такве да се графици функција $3ky = kx - 6k$ и $y = ax + b$ поклапају.

46. Одреди линеарну функцију чији график садржи тачку (0, 0) и паралелан је са графиком функције $y = \frac{2}{3}x - 5$.

47. Одреди линеарну функцију чији график садржи тачку (0, 3) и паралелан је са графиком функције $y = 2x - 5$.

48. Да ли је график линеарне функције који садржи тачке (1, 0) и (0, 4) паралелан са графиком линеарне функције $y = -4x$?

49. Одреди реалан број m за који су графици функција $y = -2x + 5$ и $y = (m - 1)x - (m - 2)$ паралелни.

50. Одреди реалан број l за који су графици функција $y = (3 - l)x + 1$ и $y = (2l + 1)x - (l + 3)$ паралелни.

51. Одреди $k \in R$ тако да график функције $y = (3k-1)x + \left(k + 2\frac{1}{2}\right)$ сече y-осу у тачки чија је ордината -4.

52. Израчунај обим троугла који график функције $y = -\frac{3}{4}x + 3$ гради са координатним осама, ако је јединично одстојање једнако:

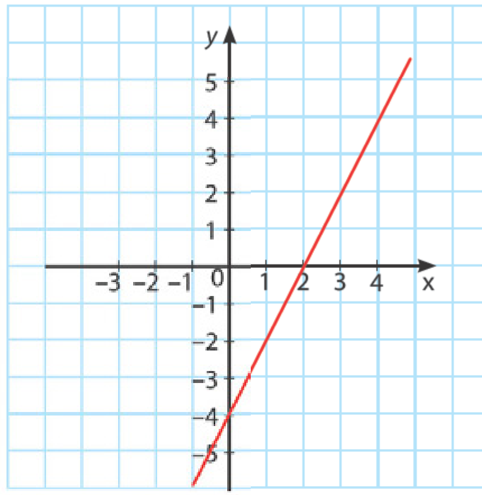
а) 1 cm; б) 2 cm.

53. Израчунај површину четвороугла који одређују графици функција $y = -2x + 6$ и $y = 3$ са координатним осама.

6.5. Нуле и знак линеарне функције

НУЛА ФУНКЦИЈЕ

На следећој слици је приказан график функције $f(x) = 2x - 4$. Уочавамо да је тачка $T(2, 0)$ пресечна тачка графика и x-осе. У тој тачки је $f(2) = 0$.



Вредност независне променљиве x за коју зависно променљива y узима вредност $y = 0$, називамо нулом функције.

За дату функцију $f(x) = 2x - 4$, нула је број $x = 2$.

пример 1

Одреди нулу функције $y = \frac{1}{3}x + 6$.

Решење:

Када узмемо да је $y = 0$, добија се једначина $0 = \frac{1}{3}x + 6$. Одатле је $\frac{1}{3}x = -6$, односно $x = -18$.

пример 2

За који реалан број a је $x = 7$ нула функције $y = (a - 2)x - 21$?

Решење:

Да би број $x = 7$ био нула функције $y = (a - 2)x - 21$ мора важити $0 = (a - 2) \cdot 7 - 21$.

Одатле је $7a - 14 = 21$, односно $a = 5$.

ЗНАК ФУНКЦИЈЕ

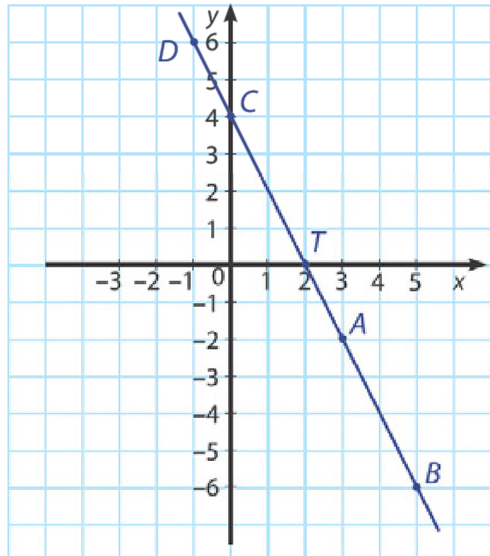
Испитивање знака линеарне функције $y = kx + n$ представља одређивање вредности променљиве x за које су вредности функције y позитивне, односно, за које су негативне.

пример 4

Уочавамо да график функције $y = -2x + 4$ сече x-осу у тачки $T(2, 0)$, као и да се за све вредности променљиве x које су мање од 2, налази изнад x-осе, а за вредности променљиве x које су веће од 2, график је испод x-осе.

Тако је, на пример, $f(3) = -2$, $f(5) = -6$, а $f(0) = 4$ и $f(-1) = 6$.

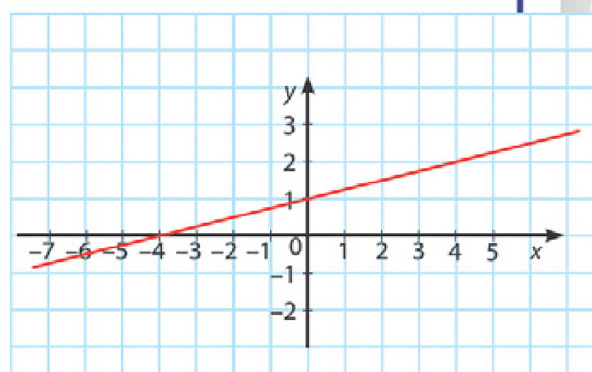
За све $x < 2$ функција је позитивна ($y > 0$), а за $x > 2$ је негативна ($y < 0$).



пример 5

За функцију $y = \frac{1}{4}x + 1$, када је $y = 0$ онда је $x = -4$.

Примећујемо да $f(0) = 1$ и $f(-6) = -\frac{1}{2}$, као и да за све $x > -4$ важи $y > 0$, а за $x < -4$ је $y < 0$.



ЗАДАЦИ

54. Одреди нулу линеарне функције:

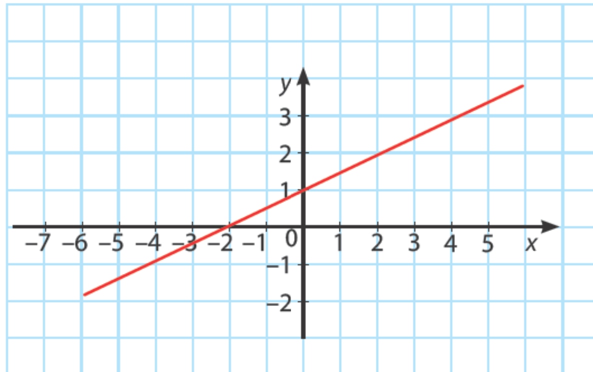
а) $y = 12x - \frac{1}{2}$; б) $y = -40x + 70$; в) $y = -25x$.

55. Одреди нулу линеарне функције:

а) $y = 0{,}1x - \frac{1}{2}$; б) $y = -0{,}6x + 4$; в) $y = 0{,}01x + 2$.

56. Нула функције $y = 10x - n$ је $x = 2$. Одреди n.

57. Одреди нулу и знак линеарне функције чији је график дат на следећој слици.



58. Испитај знак линеарне функције:

а) $y = 3x - 7$; **б)** $y=\frac{1}{2}x-2$; **в)** $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}$.

59. Испитај знак линеарне функције:

а) $y = -3x + 5$; **б)** $y = -10x + 50$; **в)** $y = 4x$; **г)** $y = 2$.

60. За које вредности независне променљиве x су вредности функције $y = 3x + 2$ позитивне?

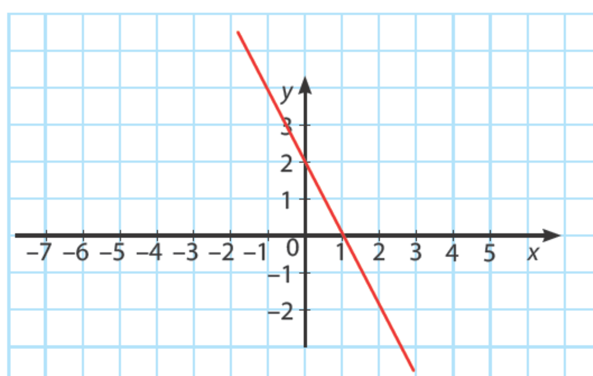
61. За које вредности независне променљиве x су вредности функције $y = 5x - 2$ негативне?

62. На слици је дат график једне линеарне функције. Која од датих тврдњи је тачна?

а) $y > 0$ за све $x < 2$;

б) $y > 0$ за све $x < 1$;

в) $y < 0$ за све $x < 1$.



63. Одреди реалан број m такав да функција $f(x) = (2m - 3)x + 4m - 1$ има нулу за $x = 1$.

64. Ако график функције $y = kx + n$ сече y-осу у тачки $T(0, -3)$ и ако је $x = 4$ њена нула, одреди ту функцију.

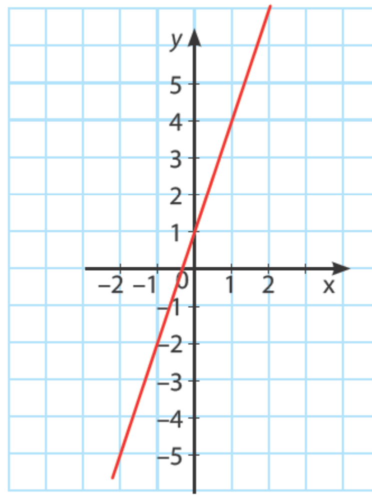
65. Ако је $k = -2$ коефицијент линеарне функције $f(x) = kx + n$ и важи $f(-2) = 5$, нацртај график те функције и одреди њен знак.

Раст и опадање линеарне функције 6.6.

пример 1

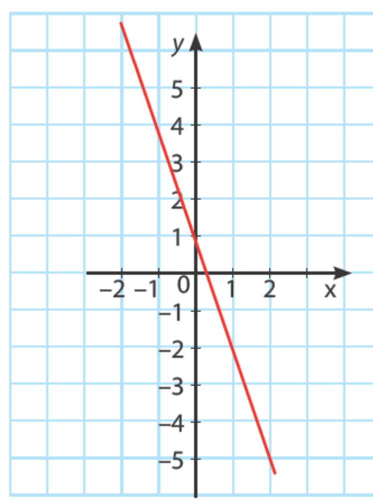
На следећим илустрацијама графички и табеларно су приказане линеарне функције $y = 3x + 1$ и $y = -3x + 1$.

x	-1	0	1	2
$y = 3x + 1$	-2	1	4	7



Примећујемо да се код линеарне функције $y = 3x + 1$, при повећању вредности независно променљиве x, повећавају и одговарајуће вредности зависно променљиве y.

x	-1	0	1	2
$y = -3x + 1$	4	1	-2	-5



Примећујемо да се код линеарне функције $y = -3x + 1$, при повећању вредности независно променљиве x смањују одговарајуће вредности зависно променљиве y.

У првом случају кажемо да је функција растућа, а у другом случају да је опадајућа.

Општије, следећи низ правила нам говори када је линеарна функција растућа, а када је опадајућа.

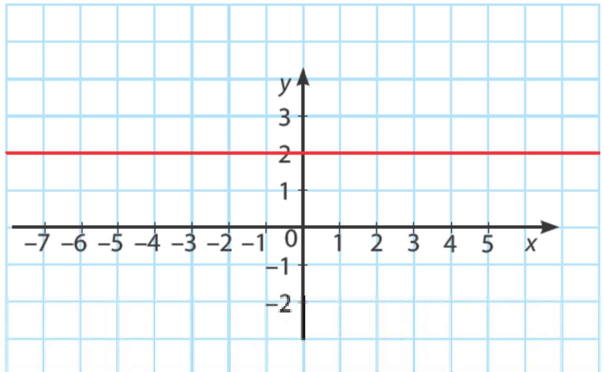
Ако је коефицијент линеарне функције $y = kx + n$ позитиван, тј. $k > 0$, та функција је растућа.

Ако је коефицијент линеарне функције $= kx + n$ негативан, тј. $k < 0$, та функција је опадајућа.

Ако за коефицијент линеарне функције $y = kx + n$ важи да је $k = 0$, онда та функција није ни растућа, ни опадајућа, већ је константна.

пример 2

На следећој слици је приказан график функције $y = 2$.



Овакве функције нису ни растуће, ни опадајуће.

ЗАДАЦИ

66. Допуни табелу, тако да за дате функције одредиш која је растућа, а која опадајућа.

Функција	Р (растућа), О (опадајућа)
$y = 7x - 5$	
$y = -7x + 5$	
$y = \frac{1}{100}x + 1$	
$y = -\frac{1}{2}x$	
$y = 0{,}5x - 2$	

67. Испитај да ли су следеће линеарне функције растуће или опадајуће:

а) $y = \frac{2}{3}x - 5$; **б)** $y = -\frac{7}{3}x - 1$; **в)** $y = 10x - 5$; **г)** $y = -0{,}4x + \frac{2}{7}$; **д)** $y = \sqrt{2}x + 2$

68. Запиши бар две растуће линеарне функције.

69. Запиши бар две опадајуће линеарне функције.

70. Дато је неколико линеарних функција: $y = -x, y = -3x, y = \frac{1}{2}x + 2, y = 0{,}5x + 4$, $y = 12x - 7, y = -13x + 5$, $y = -3, y = -3x + 2$, $y = 2\,022$.

Ако је r број растућих, а n број опадајућих функција на том списку, колико је $r - n$?

71. Одреди за коју вредност реалног броја a је функција $y=\left(3-\frac{a}{2}\right)x+5$ растућа.

72. Одреди за коју вредност реалног броја k је функција $y=\left(3k-\frac{1}{2}\right)x+1$ опадајућа.

73. Одреди све вредности реалног броја m за које је функција $y=\left(1-\frac{2m}{3}\right)x+m+2$ растућа.

74. За које вредности реалног броја m је функција $y=(m-7)x+1$ константна?

75. За које вредности реалног броја l је функција $y=\left(l^2-1\right)x+10$ константна?

76. За колико природних бројева m је функција $y=(3-m)x+10$ растућа?

77. За које целе бројеве a је функција $y=\left(\sqrt{5}-a^2\right)x+3$ растућа?

Имплицитни облик линеарне функције 6.7.

За линеарну функцију задату са $y=kx+n$, где је $k, n \in R$, кажемо да је у експлицитном облику.

Придев **експлицитан** потиче из латинског језика (од речи *explicitus*) и означава нешто што је директно изражено, јасно, очигледно.

пример 1

Функције $y=2x-3$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}$, $y=2x$ и $y=1$ су задате у експлицитном облику.

За линеарну функцију задату са $ax+by+c=0$, где је $a, b, c \in R$, $b \neq 0$ кажемо да је у имплицитном облику.

Придев **имплицитан** потиче из латинског језика (од речи *implicitus*) и означава нешто што није директно изречено. Свакако, придружује му се супротно значење од значења експлицитан.

пример 2

Функције $2x+y-3=0$ и $x-2y+4=0$ задате су у имплицитном облику.

Приметимо да се, на пример, за функцију $y = 2x - 3$, која је записана у експлицитном облику, примењујући својства једнакости, добија да је $-2x + y + 3 = 0$, што нам даје њен имплицитни облик.

Свака линеарна функција може се записати у експлицитном и имплицитном облику.

пример 3

Које од наведених функција су записане у имплицитном облику:

а) $10x - 10y - 3 = 0$;   б) $y = 2x$;   в) $x + y = 0$?

Решење:

Функције под а) и в) су у имплицитном облику, док је функција под б) у експлицитном облику.

пример 4

Одреди имплицитни облик линеарне функције $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Решење:

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$4y = -2x + 1$ (помножимо са 4 обе стране једнакости)

$4y + 2x - 1 = 0$ (додамо израз $2x - 1$ обема странама једнакости)

$2x + 4y - 1 = 0$

пример 5

Одреди експлицитни облик линеарне функције $6x - 4y + 3 = 0$.

Решење:

$6x - 4y + 3 = 0$

$-4y = -6x - 3$ (додамо израз $-6x - 3$ обема странама једнакости)

$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ (помножимо бројем $-\frac{1}{4}$ обе стране једнакости)

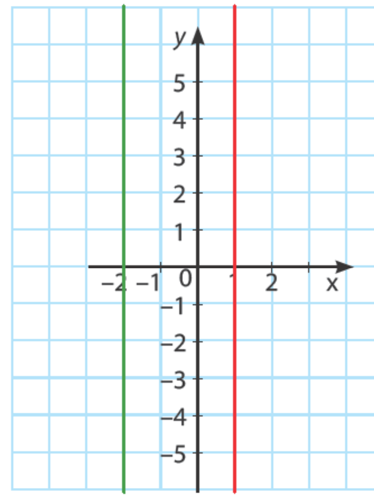
У поглављу 6.4. било је речи о неким карактеристичним линеарним функцијама и њиховим графицима. Размотримо сада још један такав случај.

Ако се у имплицитном облику линеарне функције $ax + by + c = 0$ дозволи да коефицијент b буде једнак 0, онда се добија израз $ax + c = 0$. Одатле је $x = -\frac{c}{a}$.

пример 6

Који су скупови тачака (x, y) у координатној равни описани на следећи начин:

а) $x = 1, y \in R$; б) $x = -2, y \in R$?



Решење:

а) У овом случају $x = 1, y \in R$ непосредно следи из $x + 0 \cdot y - 1 = 0$ и представља скуп свих тачака са координатама $(1, y)$, где је y било који реалан број. То је права која сече x-осу у тачки $(1,0)$ и паралелна је y-оси.

б) У другом случају запис $x = -2$ непосредно следи из $x + 0 \cdot y + 2 = 0$ и представља скуп свих тачака са координатама $(-2, y)$, где је y било који реалан број. То је права која сече x-осу у тачки $(-2, 0)$ и паралелна је y-оси.

Имајући у виду да смо раније нагласили да график линеарне функције представља праву линију, уз научено у поглављу 6.4. и у претходном примеру, у прилици смо да кажемо да се свака права у правоуглом координатном систему може описати једнакошћу $ax + by + c = 0$, ($a, b \in R$ и не могу бити истовремено једнаки 0).

Често се за једнакост $ax + by + c = 0$ каже и да је једначина праве.

ЗАДАЦИ

78. Одреди имплицитни облик линеарне функције:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = 3x - \frac{1}{5}$; в) $y = \frac{2}{3}x$.

79. Запиши у имплицитном облику линеарну функцију:

а) $y = \frac{11x - 10}{9}$; б) $y = \frac{-3x + 0,5}{2}$.

80. Одреди експлицитни облик линеарне функције:

а) $x + y + 1 = 0$; б) $2x - 3y - 4 = 0$; в) $-5x + 10y = 0$.

81. Нека је дата линеарна функција чији је коефицијент $k = -\frac{1}{3}$ и слободни члан $n = 10$. Запиши је у имплицитном облику.

82. Одреди нулу функције:

а) $x + y - 5 = 0$; б) $2x - y + 11 = 0$; в) $-3x - 6y = 0$.

83. Нацртај график функције:

а) $-x + y + 2 = 0$; б) $2x - 4y + 6 = 0$; в) $2x - 6y = 0$.

84. Одреди пресечну тачку графика функције $2x+y-5=0$ са x-осом.

85. Одреди пресечну тачку графика функције $x-2y+3=0$ са y-осом.

86. Одреди пресечне тачке графика функције $-2x+3y+5=0$ са координатним осама.

87. Одреди знак функције $x-y+4=0$.

88. Одреди знак функције $\frac{2}{3}x+3y-5=0$.

89. Провери да ли је дата функција растућа или опадајућа?

а) $2x+y-3=0$; **б)** $3x-2y+4=0$; **в)** $-\frac{1}{2}x+y+10=0$;

г) $0{,}1x+2y-0{,}5=0$; **д)** $-x-y+5=0$; **ђ)** $-\frac{3}{5}x+\frac{10}{3}y+2=0$.

90. За које $a \in R$ је функција $2ax-3y+2=0$ растућа?

91. За које $m \in R$ је функција $(-3m+1)x-5y+x+1=0$ опадајућа?

92. Да ли тачке $A(1,2)$, $B(0,3)$ и $C(-1,2)$ припадају графику функције $x+y-3=0$?

93. Одреди удаљеност координатног почетка од графика линеарне функције $3x+4y-6=0$.

94. Представи у експлицитном облику линеарну функцију чији график је паралелан са графиком функције $-2x+y+5=0$ и који садржи тачку $(3,3)$.

95. Израчунај површину троугла одређеног графиком функције $2x-y+4=0$ и координатним осама.

96. Израчунај површину фигуре ограничене графицима функција $x-y+1=0$ и $x-y-2=0$ и координатним осама.

97. Израчунај обим и површину троугла одређеног графицима функција $x-y+3=0$ и $3x+11y-33=0$ и x-осом.

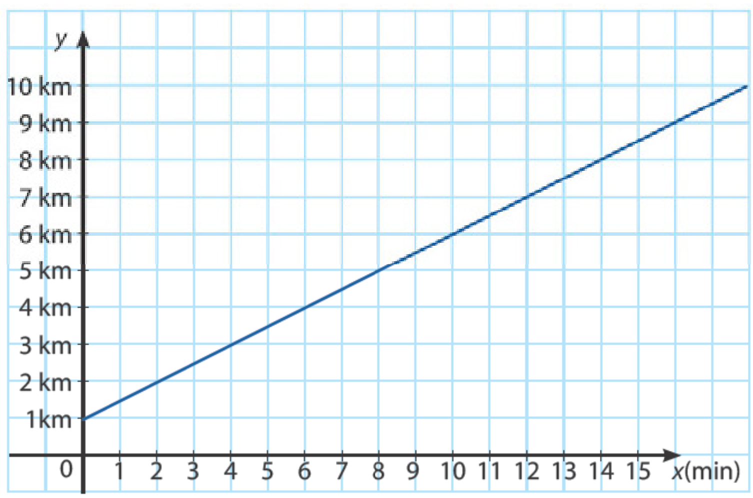
Примене линеарне функције 6.8.

У овој лекцији ћемо, слично елементарним примерима из лекције 6.2, приказати још неколико веома занимљивих и корисних примера примене линеарне функције у појавама и процесима из свакодневног живота.

Многе реалне ситуације карактеришу одређена ограничења за променљиве које учествују у њиховом описивању. Тако, на пример, због услова задатка график зависности у следећем примеру јесте полуправа.

пример 1

Бициклиста се праволинијски удаљава од зграде клуба. Његова удаљеност, у тренутку почетка мерења, износи 1 километар. Након тога, он за сваки минут пређе још пола километра. Његова удаљеност после x минута може се одредити помоћу формуле $d = 1 + 0{,}5x$. На следећој илустрацији је приказан график зависности.



а) Колико ће бити удаљен после 4 минута?

б) Након колико минута ће бициклиста бити удаљен 5 километара од зграде клуба?

Решење:

а) После 4 минута његова удаљеност ће бити једнака $d = 1 + 0{,}5 \cdot 4$, $d = 3$ km.

б) Из једначине $5 = 1 + 0{,}5 \cdot x$ добијамо да је $x = 8$ минута.

пример 2

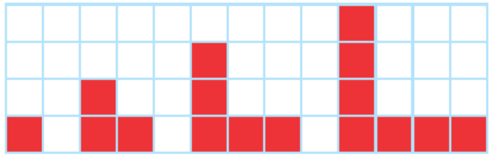
Пера је 1. 1. 2021. године ставио 100 000 динара на банковни рачун. Када се урачуна камата која му припада, после g година он може да подигне $y = 100\,000 + 5\,000\,g$ динара. Колико новца ће бити на његовом рачуну за 5 година?

Решење:

На његовом рачуну ће, после 5 година, бити $y = 100\,000 + 5\,000 \cdot 5 = 125\,000$ динара.

пример 3

У квадратној мрежи дато је неколико фигура које су део низа.



а) Израчунај обим сваке од датих фигура.

б) Како изгледа пета фигура у низу? Колики је њен обим?

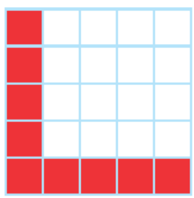
в) Колики је обим 42. фигуре у низу?

г) Користећи променљиве n – за редни број фигуре у низу и O – за обим, формулом изрази зависност O од n.

Решење:

а) Обим прве фигуре је 4, друге 8, треће 12, а четврте 16.

б) Пета фигура у низу је облика:

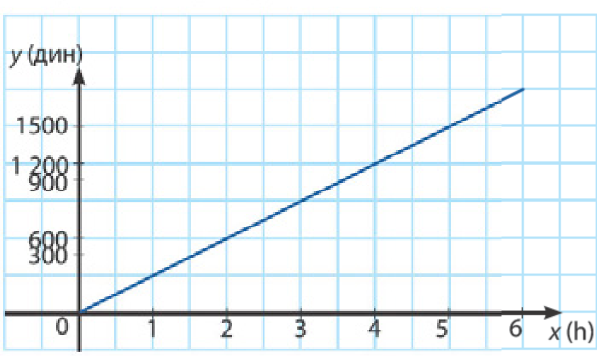


в) Обим 42. фигуре у низу је $42 \cdot 4 = 168$.

г) Обим n-те фигуре је једнак $O(n) = 4n$.

ЗАДАЦИ

98. На слици је дата зависност цене изнајмљивања бицикла у зависности од времена на које се изнајмљује.



а) Колико кошта издавање бицикла по сату?

б) Ако са t означимо време, а са c цену, запиши одговарајућу зависност цене од времена.

99. Цена телефонског разговора (у динарима) код једног мобилног оператера рачуна се помоћу формуле $c(t) = 17 + 12{,}5(t - 1)$, где је t број минута разговора.

а) Колика је цена разговора који је трајао 5 минута?

б) Колико минута је трајао разговор ако је цена била 42 динара?

100. Цена дневног изнајмљивања аутомобила у једној „Рент-а-кар“ компанији износи 2 500 динара, уз додатних 40 динара за сваки пређени километар. Која од наведених функција може да се користи за рачунање дневне цене коришћења аутомобила у зависности од пређене километраже s?

а) $c = 4s + 2\,500$;

б) $c = 40s + 2\,500$;

в) $c = 400s + 2\,500$;

г) $c = 0{,}4s + 2\,500$.

101. Цена дневног изнајмњивања аутомобила у једној „Рент-а-кар“ компанији износи 35 евра, уз додатних 0,3 евра за сваки пређени километар.

а) Одреди функцију која даје трошкове дневног најма аутомобила;

б) Одреди укупне трошкове најма аутомобила на један дан и вожње од 140 километара.

102. Број становника у једном граду се годишње повећава за 500. Ако је 2000. године у том граду живело 38 400 становника, одреди функцију којом се може израчунати број становника за сваку годину после 2000. године.

103. Удаљеност аутомобила од станице за праћење, у километрима, после t сати, дата је са $d = 70t + 120$.

а) Колика је брзина тог аутомобила изражена у километрима на сат?

б) После колико сати ће аутомобил бити удаљен 400 km?

104. Извор садржи 2 555 литара воде, и свакога дана се равномерно допуњава са 28 литара воде. На извору се поје коњи и сваки коњ дневно попије 35 литара воде.

Колико дана је могуће да са извора воду пије:

а) пет коња; **б)** један коњ?

105. Просечна цена двособног стана у Србији 2000. године је износила 3 500 000 динара. Након тога, просечна цена двособног стана се повећавала по 100 000 динара годишње.

а) Колика је просечна цена двособног стана била 2015. године?

б) Колика ће бити просечна цена двособног стана 2035. године?

106. Када авион крене из Њујорка за Београд, дужина пута који треба да пређе до Београда може се израчунати коришћењем формуле $d = 7\,300 - 735t$, где је t време проведено у путу изражено у сатима.

а) Колики пут авион има да пређе до Београда, након 6 сати летења?

б) Одреди најближи цео број сати неопходних да авион пређе пут од Њујорка до Београда.

107. Цистерна запремине 1 800 литара се празни кроз славину, тако да је пражњење цистерне дефинисано функцијом $K = 1\,800 - 10t$, где је K количина воде остале у цистерни, а t време у минутима колико је славина радила. Колико треба времена да се испразни четвртина цистерне? Колико литара воде ће бити у цистерни после 75 минута? После колико времена ће се цистерна испразнити?

108. Успостављање везе при телефонском разговору тарифира се са 15 динара, а сваки започети минут разговора се наплаћује још 10 динара. Ако је C цена телефонског разговора, а t време трајања разговора, нацртај график функције која дефинише зависност цене C од времена t. Колика ће бити цена разговора који је трајао 3,5 минута? Колико је трајао разговор за који је плаћено 65 динара?

6.9. „Читање” графика линеарне функције

У претходним лекцијама научили смо много важних чињеница у вези са линеарном функцијом. Циљ ове тематске јединице јесте да кроз примере покажемо како се графици линеарних функција могу искористити за добијање важних података као што су, на пример, решења линеарних једначина и неједначина, али и праћење неких практичних појава.

пример 1

Дат је график једне линеарне функције $y = kx + n$. Користећи тај график, одговори на следећа питања:

а) Да ли је дата функција растућа или опадајућа?

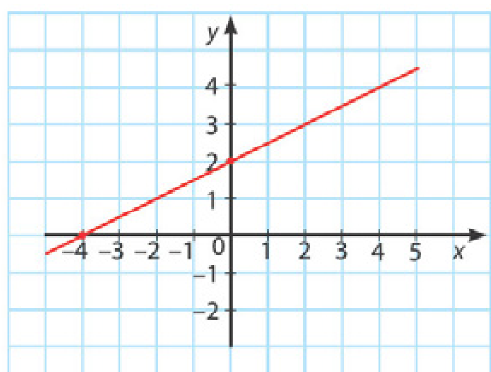
б) У којој тачки график функције сече x-осу?

в) У којој тачки график функције сече y-осу?

г) Колики је слободан члан n?

д) За које вредности непознате x је $y > 3$?

ђ) За које вредности непознате y је $-2 < x < 4$?



Решење:

а) Функција је растућа, јер са растом независно променљиве x, расте и зависно променљива y.

б) График функције сече x-осу у тачки $(-4, 0)$.

в) График функције сече y-осу у тачки $(0, 2)$.

г) Слободан члан n је једнак 2.

д) Са графика (изнад горње црвене линије) се може уочити да је $y > 3$, када је $x > 2$.

ђ) Слично, ако је $-2 < x < 4$, онда је $1 < y < 4$.

пример 2

Користећи график линеарне функције $y = 2x + 4$ реши једначине:

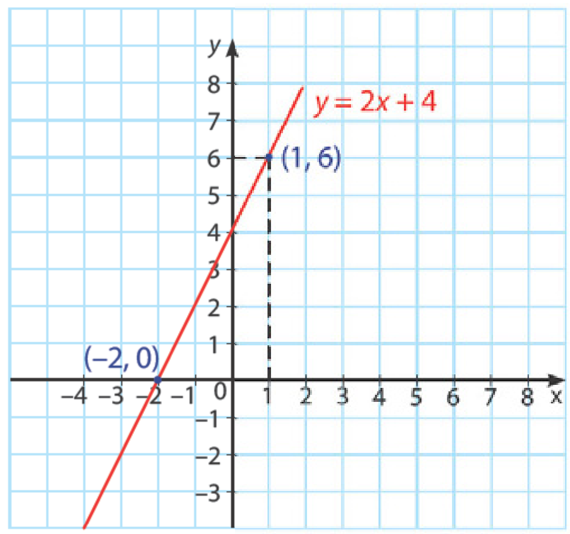
а) $2x + 4 = 0$; б) $2x + 4 = 6$.

Решење:

Нацртајмо график функције $y = 2x + 4$.

а) Очигледно је да график функције $y = 2x + 4$ сече x-осу у тачки $(-2, 0)$, па је $2x + 4 = 0$ за $x = -2$.

б) Са графика примећујемо да је за $x = 1$ испуњено $y = 6$, па је $x = 1$ решење једначине $2x + 4 = 6$.

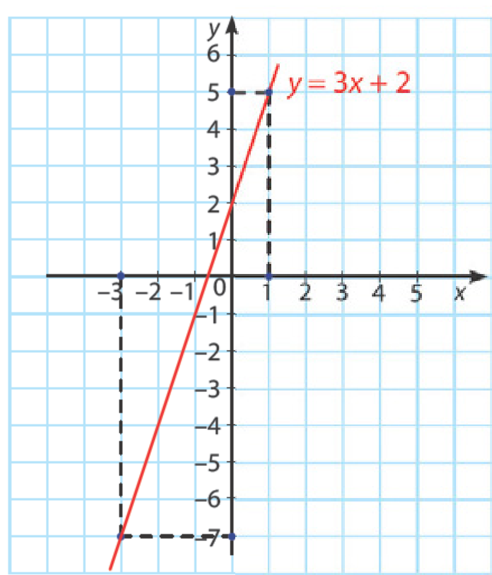


пример 3

Одреди све реалне бројеве x такве да је $-7 < 3x + 2 < 5$.

Решење:

Са графика функције $y = 3x + 2$ се види да се вредност израза $3x + 2$ налази између бројева -7 и 5 (читај са y-осе) када је $-3 < x < 1$ (читај са x-осе).



пример 4

Приход предузећа „Малина" дат је функцијом $P(x) = 1\,000x - 3\,000$, при чему је P приход (изражен у еврима), а x је цео број који представља број берача малина.

а) Колико најмање берача малина треба ангажовати да би се пословало са добитком?

б) Колико берача малина треба ангажовати да би приход био 7 000 евра?

в) Колики ће бити приход ако се ангажује 7 берача малина?

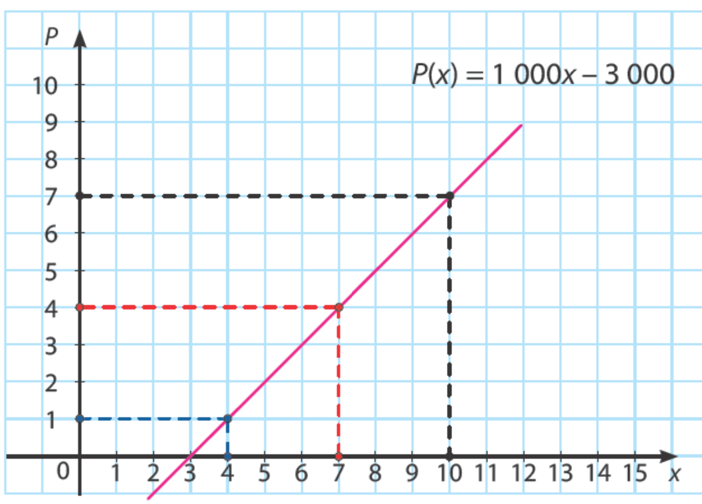
Решење:

Са графика функције $P(x) = 1\,000x - 3\,000$ (подеоци на P оси су изражени у хиљадама евра) могу се прочитати следећи подаци:

а) Функција прихода је негативна за $x < 3$, а за $x = 3$ је једнака 0. Прва позитивна вредност прихода је 1 000 евра и њу добијамо када је $x = 4$ берача малина (плаве координате).

б) Приход од 7 000 евра остварује се када је $x = 10$ берача малина (црне координате).

в) Када се ангажује 7 берача малина, приход ће бити 4 000 евра (црвене координате).



пример 5

У резервоару се налази 100 литара сока. Аница и Даница сваког дана из резервоара источе по 3 литра сока. Колико сока ће остати у резервоару после 24 дана? После колико дана у резервоару ће остати 64 литара сока? После колико дана у резервоару неће бити више сока?

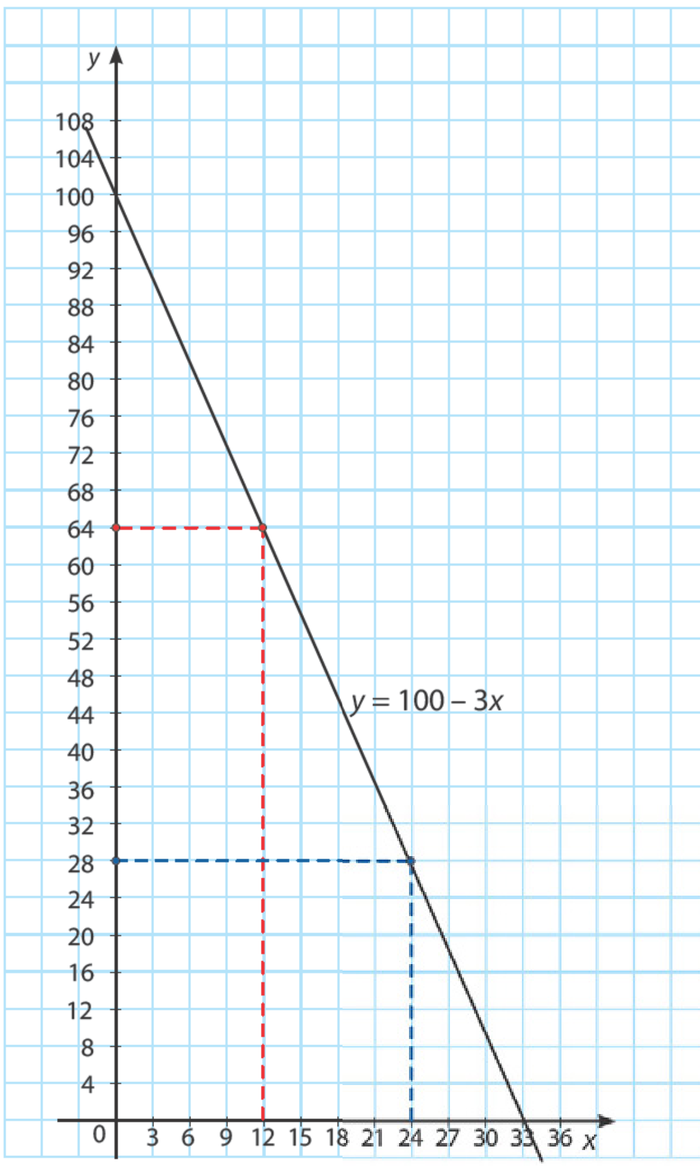
Решење:

Нека је x број дана које Аница и Даница користе за истакање сока из резервоара, а y количина сока која је после x дана остала у резервоару. Како се за x дана источи $3x$ литара сока, то је $y = 100 - 3x$.

Са графика се уочава да, после 24 дана, у резервоару остане 28 литара сока (плаве координате).

Такође, са графика се може прочитати да 64 литра сока у резервоару остане после 12 дана (црвене координате).

Са графика се види да сока има за 33 дана, а да већ 34. дана више неће бити сока.



пример 6

Гуме на аутомобилу имају гаранцију за прелажење 30 000 km. Функција $U(s)$ представља зависност употребљивости гума у процентима од пређеног пута s.

а) Напиши формулу која дефинише зависност непознате U од непознате s (пређени пут) и нацртај график добијене функције.

б) Колика је употребљивост гума после пређених 18 000 km?

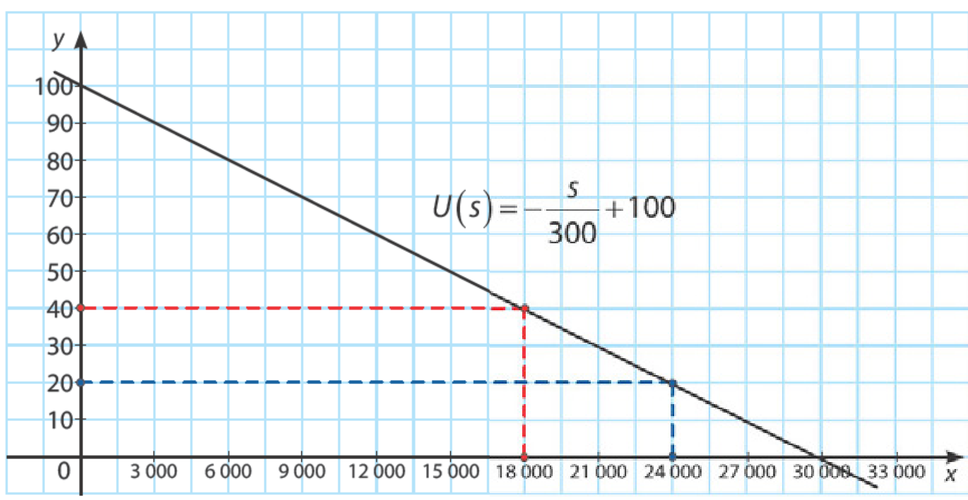
в) После колико пређених километара ће се упалити сигнална лампица која упозорава да је употребљивост гуме пала испод 20%?

Решење:

а) Тражена функција има вредност 100% ако је пређени пут 0 km и 0% када је пређени пут 30 000 km. Ако је тражена функција $U(s) = ks + n$, онда је $100 = 0 \cdot k + n$ и $0 = k \cdot 30\,000 + n$. Из прве једнакости је $n = 100$, а из друге је $k \cdot 30\,000 + n = k \cdot 30\,000 + 100 = 0$, па је $k = -\frac{100}{30\,000} = -\frac{1}{300}$. Коначно, тражена функција је $U(s) = -\frac{s}{300} + 100$

б) Са графика функције може се прочитати да је за 18 000 пређених километара употребљивост гума 40% (црвене координате).

в) Слично, са графика се види да је употребљивост мања од 20%, ако је $s > 24\,000$ km. Тада ће се упалити сигнална лампица.

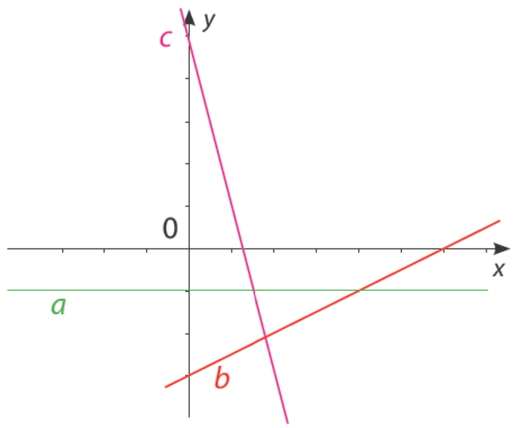


109. Нацртај график функције $y = 3x - 6$. Са графика те функције прочитај:

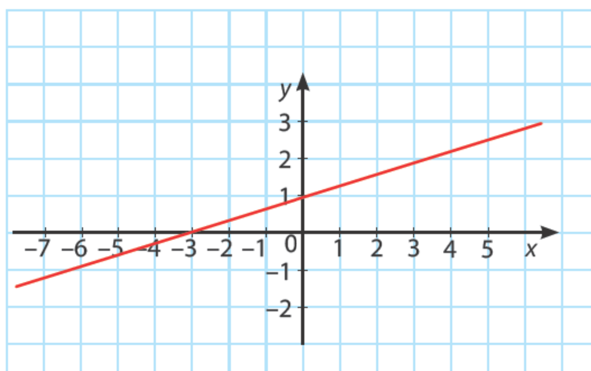
а) решење једначине $3x - 6 = 0$;

б) скуп решења неједначине $-9 < 3x - 6 \leq 12$.

110. Три праве a, b и c јесу графици линеарних функција $y = -4x + 5$, $y = 0{,}5x - 3$ и $y = -1$. Одреди која права је график које функције.



111. На слици је дат део графика једне линеарне функције $y = kx + n$. Која од следећих тврђења су тачна, а које нетачна?



а) Дата функција је опадајућа.

б) Нула дате функције је $x = -4$.

в) За $x > -5$ је $y > 0$.

г) $n = -1$.

112. Одреди тачку у којој се секу графици функција $3x + 2y = 13$ и $4x - 3y = 6$.

113. Нацртај график функције $3x + 4y = 24$ и одреди површину троугла који график дате функције гради са координатним осама.

114. Нацртај график функције $x + 2y - 8 = 0$, а затим са графика те функције прочитај:

а) решење једначине $2y = 8$;

б) скуп решења неједначине $2 \leq 8 - 2y \leq 10$.

115. Нацртај график функције $2x + 3y = 24$. Са графика дате функције одреди колико има парова природних бројева (x, y) који су решења једначине $2x + 3y = 24$?

Предлог задатака за додатни рад

1. За које $a \in R$ графици функција $y = ax + 7$, $y = 3x - 5$ и $y = -x + 3$ имају заједничку тачку?

2. Одреди одстојање пресечне тачке графика функција $x + y - 7 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ од координатног почетка.

3. Дата је функција $y = 2x + 4$ и тачка $A(1,3)$. Одреди функцију чији је график централно симетричан графику дате функције у односу на тачку A.

4. Теме A троугла ABC је тачка у којој график функције $y = \frac{3}{4}x + 12$ сече x-осу, а теме B је тачка у којој график функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$ сече исту осу. Ако је теме C заједничка тачка тих графика, докажи да је тај троугао правоугли.

5. Израчунај површину квадрата чије дијагонале припадају координатним осама, а две странице припадају графицима функција $y = x - 3$ и $y = x + 3$.

6. Одреди површину четвороугла одређеног графицима функција $y = -\frac{3}{4}x + 3$ и $y = -2x + 2$ координатним осама.

7. Удаљеност координатног почетка од графика линеарне функције $4x + 3y - n = 0$, $n \in N$ једнака је 12. Одреди n и површину троугла који график гради са координатним осама.

8. Нацртати график функције:

а) $y = |x|$; **б)** $y = |x| - 1$; **в)** $y = |2x + 1|$.

9. Израчунај површину фигуре ограничене графиком функције $y = |2x - 5|$ и графиком функције $y = 4$.

10. Израчунај површину фигуре ограничене графиком функције $y = |x + 1| + |x - 1|$ и графиком функције $y = 4$.

11. Одреди све парове реалних бројева k и n, такве да график функције $y = kx + n$ садржи тачку M(4, 6) и са графиком функције $y = x + 2$ и x-осом гради троугао површине 36.

12. Које тачке у xOy равни задовољавају неједнакост: $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$?

13. Дата је једначина $||x - 2| - 1| = a$. За коју вредност параметра a једначина има највећи број решења?

14. Одреди скуп тачака у xOy равни чије координате задовољавају $y = |x| + x$.

15. Нека је $f(x) = ax + b$ линеарна функција за коју важи $f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = 10$ и $f(1) - f(2) + f(3) - \ldots - f(10) = -10$. Колико је $f(0)$?

Питалице

1.	Вредност функције $y = 2x - 5$ за $x = 6$ је једнака 7.	да	не
2.	Тачка $M(2, -1)$ припада графику функције $y = 3x - 8$.	да	не
3.	Нула функције $y = \frac{1}{2}x + 1$ је $x = -2$.	да	не
4.	Функција $f(x) = 1{,}3x + 1{,}3$ је растућа.	да	не
5.	График функције $y + 4 = 0$ је паралелан са y-осом.	да	не
6.	Функција $5x + 4y + 3 = 0$ је монотоно опадајућа.	да	не
7.	Права $y = 2x - 4$ сече y-осу у тачки $(0, 2)$.	да	не
8.	Графици функција $y = 3x + 6$ и $y = -3x + 6$ су паралелни.	да	не
9.	Коефицијент функције $y = \frac{11}{3}x + \frac{5}{3}$ је за 2 већи од њеног слободног члана.	да	не
10.	Ако је функција $y = kx + n$ константна, онда је $k = 0$.	да	не
11.	Графици функција $y = 4x - 1$ и $y = 3x - 5$ секу се у тачки $M(2, 3)$.	да	не
12.	Ако је функција $y = f(x)$ растућа, а функција $y = g(x)$ опадајућа, онда се графици тих функција секу.	да	не

Предлог теста знања

1. Ако тачка $M(x, 3)$ припада графику функције $2x + 3y - 5 = 0$, онда је x једнако:

(А) -3 **(Б)** -2 **(В)** -1 **(Г)** 1 **(Д)** 2

2. График функције $y = kx + 7$ садржи тачку $M(2, 5)$ онда је реалан број k једнак:

(А) -2 **(Б)** -1 **(В)** 0 **(Г)** 1 **(Д)** 2

3. Дата је линеарна функција $4x + y + 8 = 0$. Функција чији је график паралелан са графиком дате функције је:

(А) $y = 4x - 8$ **(Б)** $y = 4x + 8$ **(В)** $y = -4x + 2$ **(Г)** $y = 2x - 4$ **(Д)** $y = 4x - 2$

4. Ако график функције $y = kx + n$ пресеца координатне осе у тачкама $A(0, 6)$ и $B(-3, 0)$, онда је $k + n$ једнако:

(А) 5 **(Б)** 6 **(В)** 7 **(Г)** 8 **(Д)** 9

5. Зависност цене штампања књиге C од броја штампаних примерака p дата је функцијом $C = 25\,000 + 35n$. Колико примерака књиге је штампано, ако је цена штампања књиге једнака 77 500 динара?

(А) 500 **(Б)** 750 **(В)** 1 000 **(Г)** 1 250 **(Д)** 1 500

6. График линеарне функције $y = -\frac{3}{4}x + 6$ са координатним осама одређује троугао. Обим O и површина P тог троугла су једнаки:

(А) $O = 14, P = 24$ **(Б)** $O = 24, P = 24$ **(В)** $O = 16, P = 48$

(Г) $O = 24, P = 48$ **(Д)** $O = 30, P = 24$

7. За које вредности реалног броја k је функција $(k^2 + 3)y + (k - 5)x + 10 = 0$ опадајућа?

(А) $k < 5$ **(Б)** $k > 5$ **(В)** $2 < k < 5$ **(Г)** $k < 0$ **(Д)** $-5 < k < 5$

8. Растојање координатног почетка од графика линеарне функције $15x + 20y = 300$ једнако је:

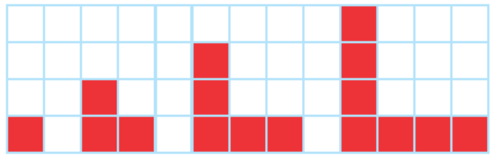
(А) 7 **(Б)** 9 **(В)** 10 **(Г)** 12 **(Д)** 15

Предлог контролне вежбе

6.1. Дата је линеарна функција $y = 3x - 5$. За коју вредност променљиве x је $y = 19$? **15**

6.2. Одреди коефицијент k, ако је за $x = 7$ вредност функције $y = 2kx - k$ једнака -13. **20**

6.3. У квадратној мрежи дато је неколико фигура које су део низа (види слику). **25**



а) Израчунај број црвених квадрата у 42. фигури у низу;

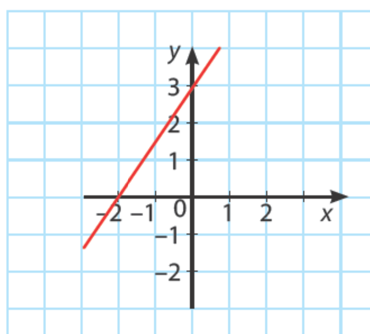
б) Користећи променљиву n – за редни број фигуре у низу и K – за број црвених квадрата у k-тој фигури, изрази формулом зависност K од n;

в) Која фигура у низу садржи 2 021 црвени квадрат?

6.4. Дата је функција $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Одреди координате тачака у којима њен график пресеца координатне осе и нацртај тај график. **15**

6.5. График функције $y = f(x) = kx + n$ пресеца координатне осе у тачкама $A(6, 0)$ и $B(0, -4)$. Одреди реалне бројеве k и n, а затим нацртај график те функције и одреди $f(100)$. **20**

6.6. Дат је график функције $y = f(x) = kx + n$ (види слику).
Одреди реалне бројеве k и n и израчунај колико је $f(60)$. **25**



6.7. Дата је функција $y = \frac{2}{3}x + 4$. Одреди за које вредности променљиве x је дата функција: **15**

а) негативна; б) једнака нули; в) позитивна.

6.8. Функција $y = f(x) = kx + n$ има нулу за $x = 4$, а њен график садржи тачку $(6, 6)$.
Одреди реалне бројеве k и n и докажи да је та функција растућа. **20**

6.9. Дата је функција $k^2 y + (k - 2)x - 8 = 0, k \neq 0$. **25**

а) За које вредности коефицијента k је дата функција растућа?

б) За које вредности коефицијента k дата функција y-осу сече у тачки $(0, 2)$?

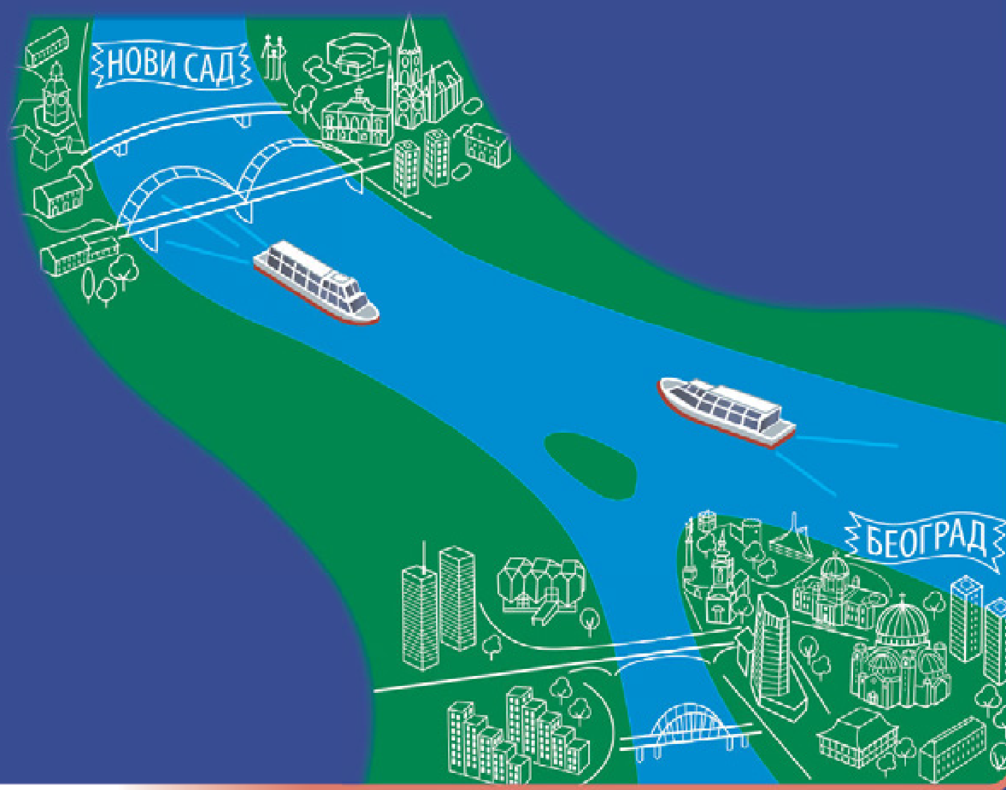
6.10.	Цена дневног изнајмљивања скија на једној планини износи 2 500 динара, уз додатних 100 динара за сваких сат времена коришћења. Која од наведених функција може да се користи за рачунање дневне цене изнајмљивања скија, у зависности од времена коришћења t? а) $c = 10t + 2\,500$; б) $c = t + 2\,500$; в) $c = 100t + 2\,500$; г) $c = 100t + 2\,400$.	**15**
6.11.	Профит произвођача сладоледа расте са бројем продатих сладоледа и одређен је функцијом $p = 20k - 65\,400$, где је p профит у динарима, а k број кутија продатог сладоледа. а) Колико најмање кутија сладоледа треба продати да би се позитивно пословало? б) Колико кутија сладоледа треба продати да би профит био милион динара?	**20**
6.12.	Један подеок на Целзијусовој скали једнак је 1,8 подеока на Фаренхајтовој скали, при чему је 0°C једнако са 32°F. а) Одреди линеарну функцију која Целзијусове степене x претвара у Фаренхајтове степене y. б) Која температура у Фаренхајтовим степенима одговара телесној температури од 36,5°C? в) Постоји ли температура која је истим бројем изражена и на Целзијусовој и на Фаренхајтовој скали?	**25**

7 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

задатак

Водени пут Дунавом од Новог Сада до Београда који је дугачак 90 km, туристички брод пређе за 3 сата. За повратак од Београда до Новог Сада истим бродом, потребно је 5 сати.

Колика је брзина брода, а колика је брзина Дунава?



СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

У првом полугодишту говорили смо о линеарним једначинама са једном непознатом. Циљ овог поглавља јесте да се упознамо са појмом линеарне једначине са две непознате, појмом система линеарних једначина са две непознате, еквивалентним трансформацијама и решавањем система једначина са две непознате, као и њиховом применом на многобројне проблеме у науци и свакодневном животу.

7.1. Појам система линеарних једначина са две непознате

Као и са другим математичким појмовима, и са појмом линеарне једначине са две непознате упознаћемо се кроз примере.

пример 1

Странице правоугаоника имају дужину a и b, а обим правоугаоника је 50. Напиши једнакост која дате податке преводи на математички језик.

Решење:

Како је обим правоугаоника једнак $2(a + b)$, податак да је обим правоугаоника једнак 50, преведен на математички језик, може се записати као $2(a+b)=50$, тј. $a+b=25$. Примећујемо да добијена једнакост садржи две непознате (a и b), па је добијена формула једначина са две непознате. Она је и (по аналогији са линеарним једначинама са једном непознатом) линеарна, јер су оба сабирка првог степена (a^1 и b^1).

пример 2

Разлика два реална броја је 2021. Напиши једнакост која дату реченицу преводи на математички језик.

Решење:

Нека су x и y реални бројеви о којима је реч. Из услова задатка је $x - y = 2\,021$ ($x, y \in R$). Добијена једнакост садржи две непознате (x и y), па је добијена формула једначина са две непознате. Она је и линеарна, јер су оба сабирка (x и $-y$) првог степена.

пример 3

Једначине $x^2 + 7y = 16$ и $a^3 + 2aH + 5H = 250$ јесу једначине са две непознате, али нису линеарне, јер постоје сабирци (x^2, a^3, $2aH$) који не представљају мономе првог степена.

На основу датих примера и аналогије са линеарном једначином са једном непознатом исказујемо дефиницију:

Линеарна једначина са две непознате је једнакост облика $ax + by = c$, где су a, b и c дати реални бројеви, а x и y непознате.

Реални бројеви a и b су коефицијенти уз непознате x и y, а c је слободан коефицијент.

пример 4

Дате су једначине: $2x + 7y = 39$, $x^2 + 3y = 7$, $5p + 8q - r = 2\,021$ и $3k + 4m + 5n = 67$. Које од њих су са две непознате?

Решење:

Једначина $2x + 7y = 39$ је линеарна једначина са две непознате (x, y).

Једначина $5p + 8q - r = 2\,021$ је линеарна једначина са три непознате (p, q, r).

Једначина $x^2 + 3y = 7$ има две непознате (x, y), али није линеарна, јер сабирак x^2 није првог степена.

Једначина $3k + 4m + 5n = 67$ има три непознате (k, m, n) и линеарна је.

пример 5

Дата је једначина $2x + y = 7$. Одреди бар једно решење дате једначине.

Решење:

Ако дату једначину решимо по непознатој y, добијамо да је $y = 7 - 2x$. За $x = 1$, добијамо да је $y = 7 - 2 = 5$. Уређени пар $(1, 5)$ је једно решење дате једначине. Примећујемо и да за сваки реалан број x, уређени пар $(x, 7 - 2x)$ представља решење дате једначине, па једначина има бесконачно много решења.

пример 6

Колико има парова реалних бројева који задовољавају једначину $y = 10x$?

Решење:

Примећујемо да линеарна једначина са две непознате $y = 10x$ за сваку вредност непознате x има одговарајућу вредност y. На пример, ако је $x_1 = 1$, онда и $y_1 = 10$, $x_2 = -3$ и $y_2 = -30$, $x_3 = \sqrt{3}$ и $y_3 = 10\sqrt{3}$ итд., тј. да је скуп решења дате једначине бесконачан. Јасно је да за сваки реалан број a постоји реалан број $10a$, тако да уређени пар $(a, 10a)$ задовољава једначину $y = 10x$.

Уређени пар реалних бројева (x_o, y_o) је решење линеарне једначине $ax + by = c$ са две непознате x и y, ако је тачна једнакост $ax_o + by_o = c$.

Сви уређени парови реалних бројева (x_k, y_k) за које је $ax_k + by_k = c$, чине скуп решења линеарне једначине са две непознате.

Пример 7

Три оловке и 4 свеске коштају 110 динара, а 4 оловке и 3 свеске 100 динара. Напиши једначине које дате услове преводе на математички језик.

Решење:

Ако цену оловке означимо са o и цену свеске са s, онда се услови задатка могу превести на математички језик коришћењем једнакости:
$3o + 4s = 110$ и $4o + 3s = 100$. Приметимо да свака од написаних једнакости има по две непознате: o и s.

Пример 8

Збир два броја је 100, а њихова разлика је 44. Дату реченицу запиши математичким језиком.

Решење:

Ако први тражени број означимо са x, а други са y, онда се у задатку дати услови преводе на математички језик једнакостима: $x + y = 100$ и $x - y = 44$. Подсетимо се да свака од две добијене једнакости представља једначину са две непознате (непознате су x и y).

Из примера 7 и 8 види се да у решавању оба проблема постоје две једначине и да тражене вредности непознатих морају испуњавати и једну и другу једначину.

Тада се, по аналогији са линеарном једначином, може исказати дефиниција:

Две линеарне једначине са две непознате $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ **чине систем линеарних једначина са две непознате (**$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ **су дати реални бројеви, а** x **и** y **су непознате).**

Реални бројеви a_1, b_1, a_2, b_2**, су коефицијенти уз непознате** x **и** y**, а** c_1 **и** c_2 **су слободни коефицијенти.**

Ако је $\begin{cases} a_1 x_o + b_1 y_o = c_1 \\ a_2 x_o + b_2 y_o = c_2 \end{cases}$**, онда реални бројеви** x_o **и** y_o **представљају решење система једначина.**

Тада се систем $\begin{cases} x = x_o \\ y = y_o \end{cases}$ **назива системом једначина у решеном облику.**

Сви уређени парови (x, y**) који задовољавају систем** $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ **чине скуп решења система једначина који ћемо (као код једначина и неједначина) обележавати са** S**.**

пример 9

Дат је систем једначина $\begin{cases} 7x + 2y = 39 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$. Који од уређених парова (3, 9), (5, 2), (9, 5), (7, –4) јесте решење датог система једначина?

Решење:

За $x = 3$, $y = 9$:
$7 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 21 + 18 = 39$,
$3 \cdot 3 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27 \neq 7$, (једнакост није испуњена)
па (3, 9) није решење датог система једначина.

За $x = 5$, $y = 2$:
$7 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 35 + 4 = 39$,
$3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7$,
па је (5, 2) решење датог система једначина.

За $x = 9$, $y = 5$:
$7 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 63 + 10 = 73 \neq 39$, (једнакост није испуњена)
$3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 = 27 - 20 = 7$
па (9, 5) није решење система једначина.

Ако је $x = 7$, $y = -4$ нису испуњене ни прва ни друга једнакост, па (7, –4) није решење датог система једначина.

пример 10

Напиши бар један систем једначина чија су решења $x = 3$ и $y = 7$.

Решење:

Како је $3 + 7 = 10$ и $7 - 2 \cdot 3 = 7 - 6 = 1$, то је један од могућих система чија су решења 3 и 7:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y - 2x = 1 \end{cases}.$$

пример 11

Одреди скуп решења система једначина: $\begin{cases} |x| = 1 \\ |y| = 2 \end{cases}$.

Решење:

Из чињенице да је $|x| = 1$, следи да је $x = 1$ или је $x = -1$. Слично из $|y| = 2$ добија се да је $y = 2$ или $y = -2$. И то су једина решења прве, односно друге једначине. Тада је скуп решења датог система једначина: $S = \{(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)\}$, јер сваки од уређених парова бројева задовољава обе једначине.

ЗАДАЦИ

1. Дата је једначина $7x - 8y = 9$. Одреди вредност коефицијената уз x и y, и слободног коефицијента. Да ли је дата једначина линеарна са две непознате?

2. Дате су једнакости:

а) $x + y = 5$; **б)** $2a = a + 6$; **в)** $m + 7 = n - 10$; **г)** $3 + 4 = 7$.

Које од њих су линеарне једначине са две непознате?

3. Напиши једну линеарну једначину са две непознате x и y, и једну линеарну једначину са две непознате m и n.

4. Напиши линеране једначине које преводе следеће реченице на математички језик:

а) Збир два реална броја је 57;

б) Разлика двоструког броја x и троструког броја y је 2021;

в) Количник два броја је 9.

5. Провери да ли су уређени парови $(a, b) = (3, 4)$ и $(a, b) = (-1, 7)$ решења једначине $3a + 4b = 25$.

6. Увери се да уређени парови $(m, n) = (1, 4)$ и $(m, n) = (5, -2)$ нису решења једначине $8m + 3n = 7$.

7. Дата је линеарна једначина $3x - 2y = 7$. Одреди бројеве m и n, тако да уређени парови $(m, 4)$ и $(1, n)$ буду решења дате једначине.

8. Напиши линеарне једначине које преводе следеће реченице на математички језик:

а) Обим правоугаоника је 200;

б) Средња линија трапеза је 24;

в) Обим једнакокраког троугла је 100.

9. Да ли једначине $x + y = 2\,022$ и $x = 123$ чине систем линеарних једначина са две непознате?

10. Дат је систем линеарних једначина $\begin{cases} 2a + 5b = 14 \\ 7a - b = 12 \end{cases}$. Који од наведених уређених парова (a, b) су његова решења: *а)* $(7, 0)$; б) $(2, 2)$; в) $(-2, 5)$?

11. Покажи да уређени парови $(-1, 5)$ и $(4, 9)$ нису решења следећег система линеарних једначина са две непознате: $\begin{cases} 3p + 11q = 52 \\ 6q - 5p = 34 \end{cases}$.

12. Напиши линеарну једначину са две непознате, чије је једно решење $(x, y) = (7, -4)$. Постоји ли систем линеарних једначина чији су коефицијенти уз непознату x 1 и 2, а уз непознату y 3 и 4 , а чије је решење $(7, -4)$?

13. Напиши бар један систем линеарних једначина са две непознате чије решење је $(x, y) = (3, 0)$.

14. Одреди скуп решења система једначина $\begin{cases} 3a - 8b = 2 \\ |b| = 2 \end{cases}$.

15. Да ли постоје реални бројеви x и y, такви да је $7x - 2y = 15$ и $28x - 8y = 36$?

Еквивалентност система линеарних једначина са две непознате 7.2.

У поглављу о једначинама и неједначинама говорили смо о еквивалентним једначинама и неједначинама и упознали неколико трансформација које једначине и неједначине преводе у једначине и неједначине у решеном облику. Циљ ове лекције јесте да се упознамо са трансформацијама које дати систем једначина преводе у систем једначина у решеном облику.

пример 1

Да ли су еквивалентни системи једначина:

$$J_1: \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad J_2: \begin{cases} 2x = 10 \\ 3y = -9 \end{cases} \quad J_3: \begin{cases} 2y = -6 \\ 3x = 15 \end{cases} \;?$$

Решење:

Системи једначина J_1, J_2 и J_3 су примери еквивалентних система једначина, јер је уређени пар $(x, y) = (5, -3)$ једино решење и првог и другог и трећег система једначина, тј. $S_1 = S_2 = S_3 = \{(5, -3)\}$. То се једноставно утврђује, јер решење првог система (који је дат у решеном облику) $x = 5$, $y = -3$, јесте уједно и решење другог и трећег система једначина. Приметимо и да су прве једначине у систему J_1 и J_2 и друга једначина у систему J_3 еквивалентне, као што су друге једначине у системима J_1 и J_2 еквивалентне са првом једначином у систему J_3.

Кроз проучавање линеарних једначина са једном непознатом видели смо да су две једначине еквивалентне ако имају једнаке скупове решења. Поставља се питање да ли се аналогна дефиниција може применити на системе линеарних једначина? Одговор је потврдан, тј. еквивалентност система једначина утврђује се на основу следеће дефиниције:

Систем једначина J_1 еквивалентан је систему једначина J_2 ако је скуп решења система J_1 једнак скупу решења система J_2.

Трансформације које не мењају скуп решења система једначина називамо еквивалентним трансформацијама система једначина.

пример 2

Да ли су еквивалентни системи једначина: $J_1: \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ и $J_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$?

Решење:

Дати системи једначина су еквивалентни, јер је уређени пар $(x, y) = (3, 2)$ једино решење и првог и другог система једначина, тј. скуп решења и првог и другог система једначина је $S = \{(3, 2)\}$.

пример 3

Покажи да су еквивалентни системи једначина: $J_1:\begin{cases} x=2 \\ x+y=5 \end{cases}$ и $J_2:\begin{cases} 2x+y=7 \\ y=3 \end{cases}$.

Решење:

Ако се у систему једначина J_1 вредност $x = 2$ замени у другу једначину, добије се да је $y = 3$. Остаје да проверимо да ли је $(x, y) = (2, 3)$ решење и другог система једначина. Како је $2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ и како је $3 = 3$, то је $(x, y) = (2, 3)$ решење и система J_2. То значи да су J_1 и J_2 еквивалентни системи једначина.

пример 4

Одреди који су од датих система једначина еквивалентни а који нису:

$$J_1:\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases};\quad J_2:\begin{cases} 5x=5 \\ 7y=0 \end{cases};\quad J_3:\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=0 \end{cases}.$$

Решење:

Скупови решења датих система једначина су: $S_1 = \{(1, 0)\}$, $S_2 = \{(1, 0)\}$ и $S_3=\{(1,0),(-1,0)\}$. Како је $S_1 = S_2 \neq S_3$, то је систем једначина J_1 еквивалентан са системом једначина J_2, а ниједан од њих није еквивалентан са системом J_3.

Поставља се питање еквивалентности система једначина у општем случају. Еквивалентне трансформације система линеарних једначина са две непознате заснивају се на већ познатим особинама реалних бројева:

подсетник

- Ако су a, b и c реални бројеви и ако је $a = b$ и $b = c$, онда је $a = c$.
- Ако су a, b и c реални бројеви и ако је $a = b$, онда је $a + c = b + c$.
- Ако су a, b и c реални бројеви и ако је $c \neq 0$, онда је $ac = bc$.

тврђење

Ако системе једначина J_1 и J_2 напишемо у облику $J_1:\begin{cases} A_1=B_1 \\ C_1=D_1 \end{cases}$, односно $J_2:\begin{cases} A_2=B_2 \\ C_2=D_2 \end{cases}$, онда се, на основу претходних особина реалних бројева, могу формулисати и следећа својства еквивалентних система једначина:

Трансформација (1) Замена редоследа једначина:

Систем једначина $\begin{cases} A_1=B_1 \\ C_1=D_1 \end{cases}$ је еквивалентан са системом једначина $\begin{cases} C_1=D_1 \\ A_1=B_1 \end{cases}$.

Трансформација (2) Множење и леве и десне стране једначине бројем различитим од нуле:

Систем једначина $\begin{cases} A_1=B_1 \\ C_1=D_1 \end{cases}$ је еквивалентан са системом $\begin{cases} pA_1=pB_1 \ (p\neq 0) \\ qC_1=qD_1 \ (q\neq 0) \end{cases}$.

Трансформација (3) Замена једне једначине система збиром једначина:

Систем једначина $\begin{cases} A_1=B_1 \\ C_1=D_1 \end{cases}$ је еквивалентан са системом $\begin{cases} A_1=B_1 \\ A_1+C_1=B_1+D_1 \end{cases}$.

Трансформација (4) Замена непознате из једне једначине система у другу једначину система:

Систем једначина $\begin{cases} A_1=B_1 \\ C_1=D_1 \end{cases}$ је еквивалентан са системом који се добије када се једна непозната из било које једначине система изрази у функцији друге непознате, а потом замени у другу једначину.

пример 5

Напиши неколико система једначина еквивалентних са системом једначина: $\begin{cases} 2x+3=x+7 \\ 3y-4=2y+5 \end{cases}$.

Решење:

На основу еквивалентних трансформација система, добија се низ еквивалентних система једначина:

$$\begin{cases} 2x+3=x+7 \\ 3y-4=2y+5 \end{cases}, \begin{cases} 2x-x=7-3 \\ 3y-2y=4+5 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}.$$

пример 6

Реши систем једначина: $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ x=2 \end{cases}$.

Решење:

На основу еквивалентне трансформације (4), вредност променљиве x из друге једначине може се заменити у првој једначини, и тако добијамо низ еквивалентних система једначина:

$$\begin{cases} 2x+3y=19 \\ x=2 \end{cases}, \begin{cases} 2\cdot 2+3y=19 \\ x=2 \end{cases}, \begin{cases} 3y+4=19 \\ x=2 \end{cases}, \begin{cases} 3y=19-4 \\ x=2 \end{cases}, \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}.$$

пример 7

Збир два броја је 100, а њихова разлика је 44. О којим бројевима је реч?

Решење:

Ако први тражени број означимо са x, а други са y, онда се у задатку дати услови преводе на математички језик у виду система једначина: $\begin{cases} x+y=100 \\ x-y=44 \end{cases}$. На основу трансформације (3), можемо уместо полазног система другу једначину записати као збир једначина система.

$$\begin{cases} x+y=100 \\ x-y=44 \end{cases}, \begin{cases} x+y=100 \\ x+y+x-y=100+44 \end{cases}, \begin{cases} x+y=100 \\ 2x=144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=100 \\ x=72 \end{cases}, \begin{cases} 72+y=100 \\ x=72 \end{cases}, \begin{cases} y=100-72 \\ x=72 \end{cases}, \begin{cases} y=28 \\ x=72 \end{cases}.$$

ЗАДАЦИ

16. Да ли су еквивалентни системи једначина $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 5x=6y \\ 7y=8x \end{cases}$?

17. Провери да ли су еквивалентни системи једначина $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 4y-5x=20 \end{cases}$.

18. Да ли су еквивалентни системи једначина $\begin{cases} m=4 \\ n=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3m+4n=32 \\ 5n-6m=1 \end{cases}$?

19. Покажи да системи једначина: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} |x|=1 \\ |y|=2 \end{cases}$ нису еквивалентни.

20. Да ли су еквивалентни системи једначина $\begin{cases} 5a-6b=4 \\ 2a+7b=11 \end{cases}$ и $\begin{cases} a=2 \\ a+b=3 \end{cases}$?

21. Напиши бар један систем једначина који је еквивалентан са системом једначина $\begin{cases} m=2 \\ n=9 \end{cases}$.

22. Увери се да су системи једначина $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$ еквивалентни.

23. Напиши бар један систем једначина који је еквивалентан са системом једначина $\begin{cases} m+n=2 \\ n=m \end{cases}$.

24. Да ли су еквивалентни системи једначина $\begin{cases} 5x+7y=12 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x=4 \\ 13y=13 \end{cases}$?

25. Дати су системи линеарних једначина са две непознате:

$J_1: \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$; $J_2: \begin{cases} 5x=5 \\ 3y=-12 \end{cases}$; $J_3: \begin{cases} 2x=2 \\ 7y=-21 \end{cases}$.

Који од датих система су еквивалентни?

26. Увери се да системи једначина $\begin{cases} 12p+13q=14 \\ 4p-5q=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3p=0 \\ 2q=2 \end{cases}$ нису еквивалентни.

27. Да ли су еквивалентни системи једначина: $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1 \\ y^2=16 \end{cases}$?

28. Покажи да су еквивалентни системи једначина $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x=8 \\ 2x+y=11 \end{cases}$.

Решавање система линеарних једначина са две непознате методом смене 7.3.

Приметили смо да је при решавању система једначина суштина да се коришћењем еквивалентних трансформација формира низ еквивалентних система једначина, тако да последњи систем у низу буде систем у решеној форми. Шематски се низ међусобно еквивалентних једначина може приказати на следећи начин:

$$J_1:\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases},\ J_2,\ J_3,\ \ldots,\ \begin{cases} x=x_o \\ y=y_o \end{cases}.$$

Решавање система линеарних једначина са две непознате *методом смене* заснива се на трансформацији (4). Најчешће се та трансформација примењује тако што се из једне једначине (на пример, прве) једна непозната (на пример, x) изрази у функцији друге непознате (на пример, y). Потом се непозната x замени у другу једначину, а затим се коришћењем осталих трансформација, процес наставља све док се не добије систем једначина у решеном облику.

пример 1

Реши систем линеарних једначина: $\begin{cases} x=9 \\ 3x+2y=31 \end{cases}$.

Решење:

Решавање система линеарних једначина одвија се преко еквивалентних система једначина, с тим што се непозната x (из прве једначине система) директно замењује у другу једначину система, а даље се записују низови еквивалентних једначина:

$$\begin{cases} x=9 \\ 3x+2y=31 \end{cases},\begin{cases} x=9 \\ 3\cdot 9+2y=31 \end{cases},\begin{cases} x=9 \\ 27+2y=31 \end{cases},\begin{cases} x=9 \\ 2y=31-27 \end{cases},\begin{cases} x=9 \\ 2y=4 \end{cases},\begin{cases} x=9 \\ y=2 \end{cases}.$$

Дакле, решење датог система једначина је уређен пар (9,2).

пример 2

Одреди решење система линеарних једначина: $\begin{cases} x=y+2 \\ 2x+5y=11 \end{cases}$.

Решење:

И у овом случају, решавање система линеарних једначина одвија се преко еквивалентних система једначина, с тим што је најједноставније непознату x (која је већ дата у решеном облику), из прве једначине система, директно заменити у другу једначину:

$$\begin{cases} x=y+2 \\ 2x+5y=11 \end{cases},\begin{cases} x=y+2 \\ 2(y+2)+5y=11 \end{cases},\begin{cases} x=y+2 \\ 2y+4+5y=11 \end{cases},\begin{cases} x=y+2 \\ 7y+4=11 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x=y+2 \\ 7y=11-4=7 \end{cases}\ \begin{cases} x=y+2 \\ y=7:7 \end{cases},\begin{cases} x=y+2 \\ y=1 \end{cases},\begin{cases} x=1+2 \\ y=1 \end{cases},\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$$

Следи да је $S=\{(3,1)\}$.

У претходним примерима једна непозната је била дата директно (у решеном облику). Међутим, поставља се питање шта се дешава када то није случај, већ када је систем дат у општијем облику?

пример 3

Реши систем линеарних једначина: $\begin{cases} 3a - 2b = 15 \\ 2a + b = 17 \end{cases}.$

Решење:

Ако посматрамо дати систем, онда треба изабрати коју непознату и из које једначине треба изразити да бисмо је заменили у другу једначину. Уочавамо да је најједноставније из друге једначине изразити непознату b и заменити је у прву једначину:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 15 \\ 2a + b = 17 \end{cases}, \begin{cases} 3a - 2b = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \begin{cases} 3a - 2(17 - 2a) = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \begin{cases} 3a - 34 + 4a = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases},$$

$$\begin{cases} 7a - 34 = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \begin{cases} 7a = 15 + 34 = 49 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \begin{cases} a = 49 : 7 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \begin{cases} a = 7 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \begin{cases} a = 7 \\ b = 17 - 2 \cdot 7 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 17 - 14 \end{cases}, \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}.$$

На основу претходна три примера можемо закључити да се решавање система линеарних једначина методом смене своди на следећа четири корака:

Корак 1: Из једне једначине, рецимо друге (као у примеру 3) изрази непознату α као линеарну функцију друге непознате β.

Корак 2: Замени непознату α у прву једначину добијеним изразом (функцијом) по β.

Корак 3: Реши прву, добијену (линеарну) једначину по непознатој β.

Корак 4: Добијену вредност за непознату β замени у другу једначину и израчунај непознату α.

пример 4

Цана и Дана треба да поделе 2 345 динара тако да Цана добије 789 динара више од Дане. Колико новца ће добити Цана, а колико Дана?

Решење:

Ако новац који треба да добије Цана обележимо са c, а новац који треба да добије Дана са d, добијамо систем једначина: $c + d = 2\,345$ и $c - d = 789$. Решавањем система једначина добија се:

$$\begin{cases} c + d = 2\,345 \\ c - d = 789 \end{cases}, \begin{cases} c + d = 2345 \\ c = d + 789 \end{cases}, \begin{cases} d + 789 + d = 2345 \\ c = d + 789 \end{cases}, \begin{cases} 2d + 789 = 2345 \\ c = d + 789 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2d = 2345 - 789 \\ c = d + 789 \end{cases}, \begin{cases} 2d = 1556 \\ c = d + 789 \end{cases}, \begin{cases} d = 1556 : 2 = 778 \\ c = d + 789 \end{cases}, \begin{cases} d = 778 \\ c = 778 + 789 \end{cases}, \begin{cases} d = 778 \\ c = 1567 \end{cases}.$$

Дакле, Цана ће добити 1 567, а Дана 778 динара.

пример 5

Ако 3 оловке и 4 свеске коштају 110 динара, а 4 оловке и 3 свеске 100 динара, колико кошта 7 оловки и 5 свески?

Решење:

Ако цену оловке означимо са o и цену свеске са s, онда се услови задатка могу превести на математички језик коришћењем једнакости: $3o + 4s = 110$ и $4o + 3s = 100$. Добијени систем једначина не дефинише лако израчунавање једне променљиве, али желимо да покажемо да је могућ. У том смислу ћемо из друге једначине изурачунати непознату s и заменити је у прву једначину:

$$\begin{cases} 3o + 4s = 110 \\ 4o + 3s = 100 \end{cases}, \begin{cases} 3o + 4s = 110 \\ 3s = 100 - 4o \end{cases}, \begin{cases} 3o + 4s = 110 \\ s = \dfrac{100 - 4o}{3} \end{cases}, \begin{cases} 3o + 4\dfrac{100 - 4o}{3} = 110 \\ s = \dfrac{100 - 4o}{3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 9o + 400 - 16o = 330 \\ s = \dfrac{100 - 4o}{3} \end{cases}, \begin{cases} -7o = 330 - 400 \\ s = \dfrac{100 - 4o}{3} \end{cases}, \begin{cases} -7o = -70 \\ s = \dfrac{100 - 4o}{3} \end{cases}, \begin{cases} o = 10 \\ s = \dfrac{100 - 4o}{3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} o = 10 \\ s = \dfrac{100 - 40}{3} \end{cases}, \begin{cases} o = 10 \\ s = 20 \end{cases}.$$

ЗАДАЦИ

29. Методом смене реши следеће системе линеарних једначина:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} a = -2 \\ 4b - 5a = 18 \end{cases}$; в) $\begin{cases} m = 4 \\ 7m + 2n = 34 \end{cases}$.

30. Одреди решења система једначина:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 13 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} a = b - 2 \\ 4b - 5a = 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} n = m + 6 \\ 7m + 2n = 21 \end{cases}$.

31. Методом смене реши следеће системе линеарних једначина:

а) $\begin{cases} 5x + 4y = 24 \\ x - y = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7a + 3b = 34 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 6m + 7n = -1 \\ m + n = 0 \end{cases}$.

32. Одреди решења система линеарних једначина:

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2p + 5q = 20 \\ 3p - q = 13 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 0{,}2a + 0{,}3b = 1{,}2 \\ 0{,}4a - 0{,}1b = 1 \end{cases}$.

33. Одреди решења система једначина:

а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ y - x = 1 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y = 5 \\ 4x = 15y \end{cases}$.

34. Збир два броја је 2 021, а њихова разлика 765. О којим бројевима је реч?

35. Милан има 1 000 динара више од Николе. Колико новца има Милан, а колико Никола, ако Милан има пет пута више новца од Николе?

36. Аритметичка средина два броја је 100, а њихова разлика 36. О којим бројевима је реч?

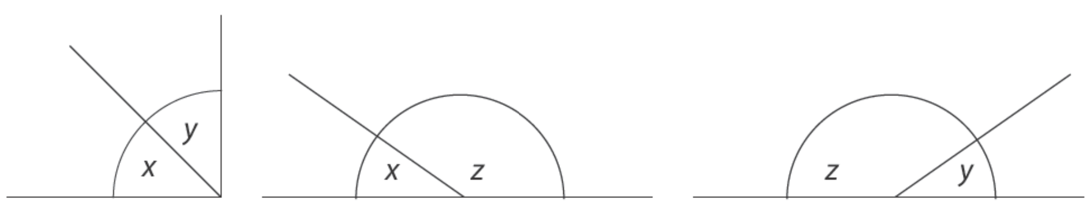
37. Маша је за једну свеску и једну књигу платила укупно 200 динара. Јаша је платио пет свезака и две књиге 520 динара. Колико коштају две свеске и једна књига?

38. Ако се природан број m подели природним бројем n, количник је 5 и остатак је 2. Одреди m и n, ако је њихов збир једнак 50.

39. У правоугаонику чији је обим 100 cm, једна страница је за 8 cm већа од друге. Одреди површину тог правоугаоника.

40. Обим једнакокраког троугла је 32 cm, а крак и основица се односе као 5 : 6. Колика је површина датог троугла?

41. Збир дужина ивица правилне четворостране призме је 60 cm. Израчунај површину и запремину призме, ако је дужина бочне ивице за 3 cm већа од дужине основне ивице.



42. Угао x је комплементан са углом y и суплементан са углом z. Одреди углове x, y и z ако су и углови y и z суплементни.

43. Дата су три броја, тако да збирови свака два од њих имају вредности 56, 84 и 112. О којим бројевима је реч?

44. У правоуглом троуглу катете се разликују за 2 cm, а разлика површина квадрата конструисаних над катетама је 28 cm². Израчунај хипотенузу датог правоуглог троугла.

Решавање система линеарних једначина са две непознате методом супротних коефицијената 7.4.

Решавање система линеарних једначина са две непознате *методом супротних коефицијената*, заснива се на еквивалентним трансформацијама (2) и (3).

подсетник

Подсетимо се да се за реалне бројеве a и $-a$ каже да су супротни бројеви.
За коефицијенте испред исте непознате у двема једначинама система линеарних једначина кажемо да су супротни ако су они супротни реални бројеви.

пример 1

Реши систем линеарних једначина: $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 2x+5y=13 \end{cases}.$

Решење:

У овом примеру већ имамо супротне коефицијенте 5 и –5 уз непознату y. Ако прва једначина остане непромењена, а уместо друге напишемо збир прве и друге једначине, добија се:

$$\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 2x+5y=13 \end{cases}, \begin{cases} 3x-5y=7 \\ 3x-5y+2x+5y=13+7 \end{cases}, \begin{cases} 3x-5y=7 \\ 5x=20 \end{cases}, \begin{cases} 3x-5y=7 \\ x=20:5=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12-5y=7 \\ x=4 \end{cases}, \begin{cases} -5y=7-12=-5 \\ x=4 \end{cases}, \begin{cases} y=(-5):(-5) \\ x=4 \end{cases}, \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}.$$

Дакле, решење је уређени пар $(x, y) = (4, 1)$.

пример 2

Одреди решење система линеарних једначина: $\begin{cases} 3a-2b=6 \\ 2a+3b=-9 \end{cases}.$

Решење:

У претходном примеру прву и другу једначину је било могуће сабрати директно, јер су коефицијенти уз непознату y већ били супротни. Међутим, у овом примеру то не би дало резултат, јер коефицијенти уз обе непознате нису супротни. Да бисмо добили супротне коефицијенте, неопходно је да, на основу трансформације (2), прву једначину помножимо са 3, а другу са 2, и потом применимо поступак као у претходном примеру:

$$\begin{cases} 3a-2b=6 \quad |\cdot 3 \\ 2a+3b=-9 \, |\cdot 2 \end{cases}, \begin{cases} 9a-6b=18 \\ 4a+6b=-18 \end{cases}, \begin{cases} 9a-6b=18 \\ 9a+4a=18-18 \end{cases}, \begin{cases} 9a-6b=18 \\ 13a=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 9a-6b=18 \\ a=0:13=0 \end{cases}, \begin{cases} 0-6b=18 \\ a=0 \end{cases} \begin{cases} b=18:(-6) \\ a=0 \end{cases}, \begin{cases} b=-3 \\ a=0 \end{cases}, \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Решење система је уређени пар $(0, -3)$.

Напомена: Дати систем се могао решити и другачијим множењем коефицијената, тако што се прва једначина помножи са 2, а друга са (–3), па се тако добију супротни коефицијенти уз непознату a.

Очигледно је да се сабирањем система једначина које имају супротне коефицијенте уз исту непознату добија једначина са једном непознатом. То омогућује да се применом *методе смене* и осталих трансформација, процес наставља све док се не добије систем једначина у решеном облику.

пример 3

Анка је купила 3 kg брашна и 5 kg шећера, и платила 424 динара. У истој продавници, Бранка је купила 5 kg брашна и 8 kg шећера, и платила 686 динара. Колико кошта један килограм брашна, а колико један килограм шећера?

Решење:

Ако цену килограма брашна означимо са b, а цену килограма шећера са s, онда је на основу услова задатка $3b+5s=424$ и $5b+8s=686$. Добили смо систем од две линеарне једначине са две непознате. Систем решавамо методом супротних коефицијената, тако што прву једначину множимо са 5, а другу са –3:

$$\begin{cases} 3b+5s=424 & |\cdot 5 \\ 5b+8s=686 & |\cdot(-3) \end{cases}, \begin{cases} 15b+25s=2\,120 \\ -15b-24s=-2\,058 \end{cases}, \begin{cases} 15b+25s=2\,120 \\ 25s-24s=2\,120-2\,058 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 15b+25s=2\,120 \\ s=62 \end{cases}, \begin{cases} 15b+25\cdot 62=2120 \\ s=62 \end{cases}, \begin{cases} 15b=2\,120-1\,550=570 \\ s=62 \end{cases},$$

$$\begin{cases} b=570:15 \\ s=62 \end{cases}, \begin{cases} b=38 \\ s=62 \end{cases}.$$

Према томе, 1 kg брашна кошта 38, а 1 kg шећера 62 динара.

На основу изложених примера, можемо закључити да се метод супротних коефицијената примењује код система чији су коефицијенти уз непознате различити (и различити од нуле), и има следеће кораке:

Корак 1: Утврди у каквом су односу коефицијенти уз исте непознате. Ако коефицијенти ни уз једну непознату нису супротни, иди на корак 2. Ако су коефицијенти уз једну непознату супротни, иди на корак 3.

Корак 2: Помножи прву и другу једначину погодним бројевима, тако да се уз једну непознату добију супротни коефицијенти, и пређи на корак 3.

Корак 3: Нека прва једначина остане непромењена (треба је само преписати), а уместо друге напиши збир прве и друге једначине.

Корак 4: Реши другу једначину по добијеној непознатој.

Корак 5: Из прве једначине израчунај и другу непознату.

45. Методом супротних коефицијената, одреди решења система једначина:

а) $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 5x-3y=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6a+5b=22 \\ 7b-6a=2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4m+9n=13 \\ 5n-2m=3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 8x=5y \\ 4x+3y=44 \end{cases}$.

46. Реши системе једначина:

а) $\begin{cases} 3x+4y=25 \\ x-y=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} a+2b=3 \\ 3a+b=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 7c+d=9 \\ 5c+11d=27 \end{cases}$.

47. Одреди решења система једначина:

а) $\begin{cases} 5x+3y=16 \\ 4x+7y=22 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3p-10q=13 \\ 8p+7q=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 4m=7n \\ 5m=9n \end{cases}$.

48. Реши систем једначина:

а) $\begin{cases} 0{,}1x+0{,}2y=0{,}3 \\ 0{,}4x+0{,}5y=0{,}6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y=8 \\ \frac{1}{4}x-\frac{7}{10}y=-6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3(x+1)=4(y-2) \\ y-x=3 \end{cases}$.

49. За 5 свески и 7 оловки плаћено је 220 динара. Колико кошта 7 свески и 5 оловки, ако је свеска за 20 динара скупља од оловке?

50. Два броја се разликују за 8, а њихова аритметичка средина је 37. О којим бројевима је реч?

51. Двоцифрени број је 4 пута већи од збира својих цифара, а 12 пута већи од њихове разлике. Одреди тај двоцифрени број ако је цифра јединица већа од цифре десетица.

52. За 8 сокова и 7 лимунада плаћено је 820 динара. Колико кошта 6 сокова и 5 лимунада, ако је за 4 сока и 3 лимунаде плаћено 380 динара?

53. Разлика два броја је 62, а када се већи подели мањим, количник је 6 и остатак 2. Одреди дате бројеве.

54. Збир два броја је 100, при чему је половина првог једнака трећини другог. О којим бројевима је реч?

55. Младен је за један посао требало да добије 1 300 динара и лопту. Међутим, Младен је урадио само трећину посла и за то добио 100 динара и лопту. Колико кошта лопта?

56. Лека има три пута више новца од Жарка. Ако обојица потроше по 1 000 динара, онда ће Лека имати четири пута више новца од Жарка. Колико новца има Лека, а колико Жарко?

57. Двоцифрени број је за 45 већи од збира, а за 53 већи од разлике својих цифара. Одреди тај двоцифрени број.

58. Реши системе једначина:

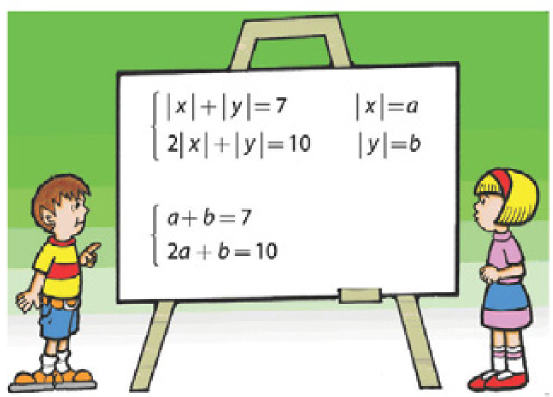
а) $\begin{cases} 2x+7y=24 \\ 12x+42y=96 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x-9y=25 \\ 12x-27y=75 \end{cases}$.

59. Увођењем нових непознатих, $\frac{1}{x}=a$ и $\frac{1}{y}=b$, реши систем једначина:

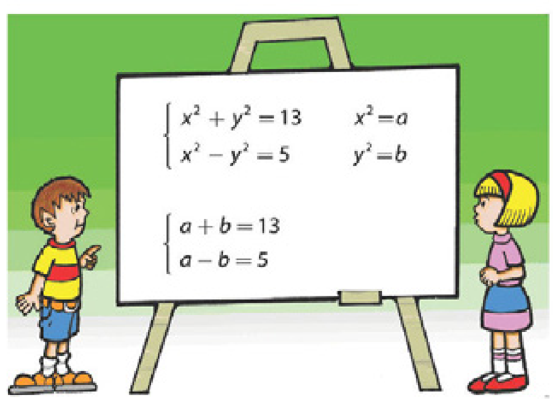
$$\begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=4 \\ \frac{15}{x}+\frac{4}{y}=17 \end{cases}.$$

60. Увођењем нових непознатих, реши системе једначина:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=7 \\ 2|x|+|y|=10 \end{cases}$;



б) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$.



Решавање система линеарних једначина са две непознате графичком методом 7.5.

Решавање система линеарних једначина са две непознате графичком методом заснива се на чињеници да свака линеарна једначина по непознатим *x* и *y*, представља и линеарну функцију која се може у Декартовом *xOy* координатном систему представити својим графиком. Тада ће међусобни положај добијених графика дефинисати и решење датог система једначина. Ситуације које притом могу настати, илуструјемо кроз следеће примере:

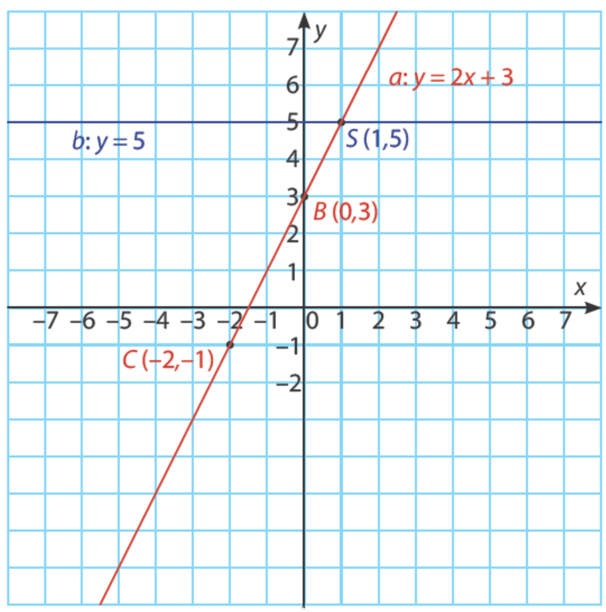
пример 1

Одреди решења система линеарних једначина: $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$.

Решење:

Једначина $y - 2x = 3$, еквивалентна је са једначином $y = 2x + 3$. Зато у Декартовом координатном *xOy* систему уочимо график функције $y = 2x + 3$ (права *a*) и график функције $y = 5$ (права *b*). График функције $y = 2x + 3$ дефинисан је тачкама *B* и *C* (види таблицу), а график функције $y = 5$ јесте права паралелна са *x*-осом, на растојању 5.

График функције $y - 2x = 3$		
Тачка	x	y
B	0	3
C	–2	–1



Све тачке праве *a* (што значи: бесконачно много тачака) имају особину да њихове координате задовољавају једначину $y = 2x + 3$, а све тачке праве *b* имају координату *y* једнаку 5. Праве *a* и *b* се секу у тачки *S*, чије су координате $x = 1$, $y = 5$. Координате тачке $S(x, y)$ имају обе особине, тј. $y = 2x + 3$ и $y = 5$.

Проверавамо $(x, y) = (1, 5)$ је заиста решење датог система једначина, јер координате $(1, 5)$ задовољавају једначине $y = 2x + 3$ и $y = 5$ $(5 = 2 \cdot 1 + 3$ и $5 = 5)$.

пример 2

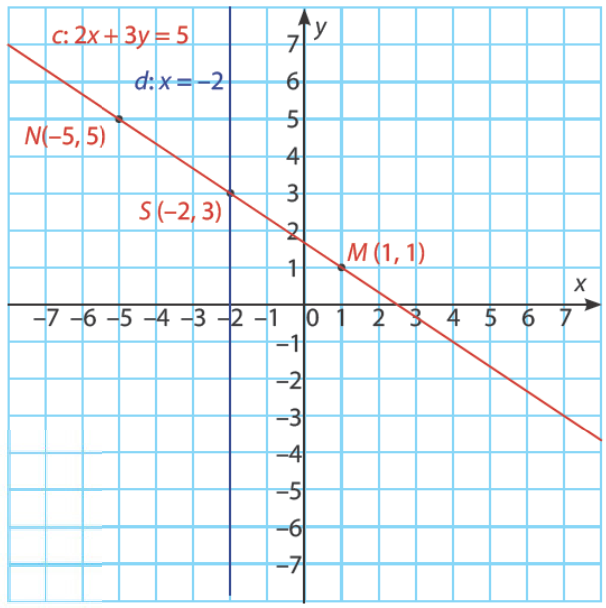
Реши систем линеарних једначина: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = -2 \end{cases}$.

Решење:

Као и у претходном примеру, у Декартовом координатном *xOy* систему конструишемо праву *c*, која је график функције $2x + 3y = 5$ (помоћу таблице и тачака *M* и *N*) и праву *d*, чије су све координате $x = -2$. Та права је паралелна са *y*-осом на растојању 2 (али у негативном делу *xOy* равни).

Праве *c* и *d* секу се у тачки *S* чије су координате (–2, 3). Очигледно је да координате тачке *S* задовољавају и услов $2x + 3y = 5$, јер тачка *S* припада правој *c* и услов $x = -2$, јер тачка *S* припада и правој *d*.

График функције $2x + 3y = 5$		
Тачка	x	*y*
M	1	1
N	–5	5



пример 3

Одреди решење система једначина $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x+4y=5 \end{cases}$.

Решење:

График функције $3x-2y=1$		
Тачка	x	y
A	3	4
B	–1	–2

График функције $x+4y=5$		
Тачка	x	y
C	5	0
D	–3	2

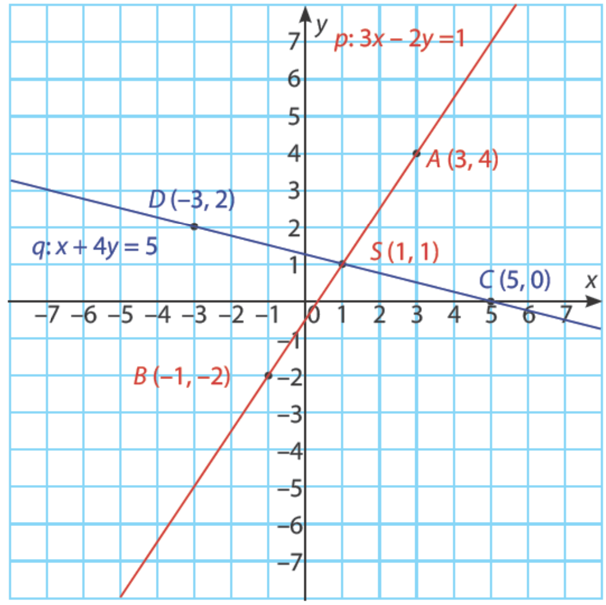


График функције $3x-2y=1$ у координатној xOy равни јесте права p (одређена тачкама A и B), а график функције $x+4y=5$ је права q (одређена C и D). Праве p и q секу се у тачки S (1, 1). Провером утврђујемо да је (1, 1) решење датог система једначина, јер је $3\cdot1-2\cdot1=1$ и $1+4\cdot1=5$.

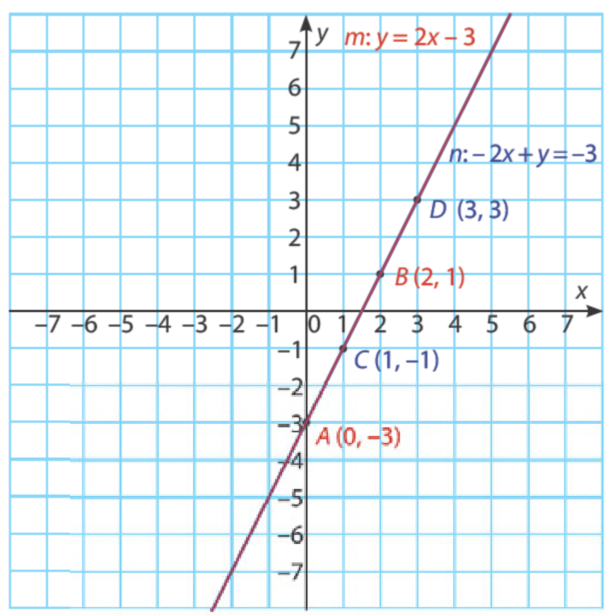
пример 4

Реши систем једначина $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$.

Решење:

График функције $2x-y=3$		
Тачка	x	y
A	0	–3
B	2	1

График функције $4x-2y=6$		
Тачка	x	y
C	1	–1
D	3	3



Очигледно је да се праве m и n поклапају, тј. свака тачка праве m, јесте уједно и тачка праве n. То значи да дати систем има бесконачно много решења.

Како је $y=2x-3$, то је уређени пар $(x, 2x-3)$ решење обе једначине. Приметимо и да је уређеним паром $(x, 2x-3)$ $(x\in R)$ дефинисано бесконачно много решења, јер се за сваки реалан број x добија једно решење.

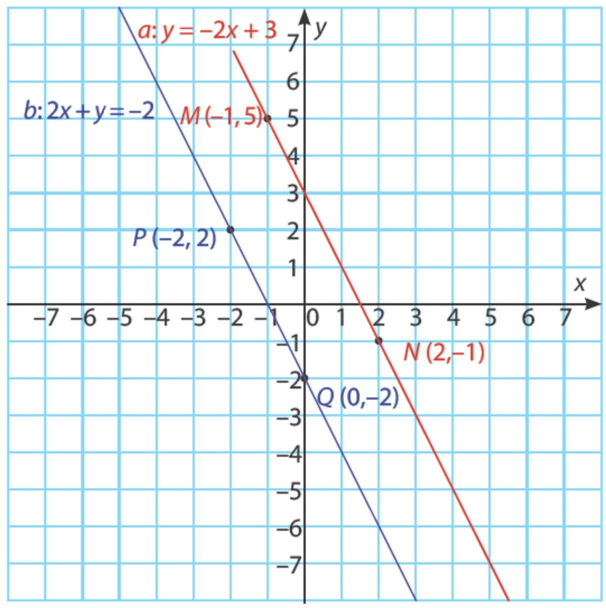
пример 5

Одреди решења система линеарних једначина: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = -4 \end{cases}$.

Решење:

График функције $2x + y = 3$		
Тачка	x	y
M	–1	5
N	2	–1

График функције: $4x + 2y = -4$		
Тачка	x	y
P	–2	2
Q	0	–2



Ако једначину $2x + y = 3$ у Декартовој координатној равни представимо правом a (помоћу тачака M и N) и једначину $4x + 2y = -4$ правом b (помоћу тачака P и Q), онда је јасно да се те две праве не секу, тј. паралелне су. То доказују и њихови коефицијенти смера, јер обе праве имају коефицијент $k = -2$. Такав систем нема решења, и назива се *немогућим* или *противуречним*. Заиста, једначине $2x + y = 3$ и $2x + y = -2$ су противуречне.

Из претходних примера, можемо извести следеће закључке:

тврђење

Системy једначина $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ у Декартовој координатној xOy равни одговарају две линеарне функције $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$, које имају своје графике.

Ако се графици функција $a_1 x + b_1 y = c_1$ и $a_2 x + b_2 y = c_2$ секу у тачки $S(x_o, y_o)$, систем једначина има јединствено решење $x = x_o$ и $y = y_o$.

Ако се графици функција $a_1 x + b_1 y = c_1$ и $a_2 x + b_2 y = c_2$ поклапају, систем једначина има бесконачно много решења.

Ако су графици функција $a_1 x + b_1 y = c_1$ и $a_2 x + b_2 y = c_2$ паралелни, систем нема решења, тј. дати систем је немогућ.

61. Графичком методом, реши системе једначина:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ x = 4 \end{cases}$.

62. Графичком методом, одреди решење система једначина:

а) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$.

63. Графичком методом, реши системе једначина:

а) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 12x - 3y = 15 \end{cases}$.

64. Дата је електронска збирка задатака – *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs/). Реши Тест 252.

65. Одредити површину правоугаоника који је у xOy Декартовом координатном систему одређен графицима функција $y = -3$ и $y = 4$ и правама $x = -2$ и $x = 5$.

66. Одреди површину квадрата који је дефинисан пресечним тачкама графика линеарних функција: $x + y = 0$, $x + y = 8$, $y = x$ и $y = x - 8$.

67. Одреди површине троуглова које чине графици линеарних функција $y = x + 2$ и $x + y = 6$ и:

а) x-оса; **б)** y-оса.

68. Дат је систем једначина $\begin{cases} 3x - ay = 1 \\ bx - 2y = 1 \end{cases}$. Одреди реалне бројеве a и b тако да је уређени пар (1, 1) решење датог система. Графички прикажи решавање тог система.

69. Дате су линеарне функције $2x - y = 6$ и $y = mx + n$. Одредити реалне бројеве m и n, тако да се графици датих функција:

а) секу; **б)** поклапају; **в)** паралелни су.

7.6. Решавање неких карактеристичних система линеарних једначина са две непознате

У претходним лекцијама бавили смо се решавањем система једначина методом замене променљивих, методом супротних коефицијената и графичком методом. Ова наставна јединица има циљ да прикаже још неке карактеристичне системе линеарних једначина и да покаже да постоје системи једначина који немају решења и системи једначина који имају бесконачно много решења.

подсетник

- Једначина $0 \cdot x = 0$ има бесконачно много решења.
- Једначина $0 \cdot x = b$ $(b \neq 0)$ нема решења.

пример 1

Реши систем једначина $\begin{cases} x+y=5+y \\ 3x=18 \end{cases}$.

Решење:

Дати систем једначина $\begin{cases} x+y=5+y \\ 3x=18 \end{cases}$ је еквивалентан са системом једначина $\begin{cases} x=5 \\ x=6 \end{cases}$ који је очигледно противуречан, јер број 5 задовољава прву, а не задовољава другу једнакост, док број 6 задовољава другу, али не задовољава прву једнакост. На основу тога закључујемо да дати систем једначина нема решења (каже се и да је дати *систем једначина немогућ*). Скуп решења овог система је празан, тј. $S=\varnothing$.

пример 2

Реши систем једначина $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x+6y=22 \end{cases}$.

Решење:

Еквивалентним трансформацијама система $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x+6y=22 \end{cases}$ добијају се еквивалентни системи једначина

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x+6y=22 \quad /:2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=7 \\ -2x-3y=-11 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 0\cdot x+0\cdot y=-4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=7 \\ 0=-4 \end{cases}.$$

Како је друга једначина система немогућа, то је и дати систем једначина немогућ (нема решења).

Ово је видљиво већ из другог еквивалентног система, јер су прва и друга једначина противуречне.

пример 3

Реши систем једначина $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$.

Решење:

Ако другу једначину датог система $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$ поделимо са 3, добија се систем

једначина $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$. Очигледно се систем састоји од две исте (идентичне) једначине $x - y = 5$. Како је $x = y + 5$, то је уређени пар $(y + 5, y)$ решење датог система једначина за сваки реалан број y. Исто тако је и $y = x - 5$, па је уређени пар $(x, x - 5)$, такође, решење датог система једначина, и јасно је да систем има бесконачно много решења, јер се за сваки реалан број x добија једно решење датог система. Овакав систем једначина се зове *неодређен систем*.

пример 4

Реши систем једначина $\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ 14y - 10x = -24 \end{cases}$.

Решење:

Ако другу једначину датог система $\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ 14y - 10x = -24 \end{cases}$

поделимо са (–2) добијају се еквивалентни системи једначина

$$\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ 14y - 10x = -24 \end{cases}, \begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ 5x - 7y = 12 \end{cases}, \begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}.$$

Како је друга једначина система неодређена, тј. тачна за свако x и y – то систем има бесконачно много решења, а то су сви уређени парови реалних бројева који задовољавају прву једначину, тј. сви реални бројеви за које је $5x - 7y = 12$, тј. $5x - 12 = 7y$. Ти парови чине уређену двојку $\left(x, \dfrac{5x - 12}{7}\right)$.

Да је систем једначина неодређен, видљиво је и из другог у низу еквивалентних система, јер је очигледно да имамо две идентичне једначине.

ЗАДАЦИ

70. Да ли је систем једначина $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x = 5 \end{cases}$

а) немогућ; **б)** неодређен? Зашто?

71. Зашто је систем једначина $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3y - 2x = -8 \end{cases}$ неодређен?

72. Зашто је систем једначина $\begin{cases} 7x - 2y = 9 \\ 14x - 4y = 20 \end{cases}$ немогућ (нема решења)?

73. Који од следећих система су немогући (немају решење), а који имају решење:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 6a + 5b = 11 \\ 7b - a = 6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4m - 9n = 21 \\ 18n - 8m = 42 \end{cases}$.

74. Који од датих система једначина су неодређени, тј. имају бесконачно много решења:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 9x - 12y = 21 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} a + 2b = 13 \\ 3a + 6b = 39 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 7c + d = 15 \\ 5c + 11d = 21 \end{cases}$.

75. Напиши један систем линеарних једначина који нема решења.

76. Напиши један систем линеарних једначина који има бесконачно много решења.

77. Ако 5 свезака и 7 оловака кошта 220 динара, може ли 10 свезака и 14 оловака коштати 550 динара? Колико кошта 15 свезака и 21 оловка?

78. Напиши систем линеарних једначина који има бесконачно много решења.

79. Напиши систем линеарних једначина који карактерише уређени пар $(x, 7 - x)$.

Примена система линеарних једначина са две непознате 7.7.

Системи линеарних једначина са две непознате имају значајне примене како у математици, тако и у другим наукама, али и у многобројним проблемима из свакодневног живота. Најзначајније примене система линеарних једначина илуструјемо следећим примерима:

пример 1

Збир два броја је 52. Ако се већи од њих подели мањим, добија се количник 9 и остатак 2. О којим бројевима је реч?

Решење:

Нека је већи од тражених бројева x, а мањи y. Тада је $x + y = 52$ и тада је $x = 9y + 2$, па добијамо систем једначина: $\begin{cases} x+y=52 \\ x=9y+2 \end{cases}$.

Трансформацијом добијеног система у низ еквивалентних система и применом методе смене (јер је непозната x у другој једначини система већ израчуната), налазимо:

$$\begin{cases} x+y=52 \\ x=9y+2 \end{cases}, \begin{cases} 9y+2+y=52 \\ x=9y+2 \end{cases}, \begin{cases} 10y=52-2 \\ x=9y+2 \end{cases}, \begin{cases} 10y=50 \\ x=9y+2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y=50:10=5 \\ x=9y+2 \end{cases}, \begin{cases} y=5 \\ x=9\cdot 5+2=47 \end{cases}.$$

Тражени бројеви су 47 и 5. Њихов збир је 52, а при дељењу 47 са 5 добија се количник 9 и остатак 2.

пример 2

Пре четири године Марко је био четири пута старији од Ненада, а за четири године, Марко ће бити три пута старији од Ненада. Колико година сада има Марко, а колико Ненад?

Решење:

Ако Марко сада има m, а Ненад n година, онда су пре 4 године имали $m - 4$, односно $n - 4$ година и тада је $m - 4 = 4(n - 4)$. За 4 године Марко ће имати $m + 4$ година, а Ненад $n + 4$ година, и тада ће бити $m + 4 = 3(n + 4)$. Добијамо следећи систем једначина:

$$\begin{cases} m-4=4(n-4) \\ m+4=3(n+4) \end{cases}.$$

Трансформацијом система једначина добија се:

$$\begin{cases} m-4=4(n-4) \\ m+4=3(n+4) \end{cases}, \begin{cases} m-4=4n-16 \\ m+4=3n+12 \end{cases}, \begin{cases} m=4n+4-16 \\ m=3n-4+12 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m=4n-12 \\ m=3n+8 \end{cases}, \begin{cases} m=4n-12 \\ 4n-12=3n+8 \end{cases}.$$

Ако вредност непознате m из прве заменимо у другој једначини, добија се:

$$\begin{cases} m=4n-12 \\ 4n-3n=12+8 \end{cases}, \begin{cases} m=4n-12 \\ n=20 \end{cases}, \begin{cases} m=4\cdot 20-12 \\ n=20 \end{cases}, \begin{cases} m=68 \\ n=20 \end{cases}.$$

Значи, Марко сада има 68, а Ненад 20 година. Пре четири године Марко је имао 64, а Ненад 16 година, што је 4 пута више. За четири године Марко ће имати 72, а Ненад 24 године, што је 3 пута више.

Пример 3

Ако Нада позајми Јагоди 100 динара, онда ће Нада и Јагода имати једнаке суме новца. Ако Јагода позајми Нади 100 динара, онда ће Нада имати два пута више новца од Јагоде. Колико новца има Нада, а колико Јагода?

Решење:

Нека Нада има x, а Јагода y динара. Из првог услова задатка је јасно да је $x - 100 = y + 100$. Из другог услова задатка, добија се да је $x + 100 = 2(y - 100)$, па добијамо следећи систем једначина:

$$\begin{cases} x - 100 = y + 100 \\ x + 100 = 2(y - 100) \end{cases}.$$

Трансформацијом добијеног система у низ еквивалентних система и одузимањем прве једначине од друге (у трећем кораку) следи:

$$\begin{cases} x - 100 = y + 100 \\ x + 100 = 2(y - 100) \end{cases}, \begin{cases} x = y + 100 + 100 \\ x + 100 = 2y - 200 \end{cases}, \begin{cases} x = y + 200 \\ 100 = y - 400 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = y + 200 \\ 500 = y \end{cases}, \begin{cases} x = 700 \\ y = 500 \end{cases}.$$

Дакле, Нада је имала 700, а Јагода 500 динара.

Пример 4

Запиши формулу која описује праву p, ако права садржи тачке $A\ (1, 3)$ и $B\ (4, 6)$.

Решење:

Нека је права p график функције $y = kx + n$. Како тачке A и B припадају траженој правој p, то координате тих тачака задовољавају једнакост $y = kx + n$. Значи да је: $3 = k \cdot 1 + n$ и $6 = k \cdot 4 + n$.

Из услова задатка добијамо систем једначина: $\begin{cases} k + n = 3 \\ 4k + n = 6 \end{cases}$ који решавамо методом смене. Следи:

$$\begin{cases} k + n = 3 \\ 4k + n = 6 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 4k + 3 - k = 6 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 3k = 6 - 3 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 3k = 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} n = 3 - k \\ k = 1 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - 1 = 2 \\ k = 1 \end{cases}.$$

Дакле, тражена права се описује једнакошћу $y = kx + n = x + 2$.

пример 5

Помешани су раствор који садржи 30% сирћетне киселине и раствор који садржи 50% сирћетне киселине и добијено је 10 литара раствора који садржи 45% сирћетне киселине. Колико литара којег раствора је употребљено?

Решење:

Ако је x количина првог раствора сирћетне киселине (од 30%), а y количина другог раствора сирћетне киселине (од 50%), онда је $x + y = 10$ и $0{,}3x + 0{,}5y = 10 \cdot 0{,}45$. Решење добијеног система једначина дато је следећим низом еквивалентних система једначина

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0{,}3x + 0{,}5y = 10 \cdot 0{,}45 \;/ \cdot 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 5y = 45 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ 3(10 - y) + 5y = 45 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 10 - y \\ 30 - 3y + 5y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ 30 + 2y = 45 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 10 - y \\ 2y = 45 - 30 = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 10 - y \\ y = 15 : 2 = 7{,}5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 10 - 7{,}5 \\ y = 7{,}5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2{,}5 \\ y = 7{,}5 \end{cases}.$$

Дакле, коришћено је 2,5 литара 30% раствора и 7,5 литара 50% раствора сирћетне киселине.

ЗАДАЦИ

80. На екскурзији је било 64 ученика. Девојчице су смештене у четворокреветне, а дечаци у трокреветне собе. Колико је било дечака, а колико девојчица, ако су употребљене две четворокреветне собе више?

81. Школа је набавила 120 уџбеника и 80 збирки задатака и платила укупно 84 000 динара. За три уџбеника плаћено је једнако као за пет збирки. Колика је цена уџбеника, а колика збирке?

82. Мира и Весна имају једнаке суме новца. Мира потроши 42 динара, а Весна 214 динара. Колико су новца имале – ако сада Мира има три пута више новца него Весна?

83. Отац и син имају заједно 60 година, а пре 5 година отац је био 4 пута старији од сина. Колико година сада има син, а колико отац?

84. Када су питали дечака колико има браће и сестара, он је одговорио да има браће колико и сестара. Када су његову сестру упитали исто питање, она је одговорила да има два пута више браће него сестара. Колико деце има у тој породици?

85. У једном магацину било је 4 пута више јабука него у другом. Када је из већег магацина издато 950 kg, а из мањег 50 kg јабука, на оба места је остала иста количина јабука. Колико је јабука било у сваком од магацина?

86. У једној посуди има два пута више млека него у другој. Када се из сваке посуде одлије по 20 литара млека, онда у првој посуди има три пута више млека него у другој. Колико млека је у свакој од посуда било на почетку?

87. Ако се помеша 20 литара воде чија је температура x°C са 30 литара воде чија је температура y°C, добија се мешавина чија је температура 26°C. Ако се помеша 30 литара воде чија је температура x°C са 20 литара воде чија је температура y°C, добија се мешавина чија је температура 24°C. Одреди температуре x и y.

88. Воз се креће од града A ка граду B и по реду вожње стиже за 8 сати. Ако се брзина воза увећа за 20 km/h, воз ће у станицу B ући 2 сата пре времена предвиђеног редом вожње. Ако се брзина воза смањи за 20 km/h, воз ће у станицу B ући 3 сата после времена предвиђеног редом вожње. Колика је брзина воза, а колико растојање између A и B?

89. Дата је електронска збирка задатака – *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs/). Реши Тест 254.

90. Збир два броја је 2 010, а њихов количник је $\frac{3}{7}$. О којим бројевима је реч?

91. Два броја се разликују за 19, а збир њихових трећина је 27. Који су то бројеви?

92. Збир два броја је три пута већи од њихове разлике. Ако се један број сабере са 10, а од другога се одузме 10, добијају се једнаки бројеви. О којим бројевима је реч?

93. Збир цифара двоцифреног броја је 7, а разлика тог двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама, али у обрнутом поретку је 45. О ком двоцифреном броју је реч?

94. Колико има двоцифрених бројева који су четири пута већи од збира својих цифара?

95. Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом редоследу је 99. Колико има таквих бројева?

96. Збир два броја је 234, а њихов производ се не мења када један од њих увећамо за 20, а други смањимо за 20. Одреди те бројеве.

97. Збир бројиоца и имениоца разломка је 100. Када се бројилац разломка повећа 25%, а именилац разломка умањи 25%, разломак се увећа за 1. О ком разломку је реч?

98. Суплементни углови се разликују за 24°. Израчунај угао који је комплементан мањем од њих?

99. Обим једнакокраког троугла је 72 cm, а крак је за 6 cm већи од основице. Колика је површина тог једнакокраког троугла?

100. Странице два квадрата разликују се за 7 cm, а њихове површине се разликују за 189 cm^2. Колике су странице тих квадрата?

101. Израчунај обим круга описаног око правоугаоника чији је обим 140 cm, ако се странице правоугаоника разликују за 10 cm.

102. Обим правоугаоника је 120 cm. Ако се једна страница повећа 25%, а друга 50%, обим правоугаоника се повећа за једну трећину. Колика је површина правоугаоника?

Предлог задатака за додатни рад

1. Реши системе једначина:

а) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y=3 \\ x=1 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-z=2 \\ x-y=1 \end{cases}$.

2. Реши систем једначина: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+3y^2=7 \\ x+y=1 \end{cases}$.

3. Колико решења има систем једначина: $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$?

4. Одреди решење система једначина $\begin{cases} x+y+z=66 \\ x-y+z=44 \end{cases}$ $(x, y, z \in R)$.

5. Дат је систем једначина $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 21y-14x=28a \end{cases}$. Одреди све реалне бројеве a за које:

а) систем има бесконачно много решења; **б)** нема решења.

6. Дат је систем једначина: $\begin{cases} a^2x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$. За које вредности параметра a систем има бесконачно много решења, а за које вредности параметра a нема решења?

7. Колико решења има систем једначина: $\begin{cases} |x|+2|y|=7 \\ 3|x|-4|y|=1 \end{cases}$?

8. Одреди решења система једначина: $\begin{cases} x+y-z=2017 \\ x+y+z=2019 \\ |x|+y+z=2021 \end{cases}$.

9. Двадесет шибица кошта x динара, а x шибица кошта 500 динара. Колико кошта 2020 шибица?

10. Три каубоја су ушла у ресторан. Први је купио 4 сендвича, чашу кафе и 10 палачинки, и за то платио 6 долара и 76 центи. Други је купио 3 сендвича, чашу кафе и 7 палачинки и за то платио 5 долара и 4 цента. Колико је трећи каубој платио за сендвич, чашу кафе и палачинку?

11. Краљ је рекао краљици: „Сада ја имам два пута више година него што сте имали Ви када је мени било онолико година колико је Вама сада. Када Ви будете имали онолико година колико их сада имам ја, онда ћемо заједно имати 63 године". Колико година сада имају краљ и краљица?

12. У истраживању јавног мњења хиљаду наставника математике је у анкети одговарало на питање: „Да ли ће новоуведена *мала матура* дати боље резултате од старог пријемног испита?" Од анкетираних наставника, a се изјаснило са да, b је констатовало да ће бити исто, а c је рекло да ће ефекти бити лошији. Истраживачи су конструисали два показатеља „оптимизма" анкетираних: $m = a + \frac{b}{2}$ и $n = a - c$. Показало се да је $m = 550$. Одреди n.

13. Шест студената седи за округлим столом. Они треба да поделе суму од 60 000 динара, тако да сваки од њих добије половину суме коју су заједно добили његови суседи. Да ли је дефинисана подела једнозначна?

14. На дну језера постоји извор који свакога дана језеро допуњава константном количином воде. Крдо слонова које броји 183 слона попије језеро за један дан, а крдо од 37 слонова за 5 дана. Колико дана би на језеру могао да пије један слон?

15. Реши систем једначина: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 7 \\ x_6 + x_7 + x_1 = 8 \\ x_7 + x_1 + x_2 = 9 \end{cases}.$

16. На Поликратово питање колико има ученика – Питагора је одговорио: „Половина мојих ученика изучава математику, четвртина тајне вечне природе, седмина проводи време у ћутању вежбајући моћ духа. Ако томе додамо још три жене, сви ученици су на броју". Колико ученика има Питагора?

17. Један римски аристократа је на самрти издиктирао следећи тестамент: „Ако моја жена роди сина, $\frac{2}{3}$ имовине остављам њему, а $\frac{1}{3}$ жени. Ако жена роди кћерку, $\frac{2}{3}$ имања остављам жени, а $\frac{1}{3}$ кћерки". Жена је родила близанце, сина и кћерку. Како треба поделити имовину? (Римски задатак о наслеђу.)

18. Трава на ливади непрестано расте. Крава попасе онолико траве колико коза и гуска заједно. Крава и коза заједно попасу траву са ливаде за 45 дана, крава и гуска за 60 дана, а коза и гуска за 90 дана. За колико дана могу крава, коза и гуска заједно да попасу целу ливаду? (Њутнов проблем.)

19. Три ливаде имају површину $\frac{10}{3}$, 10 и 24 хектара. На свакој од њих трава расте равномерно. Прву ливаду попасе 12 крава за 4 недеље, другу 21 крава за 9 недеља. Колико највише крава може пасти трећу ливаду за 18 недеља? (Њутнов задатак о три ливаде.)

20. Шездесет крава попасе ливаду за 36 дана, а 100 крава за 20 дана. За колико дана ће ливаду попасти 85 крава? Колико крава ће ливаду попасти за 30 дана? Одреди функцију $d = f(n)$ која приказује број дана d у зависности од броја крава n. Трава на ливади непрестано и равномерно расте.

21. По уговору се раднику исплаћује 48 франака за сваки радни дан, а наплаћује казна 12 франака за нерадни. После 30 дана се испоставило да раднику не треба да се исплати ниједан франак, нити да он дугује послодавцу. Колико дана је радник провео радећи? (Безуов задатак.)

22. Дато је 2 011 различитих реалних бројева, таквих да ако се сваки од њих замени са збиром осталих, добија се исти скуп бројева. Одреди производ датих бројева.

23. На табли је написано неколико позитивних реалних бројева од којих је сваки једнак једној шестини суме осталих бројева. Колико је бројева написано на табли?

24. Деца су јела бомбоне. Свако дете је појело 10 бомбона мање него сва остала деца заједно. Колико је било бомбона, а колико деце?

25. Ако је $x^2 + 2yz = x,\ y^2 + 2zx = y,\ z^2 + 2xy = z,$ онда је $\left|\,|x+y+z| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Докажи.

26. Тридесет ученика је распоређено у пет група. Сваки од њих је добио задатак да реши известан број, од 40 припремних проблема за математичку олимпијаду. На крају се испоставило да су ученици који су припадници исте групе решили једнак број проблема, а ученици из различитих група, решили различит број проблема. Колико има ученика који су решили тачно по један проблем, ако се зна да је сваки ученик решио бар један задатак?

27. Аутомат у мењачници обавља две врсте операција: ако се убаци 2 евра, он даје 3 долара и једну бомбону као поклон; ако се убаци 5 долара, он даје 3 евра и једну бомбону као поклон. Када је Влада ушао у мењачницу, имао је само доларе. Када је изашао из мењачнице, имао је мање долара него на почетку, није имао евра и имао је 50 бомбона. Колико га је „коштала" једна бомбона?

28. Одреди све правоугле троуглове чија једна катета има мерни број 8, а мерни бројеви осталих страница су природни бројеви.

29. Одреди све реалне бројеве a, b, c и d такве да је:

$a + b + c + d = 20$ и $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150.$

Питалице

1.	Једначине $x = y$ и $2x + 3y = 15$ чине систем једначина са две непознате.	**да**	**не**
2.	Уређени пар $(-1, 2)$ је решење система једначина $\begin{cases} x + y = 1 \\ 8x + y = 6 \end{cases}$.	**да**	**не**
3.	Системи једначина $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$ су еквивалентни.	**да**	**не**
4.	Систем једначина $\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 17 \end{cases}$ има јединствено решење.	**да**	**не**
5.	Систем једначина $\begin{cases} 2x = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ има тачно два решења.	**да**	**не**
6.	Ако је $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$, онда је $5y + 6x = 11$.	**да**	**не**
7.	Ако је збир два броја 53, а њихова разлика 20, онда ти бројеви нису природни.	**да**	**не**
8.	Систем једначина $\begin{cases} m = 7 \\ 2m - n = 9 \end{cases}$ има бесконачно много решења.	**да**	**не**
9.	Графици линеарних функција $x = y$ и $x + y = 12$ са x-осом граде троугао чија је површина једнака 42.	**да**	**не**
10.	Ако 2 сока и 3 сладоледа коштају 600 динара, 3 сока и 2 сладоледа коштају 650 динара, онда 2 сока и 2 сладоледа кошта 500 динара.	**да**	**не**

Предлог теста знања

1. Ако су x_o и y_o решења система једначина $\begin{cases} x = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$, онда је $x_o + y_o$ једнако:

(А) 25 **(Б)** 23 **(В)** 20 **(Г)** 19 **(Д)** 17

2. Ако је $\begin{cases} a = 3 + b \\ b = 7 - a \end{cases}$, онда је ab једнако:

(А) 8 **(Б)** 10 **(В)** 12 **(Г)** 14 **(Д)** 16

3. Решење система једначина $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ је

(А) (4, 4) **(Б)** (0, –2) **(В)** (5, 3) **(Г)** (2, 1) **(Д)** (2, –1)

4. Број решења система једначина $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 6x + 10y = 16 \end{cases}$ је

(А) 0 **(Б)** 1 **(В)** 2 **(Г)** 5 **(Д)** бесконачно

5. Ако је уређени пар (x_o, y_o) решење система једначина $\begin{cases} x + 4y = 13 \\ 4y - x = 11 \end{cases}$, онда је:

(А) $y_o = 4x_o$ **(Б)** $y_o = 3x_o$ **(В)** $y_o = 2x_o$ **(Г)** $y_o = x_o$ **(Д)** $y_o = 5x_o$

6. Површина троугла који граде графици функција $y = x$ и $2x + y = 12$ са y-осом је:

(А) 16 **(Б)** 20 **(В)** 24 **(Г)** 28 **(Д)** 36

7. Обим једнакокраког троугла је 30 cm, а крак је дужи од основице за 3 cm. Тада је збир дужина крака и основице једнакокраког троугла једнак:

(А) 18 cm **(Б)** 19 cm **(В)** 20 cm **(Г)** 21 cm **(Д)** 22 cm

8. Ако се новчаница од 1 000 динара размени за 320 новчића од 2 и 5 динара, онда је број новчића од 2 динара већи од броја новчића од 5 динара за:

(А) 64 **(Б)** 67 **(В)** 70 **(Г)** 75 **(Д)** 80

Предлог контролне вежбе

7.1.	Напиши један систем једначина који је еквивалентан са системом $\begin{cases} x+y=11 \\ 2x=8 \end{cases}$.	**(12)**
7.2.	Да ли су системи једначина $\begin{cases} x=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=1 \\ x+5y=9 \end{cases}$ еквивалентни?	**(16)**
7.3.	Напиши бар два система једначина еквивалентних систему $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 3x-4y=13 \end{cases}$.	**(20)**
7.4.	Методом смене, реши систем једначина $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ y=1 \end{cases}$.	**(12)**
7.5.	Методом смене, реши систем једначина $\begin{cases} 5x-7y=17 \\ 3x-y=7 \end{cases}$.	**(16)**
7.6.	Методом смене, реши систем једначина $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ 2x-5y=-29 \end{cases}$.	**(20)**
7.7.	Одреди решење система једначина $\begin{cases} 7x+4y=15 \\ 9x-4y=1 \end{cases}$ методом супротних коефицијената.	**(12)**
7.8.	Одреди решење система једначина $\begin{cases} 0{,}6x+0{,}7y=0{,}5 \\ 0{,}8x+0.9y=0{,}7 \end{cases}$.	**(16)**
7.9.	Одреди решење система једначина $\begin{cases} 4(x-3)=5(y-7) \\ 6x+7y=67 \end{cases}$.	**(20)**
7.10.	Графичком методом одреди решење система једначина $\begin{cases} y=4-2x \\ y=3x-1 \end{cases}$ и провери тачност добијеног решења.	**(12)**
7.11.	Одреди површину трапеза који функција $x=y$, $y=5, x+y=15$ и x-оса.	**(16)**
7.12.	Одреди површину троугла који чине кога чине графици функција $x=y, x+y=14$ и $y=-3$.	**(20)**
7.13.	Дара и Мара имају заједно 1 000 динара. Дара има 100 динара више од Маре. Колико новца има Дара, а колико Мара?	**(12)**
7.14.	Пастир Пера је на ливади чувао гуске и јагањце. У намери да прекрати досаду, пребројао је 100 глава и 270 ногу. Колико је било гусака, а колико јагањаца.	**(16)**
7.15.	Збир цифара двоцифреног природног броја n је 12. Ако се од броја n одузме број написан истим цифрама у обрнутом редоследу, разлика је 18. Одреди n.	**(20)**

8 ВАЉАК, КУПА, ЛОПТА

пример 1

пример 2

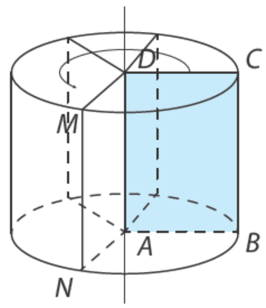
пример 3

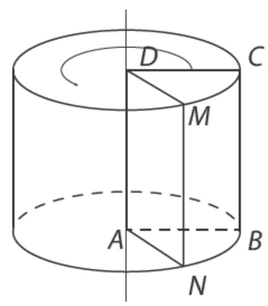
8.1. ВАЉАК

8.1.1. Основни елементи ваљка

Посматрајмо правоугаоник *ABCD*. Када се овај правоугаоник обрне за цео круг око своје странице *AD*, скуп тачака простора кроз које је „прошао" правоугаоник називамо ваљак. Зато за ваљак кажемо да је обртно тело.

Приликом обртања правоугаоника, странице *AB* и *DC* описују два подударна круга, *K*(*A*, *AB*) и *K*(*D*, *DC*), који припадају паралелним равнима и које називамо основе (базе) ваљка. Дужи *AB* и *DC* су полупречници основе ваљка.





Растојање између основа ваљка је висина ваљка. Висина ваљка је дужина дужи *AD*.

Права која садржи страницу *AD* називамо *оса ваљка*.

Површ коју описује страница *BC* правоугаоника састоји се од свих дужи *MN* које су паралелне и подударне са дужи *BC*, при чему тачка *M* припада кружној линији *k*(*A*, *AB*), а тачка *N* припада кружној линији *k*(*D*, *DC*). Ову површ називамо омотач ваљка, а у употреби је и реч цилиндар.

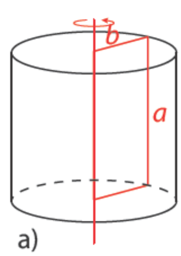
Дуж *MN* називамо и изводница ваљка и њена дужина једнака је висини ваљка.

пример 1

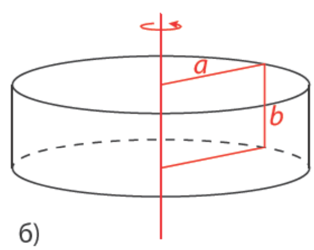
Правоугаоник страница 9 cm и 5 cm обрће се око своје странице: а) дуже, б) краће. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијеног ваљка.

Решење:

Означимо странице правоугаоника са $a = 9$ cm и $b = 5$ cm, полупречник основе ваљка са r, висину са H и изводницу са s. Размотримо следеће случајеве:



а)



б)

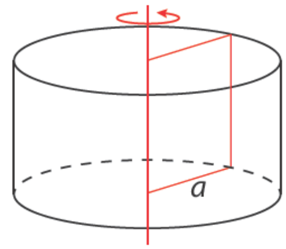
а) Нека се правоугаоник обрће око своје дуже странице. Тада је полупречник основе ваљка једнак краћој страници правоугаоника, тј. $r = b = 5$ cm, а висина ваљка и његова изводница једнаке су дужој страници правоугаоника, односно $H = s = a = 9$ cm;

б) Нека се правоугаоник обрће око своје краће странице (слика десно). Тада је полупречник основе ваљка једнак дужој страници правоугаоника, тј. $r = a = 9$ cm, а висина ваљка и његова изводница једнаке су краћој страници правоугаоника, односно $H = s = b = 5$ cm.

пример 2

Квадрат странице 4 cm обрће се око једне своје странице. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијеног ваљка.

Решење:



Ако страницу квадрата означимо са a, полупречник основе ваљка са r, његову висину са H и изводницу са s, тада је (види слику) $r = a = 4$ cm, $H = a = 4$ cm, $s = a = 4$ cm.

пример 3

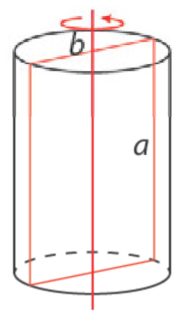
Правоугаоник страница 2 dm и 14 cm обрће се око једне своје осе симетрије. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијеног ваљка. Колико решења има овај задатак?

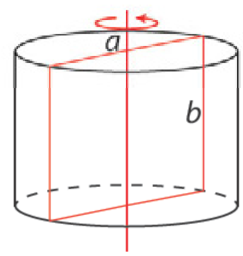
Решење:

Означимо странице правоугаоника са $a = 2$ dm $= 20$ cm и $b = 14$ cm, полупречник основе ваљка са r, висину са H и изводницу са s. Размотримо следеће случајеве:

а) Ако се правоугаоник обрће око осе симетрије која је паралелна дужој страници правоугаоника (слика лево), тада је $r = \frac{b}{2} = 7$ cm, $H = a = 20$ cm, $s = a = 20$ cm;

б) Ако се правоугаоник обрће око осе симетрије која је паралелна краћој страници правоугаоника (слика десно), тада је: $r = \frac{a}{2} = 10$ cm, $H = b = 14$ cm, $s = b = 14$ cm.



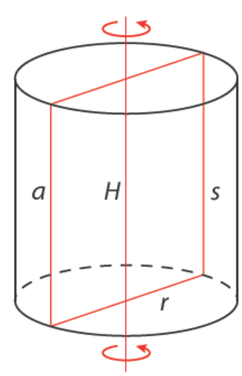


пример 4

Квадрат дужине странице 12 cm обрће се око једне своје осе симетрије која не садржи теме квадрата. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијеног ваљка.

Решење:

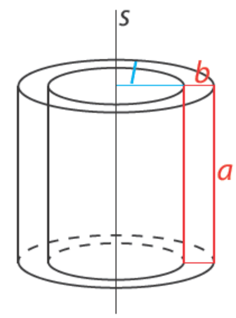
Ако страницу квадрата означимо са a, полупречник основе ваљка са r, његову висину са H и изводницу са s, тада је (види слику) $r = \frac{a}{2} = 6$ cm, $H = a = 12$ cm, $s = a = 12$ cm.



пример 5

Правоугаоник дужина страница $a = 1$ m и $b = 1$ cm обрће се око праве s, која је у равни правоугаоника, паралелна је његовим дужим страницама, а растојање од ближе странице правоугаоника је $l = 1$ dm. Какво тело формира правоугаоник при таквом обртању?

Решење:



При оваквом обртању правоугаоника формира се тело облика цеви. Дужина цеви је $a = 1$ m, „спољашњи" полупречник је $l + b = 11$ cm, а „унутрашњи" $l = 10$ cm. Дебљина „зида" цеви је $b = 1$ cm. Ово тело можемо добити и када из ваљка, висине 1 m, чија је оса права s и полупречник 11 cm, „извучемо" ваљак висине 1 m чија је оса такође права s, али је полупречник 10 cm.

ЗАДАЦИ

1. Квадрат обима 100 cm обрће се око једне своје странице. Израчунај полупречник, висину и изводницу добијеног тела.

2. Квадрат површине 36 cm^2 обрће се око своје осе симетрије која не садржи теме квадрата. Израчунај полупречник, висину и изводницу добијеног тела.

3. Правоугаоник страница $a = 8$ cm и $b = 12$ cm обрће се око:

а) своје краће странице,
б) своје дуже странице,
в) осе симетрије краћих страница,
г) осе симетрије дужих страница.

Израчунај полупречник, висину и изводницу добијеног тела.

4. Правоугаоник површине 144 cm^2 и краће странице 9 cm обрће се око:

а) своје краће странице,
б) своје дуже странице,
в) осе симетрије краћих страница,
г) осе симетрије дужих страница.

Израчунај полупречник, висину и изводницу добијеног тела.

5. Правоугаоник обима 80 cm и дуже странице 24 cm обрће се око:

а) своје краће странице,
б) своје дуже странице,
в) осе симетрије краћих страница,
г) осе симетрије дужих страница.

Израчунај полупречник, висину и изводницу добијеног тела.

6. Ваљак полупречника 6 cm и висине 12 cm може настати обртањем неке фигуре. Наведи бар две фигуре чијим обртањем може настати такав ваљак.

7. Квадрат странице 4 cm обрће се око праве која је у равни квадрата, паралелна је двема страницама и налази се на растојању 9 cm од ближе странице квадрата. Објасни какво тело настаје на овај начин.

8. Правоугаоник чије су странице $a = 7$ cm и $b = 12$ cm обрће се око праве која је у равни правоугаоника, паралелна је краћим страницама и налази се на растојању 1 cm од ближе странице правоугаоника. Објасни какво тело настаје на овај начин.

Равни пресеци ваљка 8.1.2.

Пресеци тела и равни могу нам помоћи да стекнемо бољу слику о телу.

Посматраћемо пресеке ваљка равнима нормалним на осу ваљка, као и пресеке ваљка равнима паралелним са осом ваљка.

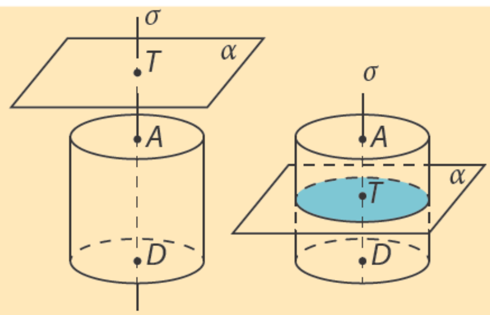
Уколико је раван нормална на осу σ ваљка и сече је у тачки T, тада је пресек ваљка и овакве равни:

- празан скуп, уколико тачка T не припада висини ваљка,
- круг, уколико тачка T припада висини ваљка. Тада је полупречник пресека једнак полупречнику основе ваљка.

Пресек у другом случају називамо попречни (паралелни) пресек ваљка.

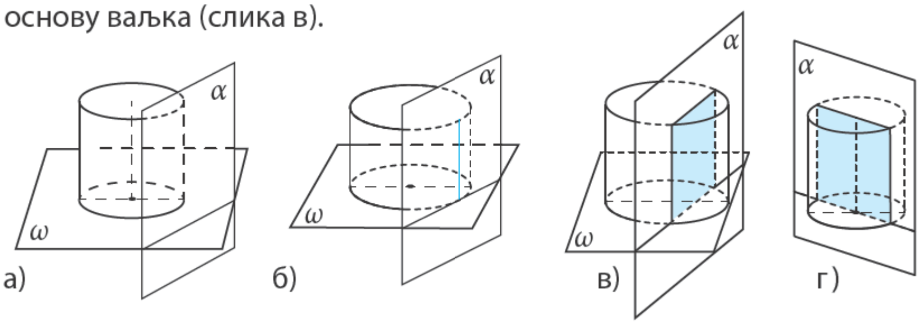
Површина попречног пресека ваљка је

$$P_{pp} = r^2\pi.$$



Раван која је паралелна са осом ваљка, нормална је на равни обе основе ваљка. Пресек ваљка и овакве равни је:

- празан скуп, уколико пресечна права равни и равни једне основе ваљка нема заједничких тачака са кругом, основом ваљка (слика а),
- дуж, уколико пресечна права равни и равни једне основе ваљка додирује круг, основу ваљка, пресек је изводница ваљка (слика б),
- правоугаоник, уколико пресечна права равни и равни једне основе ваљка сече круг, основу ваљка (слика в).



а) б) в) г)

Ако раван садржи осу ваљка (слика г), такав пресек зовемо осни пресек.
Осни пресек ваљка је правоугаоник чије су странице пречник основе и висина ваљка.

Површина осног пресека ваљка је

$$P_{op} = 2rH.$$

тврђење

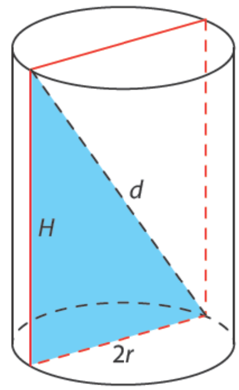
Дијагоналу осног пресека ваљка називамо дијагонала ваљка.

Дужину дијагонале ваљка рачунамо користећи Питагорину теорему:

$$d^2 = (2r)^2 + H^2.$$

пример 1

Полупречник ваљка је 3 cm, а висина 8 cm (види слику). Израчунај површину осног пресека и дијагоналу ваљка.



Решење:

Нека је полупречник основе ваљка r и висина H. Тада је површина осног пресека ваљка $P_{op} = 2\,r\,H$, односно $P_{op} = 48\ cm^2$. Дијагоналу ваљка рачунамо користећи Питагорину теорему, $d^2 = (2\,r)^2 + H^2$ одакле следи да је $d = 10$ cm.

пример 2

Осни пресек ваљка је квадрат површине 64 cm². Израчунај полупречник и висину ваљка.

Решење:

Нека је a страница квадрата – осног пресека ваљка. Тада је $a^2 = 64\ cm^2$, односно $a = 8$ cm. Како је страница квадрата једнака пречнику основе ($2r = a$) и висини ваљка ($H = a$), добијамо да је $r = 4$ cm, односно $H = 8$ cm.

пример 3

Површина осног пресека ваљка је 72 cm², а полупречник ваљка је 4 cm. Израчунај висину и површину попречног пресека ваљка.

Решење:

Полупречник основе ваљка обележимо са r, а висину са H. Како је површина осног пресека $P_{op} = 2r\,H = 72\ cm^2$ и $r = 4$ cm, добијамо да је $H = 9$ cm. Површина попречног пресека је $P_{pp} = r^2\,\pi$, односно $P_{pp} = 16\pi\ cm^2$.

пример 4

Обим осног пресека ваљка је 128 cm, а полупречник је за 8 cm дужи од висине ваљка. Израчунај површину осног пресека и попречног пресека ваљка.

Решење:

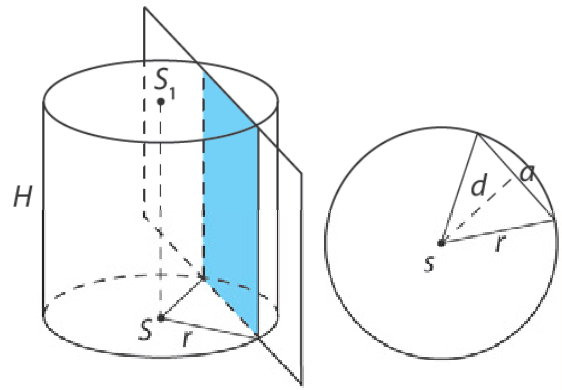
Осни пресек ваљка је правоугаоник чије су странице пречник и висина ваљка. Његов обим је $O_{op} = 4r + 2H = 128$ cm. Како знамо да је $r = H + 8$ cm, замењујући у претходну једнакост добијамо $4\,(H + 8) + 2H = 128$, одакле следи да је $H = 16$ cm и $r = 24$ cm. Дакле, површина осног пресека ваљка је $P_{op} = 2r\,H = 768\ cm^2$, а површина попречног пресека $P_{pp} = r^2\,\pi = 576\,\pi\ cm^2$.

пример 5

Ваљак полупречника 5 cm и висине 8 cm пресечен је са равни која је паралелна са осом ваљка и на растојању је 3 cm од ње. Израчунај површину пресека те равни и ваљка.

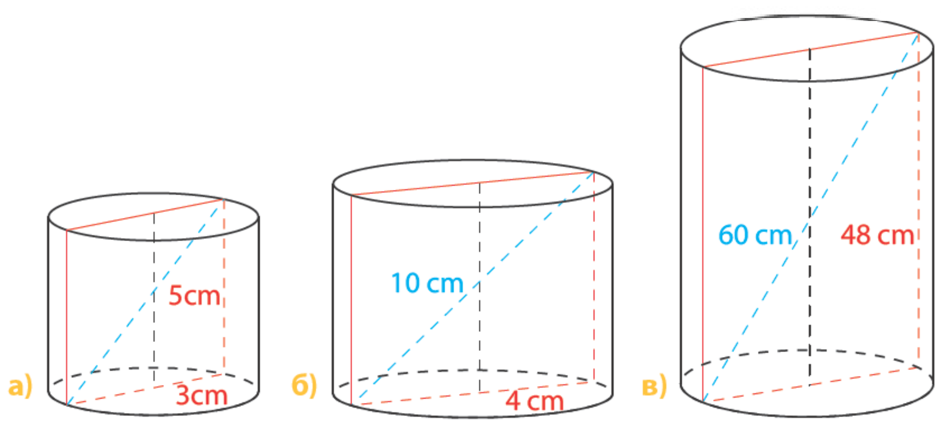
Решење:

Нека је r полупречник основе ваљка, H његова висина, a страница пресека равни и основе и d растојање ове равни од осе ваљка (види слику). Тада је $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$, одакле следи $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 16$, односно $a = 8$ cm. Површина траженог пресека је $P_p = aH = 64\ \text{cm}^2$.



ЗАДАЦИ

9. Израчунај површине осних пресека ваљака са слике:



10. Израчунај дужину дијагонале и површину осног пресека ваљка полупречника 5 cm и висине 24 cm.

11. Површина осног пресека ваљка је 108 cm², а његова висина је 9 cm. Израчунај полупречник и површину попречног пресека ваљка.

12. Површина осног пресека ваљка је 72 cm², а његов полупречник је 8 cm. Израчунај висину ваљка.

13. Дијагонала осног пресека ваљка је 13 cm, а висина ваљка је 5 cm. Израчунај полупречник ваљка.

14. Полупречник основе и висина ваљка односе се као 2 : 5. Израчунај површину осног пресека ваљка, ако је његов обим 252 cm.

15. Полупречник основе и висина ваљка односе се као 3 : 8. Израчунај површину осног пресека ваљка, ако је његова дијагонала 50 cm.

16. Полупречник основе и дијагонала осног пресека ваљка односе се као 3 : 10. Израчунај површину осног пресека ваљка, ако је његова висина 24 cm.

17. Обим осног пресека ваљка је 36 cm, а висина је за 6 cm дужа од полупречника ваљка. Израчунај површину осног и попречног пресека ваљка.

18. Обим осног пресека ваљка је 44 cm, а висина је за 8 cm краћа од полупречника ваљка. Израчунај површину осног и попречног пресека ваљка.

19. Површина попречног пресека ваљка је $169\pi\,cm^2$, а осни пресек је квадрат. Израчунај површину осног пресека ваљка.

20. Дијагонала ваљка је 20 cm и са равни основе гради угао од 60°. Израчунај површину осног пресека тог ваљка.

21. Дијагонала ваљка је 16 cm и са равни основе гради угао од 45°. Израчунај површину осног пресека тог ваљка.

22. Дијагонала ваљка са равни основе гради угао од 30°. Израчунати површину осног пресека ваљка, ако је његова висина 12 cm.

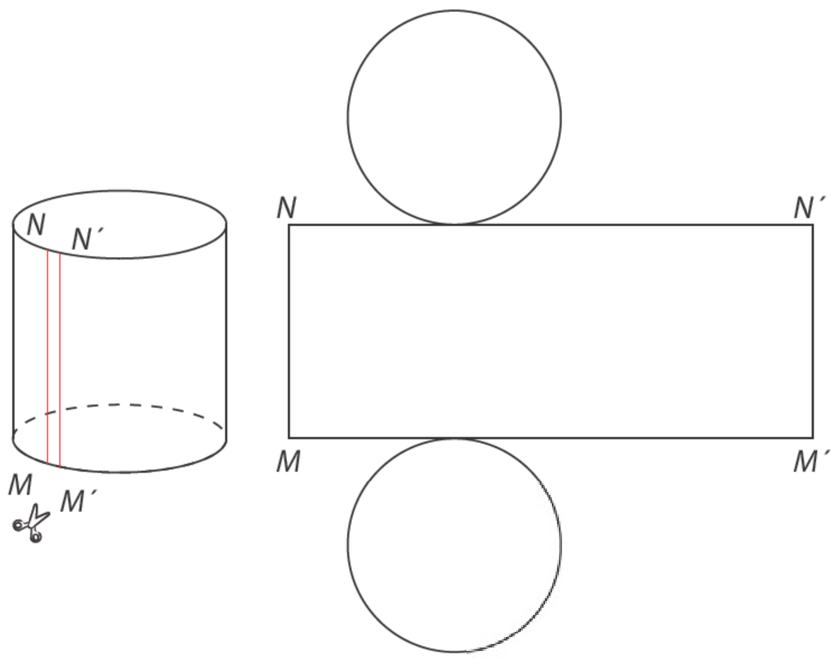
23. Дијагонале осног пресека ваљка граде угао од 60°. Израчунати површину осног пресека ваљка, ако је његова висина 8 cm.

24. Пресек равни, која је паралелна оси, и ваљка је квадрат површине 900 cm^2. Ако је полупречник ваљка 17 cm, израчунај растојање ове равни од осе ваљка.

25. Пресек равни, која је паралелна оси, и ваљка је квадрат површине 36 cm^2. Ако је тетива основе, одређена овим пресеком, једнака полупречнику ваљка, израчунај растојање ове равни од осе ваљка.

Мрежа ваљка, површина ваљка 8.1.3.

Ваљак је „ограничен” двема основама, подударним круговима и омотачем. Замислимо да овај омотач „исечемо” дуж једне изводнице MN и развијемо у раван. Добићемо правоугаоник $MNN'M'$, где су MN и $M'N'$ заправо две исте изводнице. Дужине страница правоугаоника MN и $M'N'$ једнаке су висини ваљка, дакле $MN = H$, док су дужине страница MM' и NN' једнаке обиму основе ваљка, односно $MM' = 2\,r\,\pi$. Ако овом правоугаонику додамо два круга која су подударна основама ваљка, цела површ ваљка је развијена у једну раван.



Добијену фигуру називамо **мрежа ваљка**.

Сваки ваљак је одређен својом мрежом.

Површина ваљка једнака је збиру површина његових основа и површине његовог омотача. Ако површину једне основе ваљка обележимо са B, а површину омотача ваљка са M, тада је површина ваљка

$$P = 2\,B + M.$$

тврђење

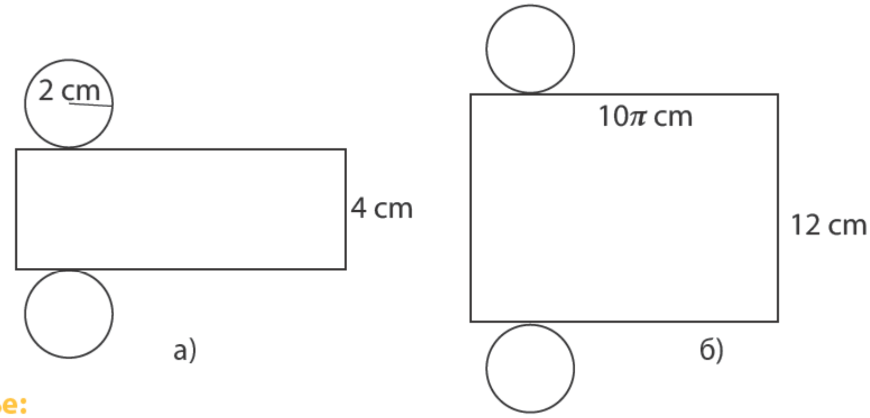
Ако је полупречник основе ваљка r, а висина H, то је $B = r^2\pi$ и $M = 2\,r\,\pi \cdot H$. Дакле, површина ваљка једнака је:

$$P = 2\,r^2\pi + 2\,r\,\pi \cdot H = 2\,r\,\pi\,(r + H).$$

тврђење

пример 1

На слици су нацртане мреже два ваљка. Одреди полупречнике основа и висине ових ваљака и израчунај њихове површине.



Решење:

а) Полупречник основе ваљка (слика а) је $r = 2$ cm и висина $H = 4$ cm. Површина основе је $B = r^2\pi = 4\pi$ cm², а површина омотача $M = 2r\pi \cdot H = 16\pi$ cm². Површина ваљка је, дакле, $P = 2B + M = 24\pi$ cm². Површину ваљка смо могли да рачунамо и овако: $P = 2r\pi\ (r + H) = 24\pi$ cm².

б) Висина ваљка (слика б) је $H = 12$ cm, а обим основе $2r\pi = 10\pi$ cm. Одавде следи да је полупречник основе ваљка $r = 5$ cm, па је његова површина $P = 2r\pi(r + H) = 170\pi$ cm².

пример 2

Израчунај површину ваљка чији је полупречник 3 cm и висина 8 cm.

Решење:

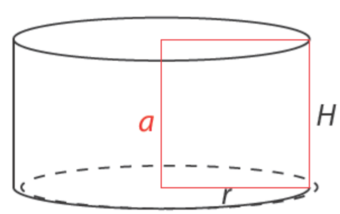
Полупречник основе ваљка обележимо са r, а висину са H. Тада је површина основе $B = r^2\pi = 9\pi$ cm², а површина омотача $M = 2r\pi \cdot H = 48\pi$ cm², одакле следи да је површина ваљка $P = 2B + M = 66\pi$ cm².

пример 3

Израчунај површину ваљка који настаје обртањем квадрата обима 16 cm око једне своје странице.

Решење:

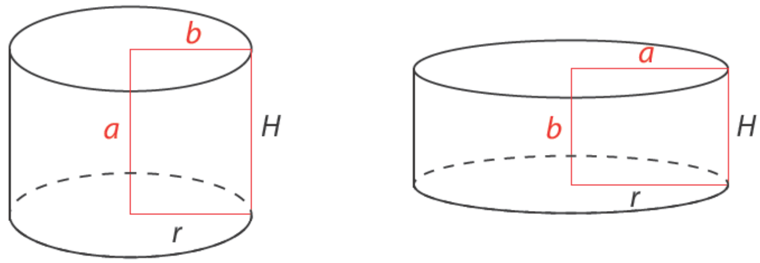
Нека је a страница датог квадрата. Тада је $4 \cdot a = 16$ cm, односно $a = 4$ cm. Ако је r полупречник основе, а H висина ваљка, тада је (види слику) $r = a = 4$ cm и $H = a = 4$ cm. Површина ваљка је $P = 2r\pi\,(r + H) = 64\pi$ cm².



пример 4

Израчунај површину ваљка који настаје обртањем правоугаоника са страницама $a = 8$ cm и $b = 6$ cm око једне од својих страница.

Решење:



Нека је r полупречник основе ваљка и H његова висина. Размотримо следеће случајеве:

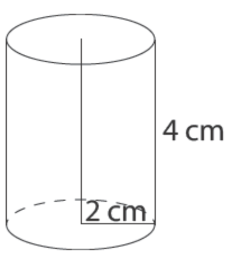
а) Ако се правоугаоник обрће око дуже странице (слика лево), тада је: $r = b = 6$ cm и $H = a = 8$ cm. Површина овог ваљка је $P = 2r\pi\,(r + H) = 168\pi$ cm^2;

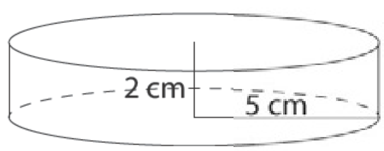
б) Ако се правоугаоник обрће око краће странице (слика десно), тада је: $r = a = 8$ cm и $H = b = 6$ cm. Површина овог ваљка је $P = 2r\pi\,(r + H) = 224\pi$ cm^2.

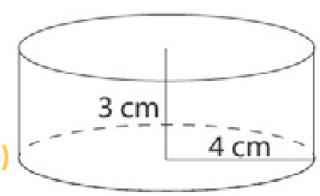
ЗАДАЦИ

26. Нацртај мрежу и направи модел ваљка чији је полупречник 2 cm и висина 5 cm. Колика је површина тог ваљка?

27. Израчунај површине ваљака чији су елементи дати на слици:

а) 

б) 

в) 

28. Израчунај површину ваљка који настаје обртањем квадрата обима 48 cm око једне своје странице.

29. Израчунај површину ваљка који настаје обртањем правоугаоника чије су странице 4 cm и 16 cm око:

а) своје краће странице,

б) своје дуже странице,

в) осе симетрије краћих страница,

г) осе симетрије дужих страница.

30. Полупречник и висина ваљка односе се као 2 : 3. Израчунај површину овог ваљка ако је његов пречник 8 cm.

31. Површина осног пресека ваљка је 15 cm^2. Израчунај површину тог ваљка ако је познато да се његова дијагонала и висина односе као 13 : 5.

32. Дијагонала осног пресека ваљка са равни основе гради угао од 45°. Ако је висина ваљка 5 cm, израчунај његову површину.

33. Дијагонала осног пресека ваљка са равни основе гради угао од 60°. Ако је полупречник основе ваљка 3 cm, израчунај његову површину.

34. Површина осног пресека ваљка је $9\sqrt{3}$ cm^2. Израчунај површину ваљка ако дијагонала његовог осног пресека са основом гради угао од 30°.

35. Омотач ваљка је квадрат површине 100 cm^2. Израчунај површину ваљка.

36. Површине основе и омотача ваљка односе се као 1 : 4. Израчунај површину ваљка ако је полупречник његове основе 2 cm.

37. Површина ваљка је 20π cm^2. Израчунај површину његовог осног пресека ако се полупречник основе и висина ваљка односе као 2 : 3.

38. Израчунај површину ваљка чија је површина попречног пресека 25π cm^2, а површина осног пресека 90 cm^2.

39. Осни пресек ваљка је квадрат површине 196 cm^2. Израчунај површину ваљка.

40. Обим осног пресека ваљка је 192 cm, а висина је четири пута дужа од полупречника ваљка. Израчунај површину ваљка.

41. Квадрат странице 6 cm обрће се око праве која је у равни квадрата, паралелна је двема страницама и налази се на растојању 7 cm од ближе странице квадрата. Израчунај површину добијеног тела.

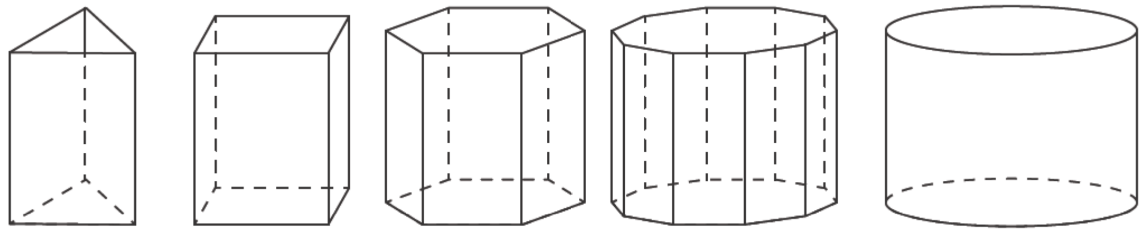
42. Правоугаоник страница 7 cm и 12 cm обрће се око праве која је у равни правоугаоника, паралелна је краћим страницама и налази се на растојању 1 cm од ближе странице правоугаоника. Израчунај површину добијеног тела.

43. Потребно је офарбати бетонску цев дужине 2 m, спољашњег полупречника 90 cm и дебљине 10 cm. Колико фарбе треба купити ако је за фарбање 1 m^2 потребно 1 200 g фарбе (фарба се и унутрашњост цеви). Узети да је $\pi \approx 3{,}14$.

44. Ако се висина ваљка повећа за 2 cm, површина ваљка се повећа за 16π cm^2. Ако се полупречник ваљка смањи за 1 cm, површина ваљка се смањи за 24π cm^2. Израчунај површину ваљка.

Запремина ваљка 8.1.4.

Посматрајмо неколико правилних призми и ваљак једнаких висина.



Запремина сваке призме једнака је производу површине њене основе и висине. Ако повећавамо број основних ивица призме, тада њена основа све више „личи" на круг, а сама призма на ваљак. Можемо закључити да се и запремина ваљка рачуна на потпуно исти начин као и запремина призме.

тврђење

Запремина V ваљка полупречника основе r и висине H једнака је:

$$V = B \cdot H, \text{ где је } B = r^2\pi.$$

пример 1

Израчунај запремину ваљка полупречника 3 cm и висине 5 cm.

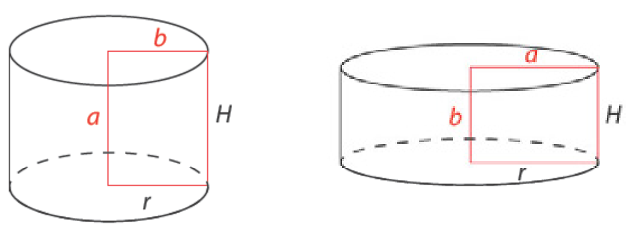
Решење:

Ако је полупречник основе ваљка r, а висина H, тада је површина основе ваљка $B = r^2\pi$, односно $B = 9\pi$ cm^2. Запремина ваљка једнака је $V = B \cdot H$, тј. $V = 45\pi$ cm^3.

пример 2

Израчунај запремину ваљка који се добија обртањем правоугаоника чије су странице $a = 8$ cm и $b = 4$ cm око:
а) дуже странице, б) краће странице.

Решење:



Нека је r полупречник основе ваљка и H његова висина. Размотримо следеће случајеве:

а) Ако се правоугаоник обрће око дуже странице (слика лево), тада је: $r = b = 4$ cm и $H = a = 8$ cm. Површина основе ваљка је $B = r^2\pi = 16\pi$ cm^2, а запремина $V = B \cdot H$, односно $V = 128\pi$ cm^3.

б) Ако се правоугаоник обрће око краће странице (слика десно), тада је: $r = a = 8$ cm и $H = b = 4$ cm. Површина основе ваљка је $B = r^2\pi = 64\pi$ cm^2, а запремина $V = B \cdot H$, односно $V = 256\pi$ cm^3.

пример 3

Израчунај висину H ваљкасте посуде полупречника $r = 8$ cm у коју може да стане 10,048 l воде (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

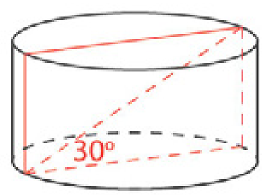
Решење:

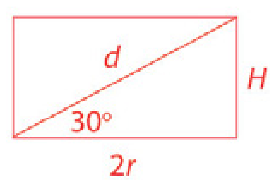
Познато нам је да је 1 l = 1 dm³, па је запремина посуде заправо $V = 10{,}048\ \text{dm}^3$. Полупречник основе ваљка је $r = 8\ \text{cm} = 0{,}8\ \text{dm}$. Како је $V = B \cdot H$, односно $V = r^2\pi \cdot H$, добијамо $10{,}048\ \text{dm}^3 \approx (0{,}8\ \text{dm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot H$, одакле следи да је висина ваљка $H \approx 5$ dm.

пример 4

Дијагонала ваљка гради са његовом основом угао од 30°. Ако је површина осног пресека овог ваљка $P_{dp} = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, израчунај његову запремину.

Решење:





Нека је полупречник основе ваљка r и висина H. Посматрајмо правоугли троугао чије су катете пречник основе и висина, а хипотенуза је дијагонала ваљка (види слику). Поменути троугао је половина једнакостраничног троугла странице d, па закључујемо да је $H = \dfrac{d}{2}$ и $2r = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$, одакле следи да је $2r = H\sqrt{3}$. Како је површина дијагоналног пресека $P_{dp} = 2r \cdot H$, добијамо $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = H\sqrt{3} \cdot H$, односно $H = 6$ cm и $r = 3\sqrt{3}$ cm. Коначно, запремина ваљка је $V = r^2\pi \cdot H$, тј. $V = 162\pi\ \text{cm}^3$.

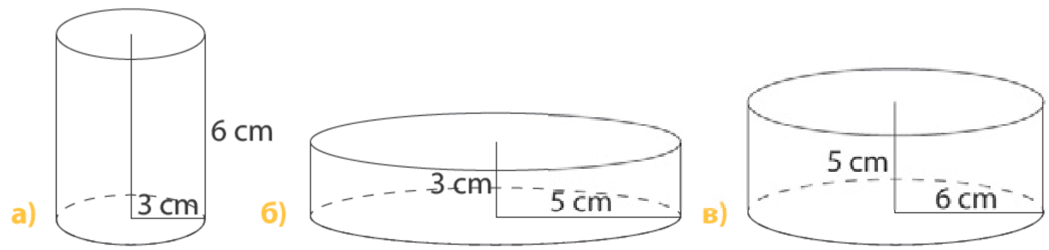
пример 5

Израчунај масу бакарне жице пречника 2 mm и дужине 100 m. Специфична густина бакра је $\rho = 8920\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

Решење:

Користићемо познату формулу из физике $m = \rho \cdot V$. Пречник жице обележићемо са $2r$, а њену дужину са H. Тада је $2r = 2\ \text{mm} = 0{,}002\ \text{m}$, односно $r = 0{,}001$ m и $H = 100$ m. Запремина бакарне жице једнака је $V = r^2\pi \cdot H$, односно $V \approx 0{,}000314\ \text{m}^3$, па је њена маса $m \approx 8920\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0{,}000314\ \text{m}^3 \approx 2{,}80088\ \text{kg} \approx 2{,}8\ \text{kg}$.

45. Израчунај запремине ваљака чији су елементи дати на слици:



46. Израчунај запремину ваљка који се добија обртањем квадрата странице 12 cm око једне његове странице.

47. Израчунај запремину ваљка који се добија обртањем правоугаоника чије су странице 6 cm и 10 cm око:

а) своје краће странице, б) своје дуже странице,

в) осе симетрије краћих страница, г) осе симетрије дужих страница.

48. Израчунај запремину ваљка полупречника 21 cm, ако је дужина дијагонале осног пресека 58 cm.

49. Израчунај запремину ваљка чији је осни пресек квадрат, а површина попречног пресека 225π cm^2.

50. Полупречник и висина ваљка односе се као 1 : 3. Израчунај запремину овог ваљка ако је пречник његове основе 6 cm.

51. Дијагонала и висина ваљка односе се као 17 : 15. Израчунај запремину ваљка ако је површина његовог дијагоналног пресека 30 cm^2.

52. Дијагонала осног пресека ваљка са равни основе гради угао од 45°. Ако је висина ваљка 2 cm, израчунај његову запремину.

53. Дијагонала осног пресека ваљка са равни основе гради угао од 60°. Ако је полупречник основе ваљка 4 cm, израчунај његову запремину.

54. Површина осног пресека ваљка је $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Израчунај запремину ваљка ако дијагонала осног пресека са равни основе гради угао од 30°.

55. Површине основе и омотача ваљка односе се као 1 : 3. Израчунај запремину ваљка ако је његова висина 6 cm.

56. Површина ваљка је 20π cm^2. Израчунај његову запремину ако се полупречник основе и висина ваљка односе као 2 : 3.

57. Висина ваљка је 8 cm, а дијагонала осног пресека са равни основе гради угао од 30º. Израчунај запремину ваљка.

58. Површина ваљка који се добија обртањем квадрата око своје странице је 256π cm². Израчунај запремину тог ваљка.

59. Омотач ваљка у развијеном облику је квадрат површине 64 cm². Израчунај запремину тог ваљка.

60. Колико кошта прављење 200 колача облика ваљка полупречника 2 cm и висине 1 cm, ако је цена 1 cm³ материјала 7 динара (узети да је $\pi \approx 3{,}14$)?

61. Запремина лонца који је облика ваљка је 6 l, а његова висина је 20 cm. Израчунај пречник лонца (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

62. Полупречник основе лименке облика ваљка је 4 cm. Израчунај висину лименке ако је њена запремина 0,5 l (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

63. Израчунај масу оловне шипке пречника 5 cm и дужине 3 m. Густина олова је $\rho = 11350\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

64. Израчунај масу гвоздене цеви дужине 4 m, унутрашњег пречника 20 mm и спољашњег пречника 24 mm. Густина гвожђа је $\rho = 7870\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

65. Бронзана олимпијска медаља облика ваљка полупречника 3 cm и висине 0,8 cm направљена је од бронзе, легуре 88% бакра и 12% калаја. Израчунај масу 150 бронзаних медаља ако је густина бакра $\rho_{Cu} = 8{,}96\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, а густина калаја $\rho_{Sn} = 7{,}31\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

8.2. КУПА

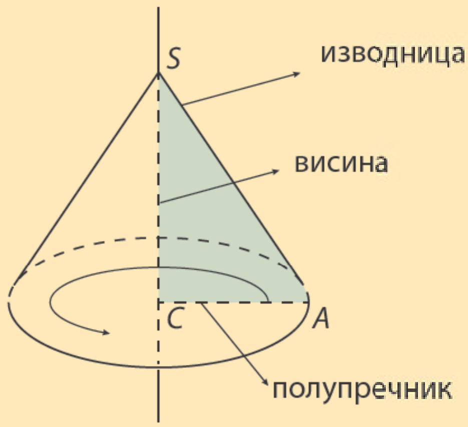
Основни елементи купе 8.2.1.

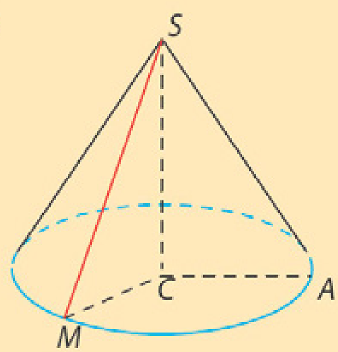
Посматрајмо правоугли троугао *ASC* са правим углом у темену *C*. Када се овај троугао обрне за цео круг око своје катете *SC*, све тачке простора кроз које је „прошао" правоугли троугао називамо ***купа***. Зато за купу кажемо да је **обртно тело**.

Приликом обртања правоуглог троугла, катета *AC* описује круг *K (C, CA)* који називамо **основа (база) купе**. Дуж *CA* је **полупречник основе купе**. Тачка *C* је **центар основе купе**, а тачка *S* је **врх купе**.

Растојање врха купе од основе је **висина купе**. Висина купе је дужина катете *SC*.

Права која садржи катету *SC* је **оса купе**.





Површ коју описује хипотенуза *AS* правоуглог троугла састоји се од свих дужи *MS*, при чему тачка *M* припада кружној линији *k (C, AC)*. Ову површ називамо ***омотач купе***, а дуж *MS* називамо још и **изводница купе**. Како су сви троуглови *MSC* подударни троуглу *ASC*, то су све изводнице купе једнаке.

пример 1

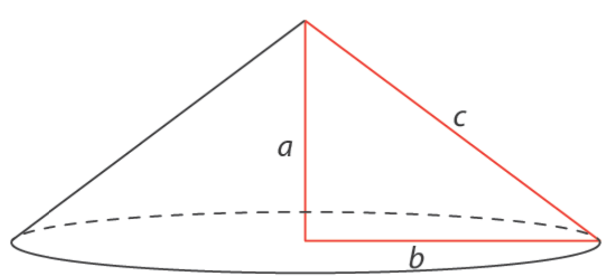
Правоугли троугао чије су катете 6 cm и 8 cm обрће се око своје краће катете. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

Решење:

Нека су $a = 6$ cm и $b = 8$ cm катете, а c хипотенуза правоуглог троугла (види слику). Тада је, на основу Питагорине теореме:

$c^2 = a^2 + b^2$, односно $c = 10$ cm.

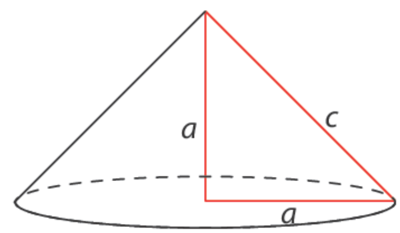
Дакле, полупречник основе купе је $b = 8$ cm, њена висина $a = 6$ cm и изводница $c = 10$ cm.



пример 2

Једнакокрако-правоугли троугао чија је хипотенуза 36 cm обрће се око своје катете. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

Решење:

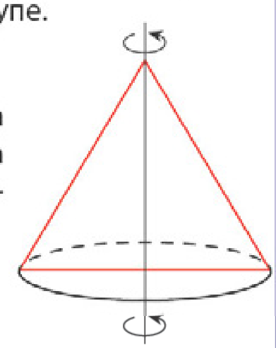


Нека је c хипотенуза и a катета овог правоуглог троугла (види слику).
Тада је $c=36$ cm и $c=a\sqrt{2}$, па је $a=18\sqrt{2}$ cm.
Полупречник основе купе и њена висина су $18\sqrt{2}$ cm, док је изводница 36 cm.

пример 3

Једнакостранични троугао странице 12 cm обрће се око своје осе симетрије. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

Решење:

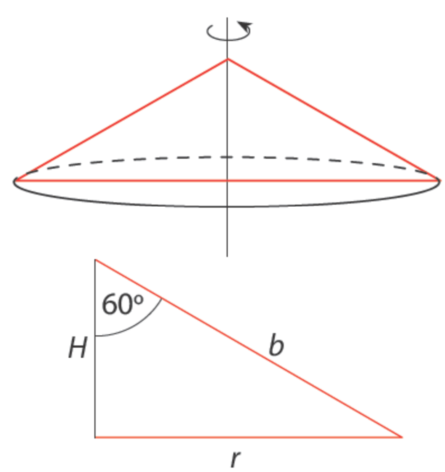


Ако страницу једнакостраничног троугла обележимо са a, тада је полупречник r основе једнак половини странице, изводница s једнака страници, а висина H купе једнака висини једнакостраничног троугла. Дакле, $r=6$ cm, $s=12$ cm и $H=6\sqrt{3}$ cm.

пример 4

Једнакокраки троугао чији је један унутрашњи угао 120° и крак 8 cm обрће се око своје осе симетрије. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

Решење:



Очигледно, унутрашњи угао при врху једнакокраког троугла је 120°. Приликом обртања овог троугла око осе симетрије, добија се купа (види слику), чији су елементи приказани на слици десно. Ако обележимо крак овог троугла са b, висину купе са H, полупречник његове основе са r и изводницу са s, тада је

$$H=\frac{b}{2}=4\,\text{cm}, r=\frac{b\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,\text{cm}, s=b=8\,\text{cm}.$$

66. Правоугли троугао чије су катете 10 cm и 24 cm обрће се око:

а) своје краће катете, б) своје дуже катете.

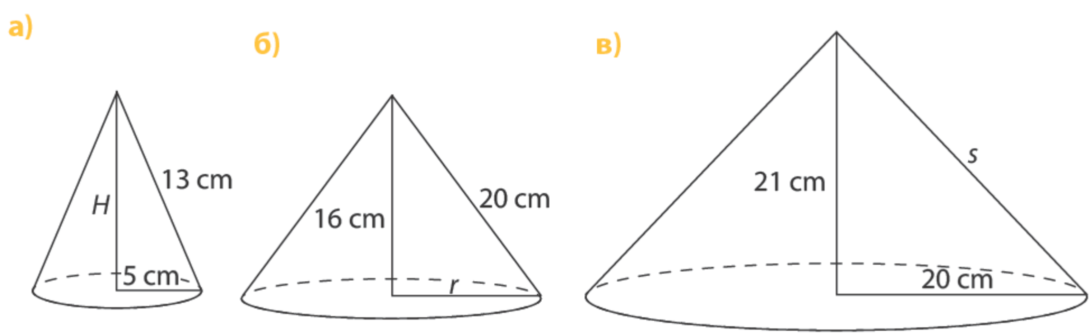
Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

67. Једнакокрако-правоугли троугао површине 18 cm^2 обрће се око:

а) своје катете, б) своје осе симетрије.

Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

68. На основу података са слика израчунај непознате елементе купа:



69. Једнакостранични троугао обима 108 cm обрће се око своје осе симетрије. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

70. Једнакокраки троугао основице 12 cm и угла на основици 30° обрће се око своје осе симетрије. Израчунај полупречник, висину и изводницу тако добијене купе.

71. Правоугли троугао чије су катете 15 cm и 20 cm обрће се око своје хипотенузе. Опиши тело које настаје таквим обртањем? Израчунај елементе добијеног тела.

72. Ромб чије су дијагонале $d_1 = 4\sqrt{2}$ cm и $d_2 = 2$ cm обрће се око једне од њих. Опиши тела која настају таквим обртањем? Израчунај елементе тако добијених тела.

73. Једнакокраки трапез чије су основице 12 cm и 2 cm, а крак 13 cm обрће се око једне од својих основица. Опиши тела која настају таквим обртањем? Израчунај елементе тако добијених тела.

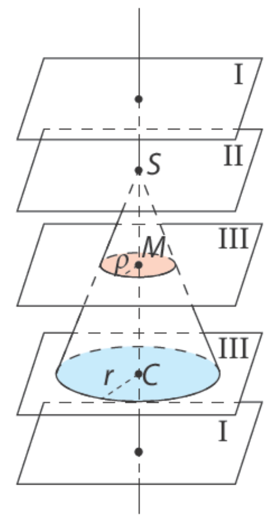
74. Правоугли трапез чије су основице 8 cm и 4 cm, а дужи крак 5 cm обрће се око једне од својих основица. Опиши тела која настају таквим обртањем? Израчунај елементе тако добијених тела.

8.2.2. Равни пресеци купе

Посматраћемо пресеке купе равнима нормалним на осу купе, као и пресеке купе равнима које садрже осу купе.

Уколико је раван нормална на осу купе (види слику) и сече је у тачки M, тада је пресек купе и овакве равни:

1) празан скуп, уколико тачка M не припада висини купе (раван I),
2) круг, уколико тачка M припада висини купе (раван III) и тада је полупречник пресека мањи или једнак полупречнику основе купе.



Пресек у случају под 2) називамо попречни пресек купе.

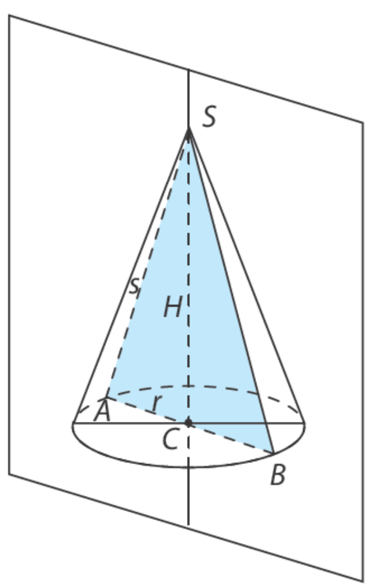
Површина попречног пресека купе је $P_{pp} = \rho^2\pi$, где је ρ полупречник попречног пресека купе.

Ако раван садржи врх купе (раван II), тада је врх купе уједно и пресек равни и купе, а ако раван садржи центар основе купе, пресек је читава основа (раван III – доле).

Равни које садрже осу купе нормалне су на раван основе купе.

Пресек купе и равни која садржи осу купе називамо осни пресек купе.

Осни пресек купе је једнакокраки троугао чија је основица пречник основе, а краци су изводнице купе.
Висина која одговара основици осног пресека купе је висина саме купе.



Ако полупречник основе купе обележимо са r, а висину са H (види слику), тада је **површина осног пресека** $P_{op} = \frac{2r \cdot H}{2}$, односно

$$P_{op} = rH.$$

Сви осни пресеци купе су подударни међу собом.

пример 1

Колика је површина осног пресека купе полупречника основе 43 cm и висине 47 cm?

Решење:

Обележимо са r полупречник основе и са H висину купе. Површина осног пресека купе једнака је $P_{op} = rH = 43 \text{ cm} \cdot 47 \text{ cm} = 2\,021 \text{ cm}^2$.

пример 2

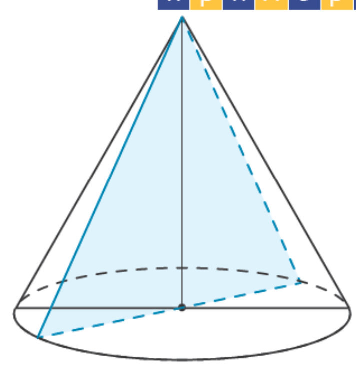
Површина осног пресека купе је 60 cm², а полупречник купе је 5 cm. Израчунај висину и изводницу купе.

Решење:

Нека је r полупречник основе купе, H висина и s њена изводница.
Тада је $P_{op} = 60 \text{ cm}^2$ и $r = 5$ cm, па из $P_{op} = rH$ следи да је $H = 12$ cm. На основу Питагорине теореме важи да је $s^2 = r^2 + H^2$, одакле следи да је $s = 13$ cm.

пример 3

Осни пресек купе је једнакостраничан троугао површине $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Израчунај полупречник, висину и изводницу купе.



Решење:

Нека је a страница једнакостраничног троугла, r полупречник основе купе, H висина и s њена изводница. Тада је $P_{op} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, одакле следи да је $a = 8$ cm. Полупречник основе купе једнак је половини странице једнакостраничног троугла, тј. $r = 4$ cm, а висина купе једнака је висини једнакостраничног троугла, односно $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, што нам даје $H = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Изводница купе једнака је страници овог троугла, односно $s = 8$ cm.

пример 4

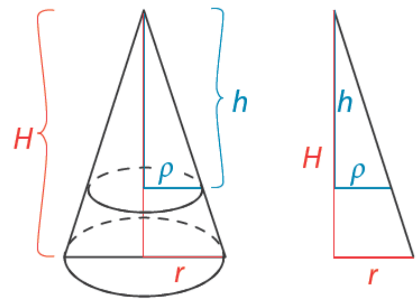
Обим осног пресека купе је 108 cm. Полупречник основе и висина купе односе се као 4 : 3. Израчунај полупречник, висину и изводницу купе, као и површину осног пресека купе.

Решење:

Полупречник основе купе обележимо са r, висину са H и изводницу са s.
Тада је $r : H = 4 : 3$, па је $r = 4x$ и $H = 3x$, где је x непознато. На основу Питагорине теореме је $s^2 = r^2 + H^2$ одакле добијамо да је $s = 5x$. Ако је O_{op} обим осног пресека купе, тада је $O_{op} = 2r + 2s = 108$ cm, односно $x = 6$ cm. Коначно је $r = 24$ cm, $H = 18$ cm, $s = 30$ cm и $P_{op} = 432 \text{ cm}^2$.

пример 5

Површина осног пресека купе је $P_{op} = 12\ \text{cm}^2$, а висина купе $H = 4$ cm. Израчунај површину оног попречног пресека купе који висину, гледајући од врха, дели у односу 3 : 1 (види слику).



Решење:

Знамо да је површина осног пресека купе $P_{op} = rH$, одакле добијамо да је $r = 3$ cm.

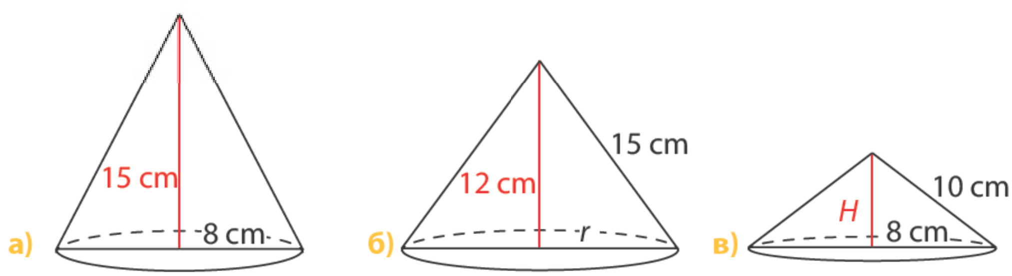
Како је $h = \frac{3}{4}H$, односно $h = 3$ cm и како из сличности троуглова

(слика десно) важи $h : H = \rho : r$, добијамо да је $\rho = \frac{9}{4}$ cm.

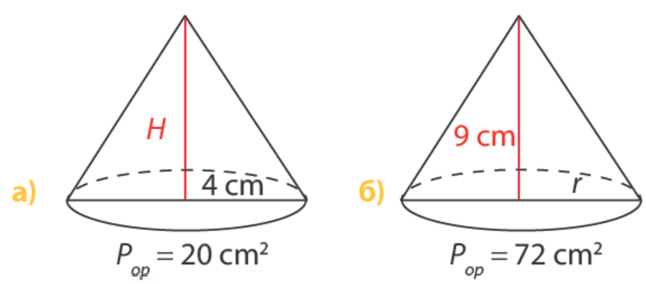
Површина попречног пресека је $P_{pp} = \rho^2\pi = \frac{81\pi}{16}\ \text{cm}^2$.

ЗАДАЦИ

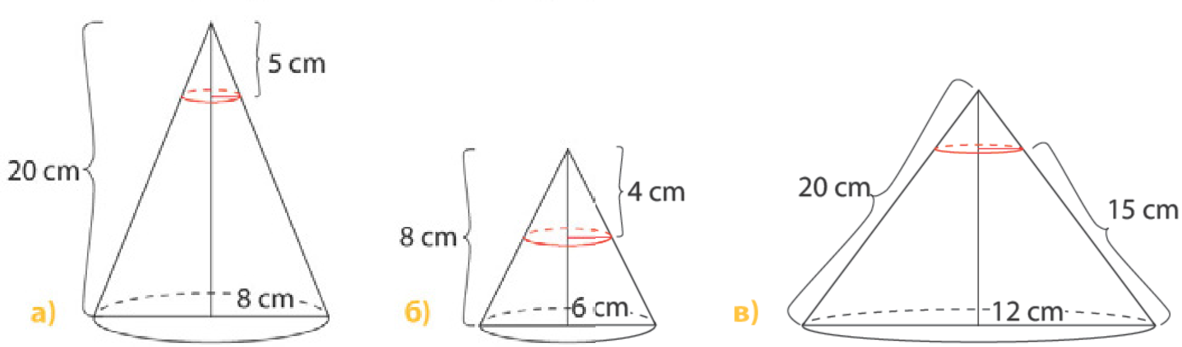
75. На основу података са слика израчунај површину осног пресека купа:



76. На основу података са слика израчунај непознате елементе купа:



77. На основу података са слика израчунај површину попречног пресека купа:



78. Висина купе је 8 cm, а површина осног пресека 48 cm^2. Израчунај полупречник основе и изводницу купе.

79. Полупречник основе купе је 10 cm, а површина осног пресека 240 cm^2. Израчунај висину и изводницу купе.

80. Осни пресек купе је једнакокрако-правоугли троугао, а висина купе је 12 cm. Израчунај изводницу и површину осног пресека купе.

81. Осни пресек купе је једнакостраничан троугао. Ако је висина купе 6 cm, израчунај површину њеног осног пресека.

82. Полупречник основе купе је 7 cm, а изводница 25 cm. Израчунај површину осног пресека те купе.

83. Изводница купе дужине 24 cm гради угао од 30° са равни основе. Израчунај површину осног пресека купе.

84. Изводница купе дужине 10 cm гради угао од 45° са равни основе. Израчунај површину осног пресека купе.

85. Површина основе купе је 144π cm^2, а површина њеног осног пресека 108 cm^2. Израчунај изводницу и висину купе.

86. Површина основе купе је 64π cm^2, а изводница 10 cm. Израчунај површину осног пресека купе.

87. Висина купе је 12 cm, а површина осног пресека 60 cm^2. Израчунај површину попречног пресека купе који дели висину купе на два једнака дела.

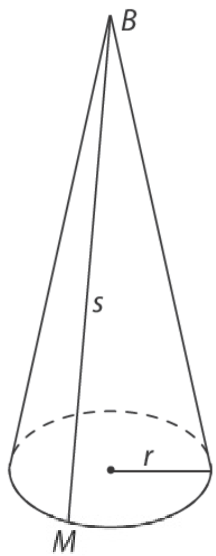
88. Висина купе је 18 cm, а површина основе купе 36π cm^2. Израчунај површине попречних пресека купе који деле висину купе на три једнака дела.

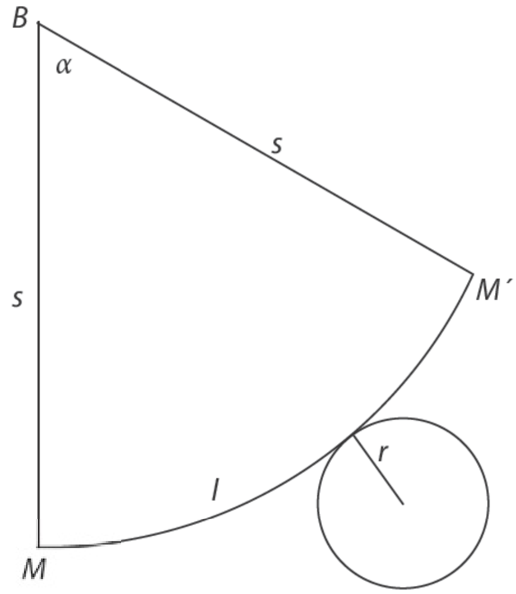
89. Купа полупречника основе 18 cm и висине 24 cm пресечена је са равни која је паралелна равни основе, на растојању 8 cm од врха купе. Израчунај површину пресека.

90. Површина основе купе је 36π cm^2, а површина једног њеног попречног пресека 16π cm^2. Пресечна раван је на растојању 3 cm од равни основе. Израчунај изводницу и висину те купе.

8.2.3. Мрежа купе, површина купе

Купа је „ограничена” основом и омотачем. Замислимо да омотач „исечемо” дуж једне изводнице MB и развијемо га у раван. Добићемо кружни исечак чији је полупречник изводница купе. Централни угао овог исечка обележимо са α, изводницу са s, полупречник основе са r, а дужину кружног лука исечка са l. Дужина кружног лука једнака је обиму основе купе, односно $l = 2r\pi$. Ако овом кружном исечку додамо круг који је подударан основи купе, можемо целу површ купе да развијемо у једну раван.





Добијену фигуру називамо **мрежа купе**. Свака купа је у потпуности одређена својом мрежом.

тврђење

Површина купе једнака је збиру површине основе и површине њеног омотача. Ако површину основе купе обележимо са B, а површину омотача купе са M, тада је њена површина

$$P = B + M.$$

Површина основе купе је $B = r^2\pi$. Површина омотача купе, односно кружног исечка једнака је $M = s^2\pi\dfrac{\alpha}{360^\circ}$. Како се дужина кружног лука може израчунати и као $l = 2s\pi\dfrac{\alpha}{360^\circ}$, замењујући $l = 2r\pi$ добијамо да је $r = s\dfrac{\alpha}{360^\circ}$, односно $s = r\dfrac{360^\circ}{\alpha}$. Коначно, површина омотача купе једнака је $M = s\cdot s\pi\dfrac{\alpha}{360^\circ} = r\cdot\dfrac{360^\circ}{\alpha}\cdot s\pi\cdot\dfrac{\alpha}{360^\circ} = r\pi s.$

тврђење

Површина купе једнака је

$$P = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s).$$

пример 1

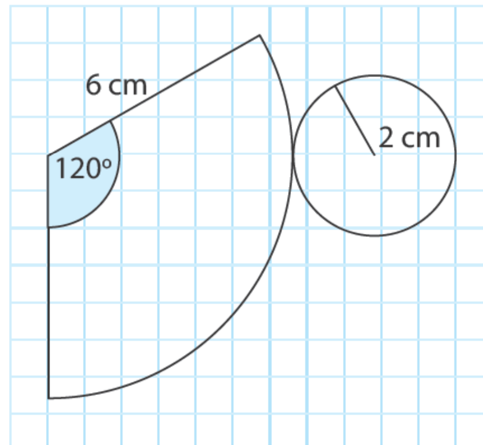
Нацртај мрежу купе чији је полупречник основе $r = 2$ cm, а изводница $s = 6$ cm. Израчунај површину те купе.

Решење:

Да бисмо нацртали мрежу купе, потребно је да знамо централни угао кружног исечка – омотача купе. Како је $s = r\dfrac{360^\circ}{\alpha}$, односно $\alpha = r\dfrac{360^\circ}{s}$, добијамо да је $\alpha = 120^\circ$.

Мрежа ове купе приказана је на слици десно. Њена површина је

$P = r\pi(r + s)$, односно $P = 16\pi\ \mathrm{cm}^2$.

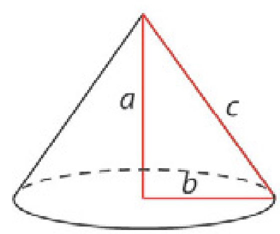


пример 2

Правоугли троугао чије су катете 6 cm и 8 cm обрће се око своје дуже катете. Израчунај површину тако добијене купе.

Решење:

Нека су катете $a = 8$ cm и $b = 6$ cm (види слику). На основу Питагорине теореме следи да је $c^2 = a^2 + b^2$, односно $c = 10$ cm. Полупречник основе је $r = b = 6$ cm и изводница $s = c = 10$ cm. Површина основе и омотача је $B = r^2\pi = 36\pi\ \mathrm{cm}^2$, односно $M = r\pi s = 60\pi\ \mathrm{cm}^2$, па је $P = B + M = 96\pi\ \mathrm{cm}^2$.
Могли смо да рачунамо и овако: $P = r\pi(r + s) = 6\pi \cdot 16$, одакле опет добијамо $P = 96\pi\ \mathrm{cm}^2$.

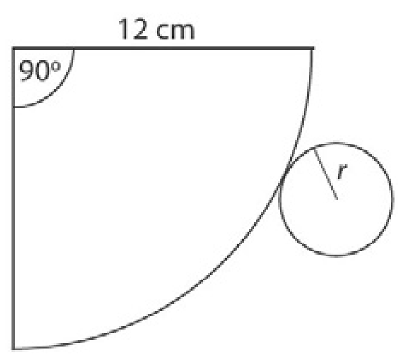


пример 3

Омотач купе, развијен у раван, је кружни исечак централног угла 90° и полупречника 12 cm (види слику). Израчунај полупречник основе купе и њену површину.

Решење:

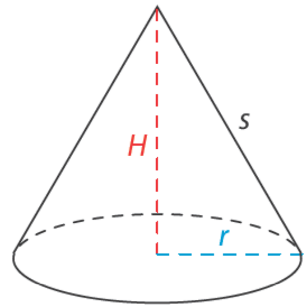
Обележимо са α централни угао кружног исечка, са s изводницу и са r полупречник основе купе. Тада је $\alpha = 90^\circ$ и $s = 12$ cm. Знамо да је $r = s\dfrac{\alpha}{360^\circ}$, одакле следи да је $r = 3$ cm.
Површина купе је $P = r\pi(r + s)$, односно $P = 45\pi\ \mathrm{cm}^2$.



пример 4

Површина омотача купе M два пута је већа од површине основе B. Израчунај површину купе ако је њена висина H = 12 cm.

Решење:



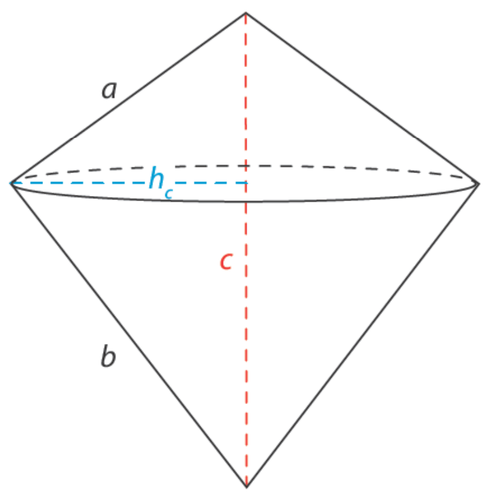
Нека је r полупречник основе купе и s њена изводница. Из услова задатка је $M = 2B$, односно $r\pi s = 2r^2\pi$, одакле добијамо да је $s = 2r$. На основу Питагорине теореме (види слику) је $s^2 = r^2 + H^2$, односно $3r^2 = 144$. Сада је $r = 4\sqrt{3}$ cm и $s = 8\sqrt{3}$ cm. Површина купе је $P = 144\pi$ cm².

пример 5

Израчунај површину тела које настаје обртањем правоуглог троугла чије су катете 15 cm и 20 cm око своје хипотенузе.

Решење:

Обртањем правоуглог троугла око хипотенузе добија се тело састављено од две купе заједничких основа.



Површина тела једнака је збиру површина омотача ове две купе. Полупречник основа купа је висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла, а изводнице су катете правоуглог троугла. Дакле, ако су катете $a = 15$ cm и $b = 20$ cm, а c хипотенуза, следи да је $c^2 = a^2 + b^2$, односно $c = 25$ cm.

Из површине овог троугла је

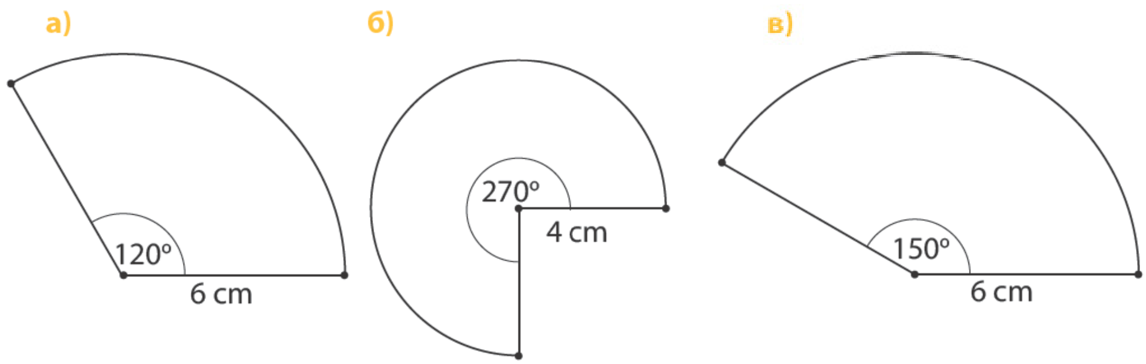
$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, односно $a \cdot b = c \cdot h_c$,

где је h_c висина троугла која одговара хипотенузи. Одавде следи да је $r = h_c = 12$ cm. Површина омотача купе чија је изводница a је $M_a = r\pi a = 180\pi$ cm² и површина омотача купе чија је изводница b је $M_b = r\pi b = 240\pi$ cm², па је површина добијеног тела $P_T = 420\pi$ cm².

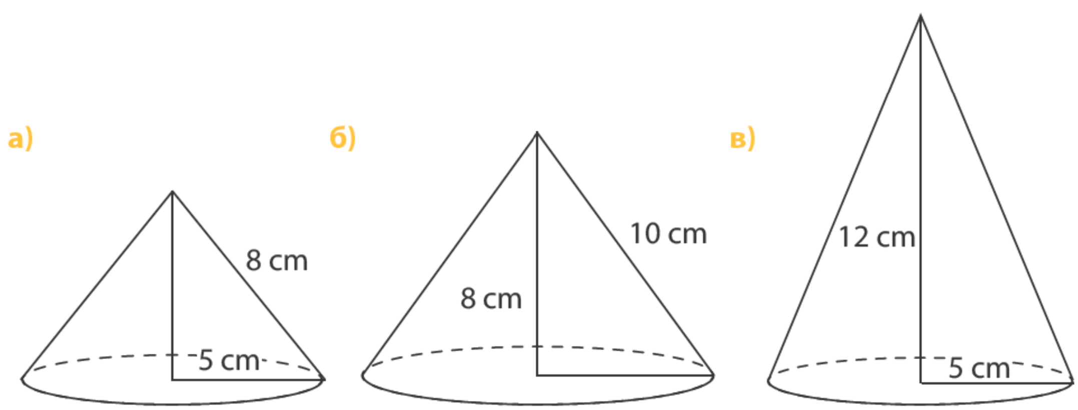
ЗАДАЦИ

91. Нацртај мрежу и направи модел купе чији је полупречник основе 4 cm и изводница 12 cm. Колика је површина те купе?

92. На слици су дати омотачи купе у развијеном облику. Израчунај полупречник основе и површине тих купа.



93. На основу података са слика израчунај површине купа:



94. Омотач купе, развијен у раван, је кружни исечак централног угла 240°. Израчунај површину купе ако је њен полупречник 6 cm.

95. Полупречник основе $r = 4$ cm и изводница купе се односе као 2 : 3. Израчунај површину купе.

96. Полупречник основе и изводница купе се односе као 3 : 5. Израчунај њену површину ако је изводница 20 cm.

97. Полупречник основе и изводница купе се односе као 8 : 17. Израчунај њену површину ако је висина купе 30 cm.

98. Изводница купе гради са равни основе угао од 60°. Израчунај површину те купе ако је полупречник основе 8 cm.

99. Изводница купе гради са равни основе угао од 30°. Израчунај површину те купе ако је њена изводница 6 cm.

100. Изводница купе гради са равни основе угао од 45°. Израчунај површину те купе ако је висина 10 cm.

101. Омотач купе изводнице 10 cm, развијен у раван представља полукруг. Израчунај површину купе.

102. Израчунај централни угао кружног исечка који се добија развијањем у раван омотача купе полупречника основе 4 cm и висине $\sqrt{20}$ cm.

103. Израчунај површину купе код које је полупречник основе 3 cm и висина $3\sqrt{3}$ cm.

104. Површина осног пресека купе је 192 cm², а полупречник основе 12 cm. Израчунај површину купе.

105. Површина осног пресека купе је 108 cm², а висина 12 cm. Израчунај површину купе.

106. Површина осног пресека купе је 48 cm², а висина купе је 6 cm. Израчунај површину купе.

107. Правоугли троугао чије су катете 6 cm и 8 cm обрће се најпре око једне, а затим око друге своје катете. Израчунај разлику површина тако добијених купа.

108. Осни пресек купе је једнакостранични троугао површине $25\sqrt{3}$ cm². Израчунај површину купе.

109. Осни пресек купе је правоугли троугао површине 144 cm². Израчунај површину купе.

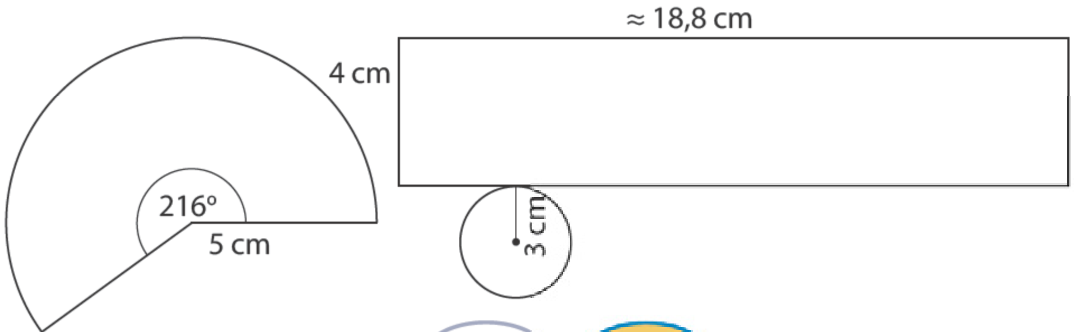
110. Правоугли трапез чије су основице 7 cm и 12 cm, а дужи крак 13 cm, обрће се око краће основице. Израчунај површину тако добијеног тела.

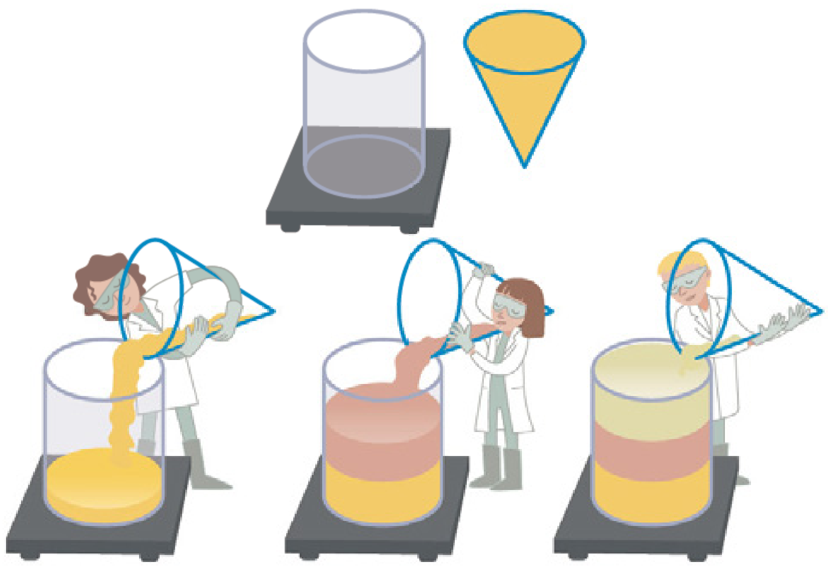
111. Правоугли трапез чије су основице 5 cm и 13 cm, а дужи крак 17 cm, обрће се око дуже основице. Израчунај површину тако добијеног тела.

112. Трапез чије су основице 20 cm и 6 cm, а краци 13 cm и 15 cm обрће се око своје краће основице. Какво тело настаје таквим обртањем? Израчунај његову површину.

Запремина купе 8.2.4.

Направи моделе отворених посуда облика ваљка и облика купе једнаких полупречника основа и једнаких висина (димензије једног пара таквих ваљка и купе дате су на слици испод). Експерименталним путем, пресипањем песка или шећера, покажи да је запремина купе једнака трећини запремине ваљка.





тврђење

Запремина купе полупречника *r* и висине *H* једнака је

$$V=\frac{1}{3}BH\text{ , односно } V=\frac{1}{3}r^2\pi H.$$

пример 1

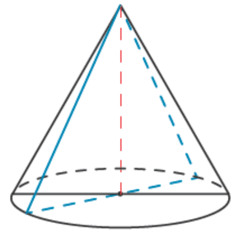
Израчунај запремину купе полупречника 4 cm и висине 6 cm.

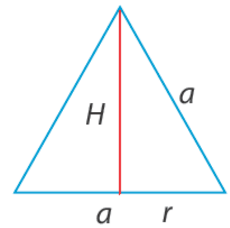
Решење:

Нека је r полупречник основе и H висина купе. Површина основе је $B = 16\pi$ cm^2, па је запремина купе $V = 32\pi$ cm^3.

пример 2

Израчунај запремину купе која се добија обртањем једнакостраничног троугла странице 12 cm око једне своје осе симетрије (види слику).





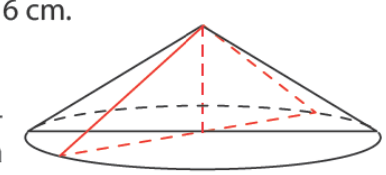
Решење:

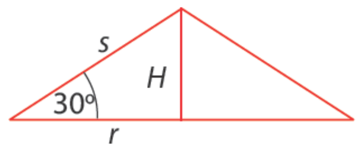
Изводница и пречник основе купе једнаки су страници једнакостраничног троугла, док је висина купе једнака висини троугла. Дакле, $2r = a = 12$ cm, односно $r = 6$ cm и $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, односно $H = 6\sqrt{3}$ cm. Површина основе је $B = 36\pi$ cm², па је запремина купе $V = 72\pi\sqrt{3}$ cm³.

пример 3

Изводница купе гради са равни основе угао од 30°. Израчунај запремину те купе ако је њена изводница $s = 6$ cm.

Решење:



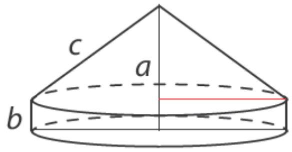


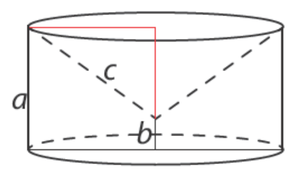
Нека је r полупречник основе, H висина купе и s њена изводница. Уочимо један осни пресек купе (види слику). Тада је $H = \frac{s}{2}$, односно $H = 3$ cm и $r = \frac{s\sqrt{3}}{2}$, односно $r = 3\sqrt{3}$ cm. Површина основе је $B = 27\pi$ cm², а запремина купе $V = 27\pi$ cm³.

пример 4

Правоугли трапез чије су основице $a = 8$ cm и $b = 2$ cm и дужи крак $c = 10$ cm обрће се око једне своје основице. Израчунај запремину тако добијеног тела.

Решење:



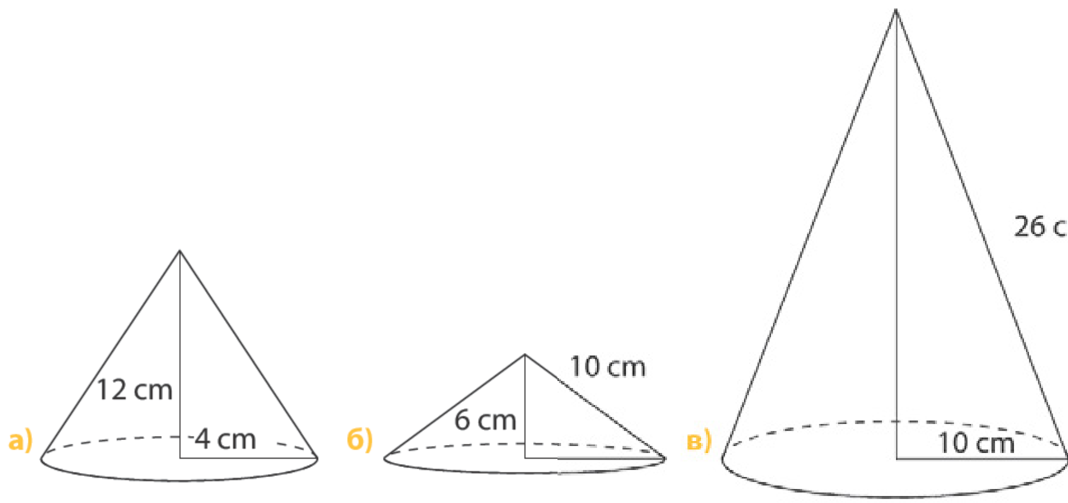


а) Тело које се добија обртањем трапеза око дуже основице састоји се од ваљка и купе који имају заједничку основу (слика лево).
Запремина овог тела једнака је збиру запремина ваљка и купе. Висина ваљка је $H_V = b = 2$ cm, док је полупречник r ваљка једнак краћем краку правоуглог трапеза. Из Питагорине теореме следи да је $r^2 = c^2 - (a - b)^2$, па је $r = 8$ cm. Запремина ваљка је $V_V = 128\pi$ cm³.
Висина купе је $H_K = a - b = 6$ cm, а полупречник купе једнак је полупречнику ваљка, односно $r = 8$ cm. Запремина купе је $V_K = 128\pi$ cm³, па је запремина добијеног обртног тела $V_T = V_V + V_K = 256\pi$ cm³.

б) Нека се трапез окреће око краће основице. Тело које се добија оваквим обртањем је ваљак из ког је извађена купа (слика десно). Запремина овог тела једнака је разлици запремина ваљка и купе. Висина ваљка је $H_V = a = 8$ cm, а полупречник је $r = 8$ cm (исто као у претходном случају). Запремина ваљка је $V_V = 512\pi$ cm³. Висина купе је $H_K = a - b = 6$ cm, а њен полупречник једнак је полупречнику ваљка, дакле $r = 8$ cm. Запремина купе је $V_K = 128\pi$ cm³, па је запремина добијеног обртног тела $V_T = V_V - V_K = 384\pi$ cm³.

ЗАДАЦИ

113. На основу података са слика израчунај запремине купа:



114. Израчунај запремину купе ако је полупречник основе $r = 8$ cm и висина $H = 9$ cm.

115. Израчунај запремину купе која се добија обртањем правоуглог троугла, чија је једна катета $a = 15$ cm и хипотенуза $c = 17$ cm, око краће катете.

116. Израчунај запремину купе чији је осни пресек једнакокраки троугао основице 14 cm и крака 25 cm.

117. Осни пресек купе је једнакостранични троугао површине $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Израчунај запремину те купе.

118. Полупречник основе $r = 6$ cm и изводница купе се односе као 3 : 5. Израчунај запремину купе.

119. Полупречник основе и висина купе се односе као 4 : 3. Израчунај њену запремину ако је изводница 20 cm.

120. Полупречник основе и изводница купе се односе као 8 : 17. Израчунај њену запремину ако је висина купе 90 cm.

121. Изводница купе гради са равни основе угао од 60°. Израчунај запремину те купе ако је полупречник основе 30 cm.

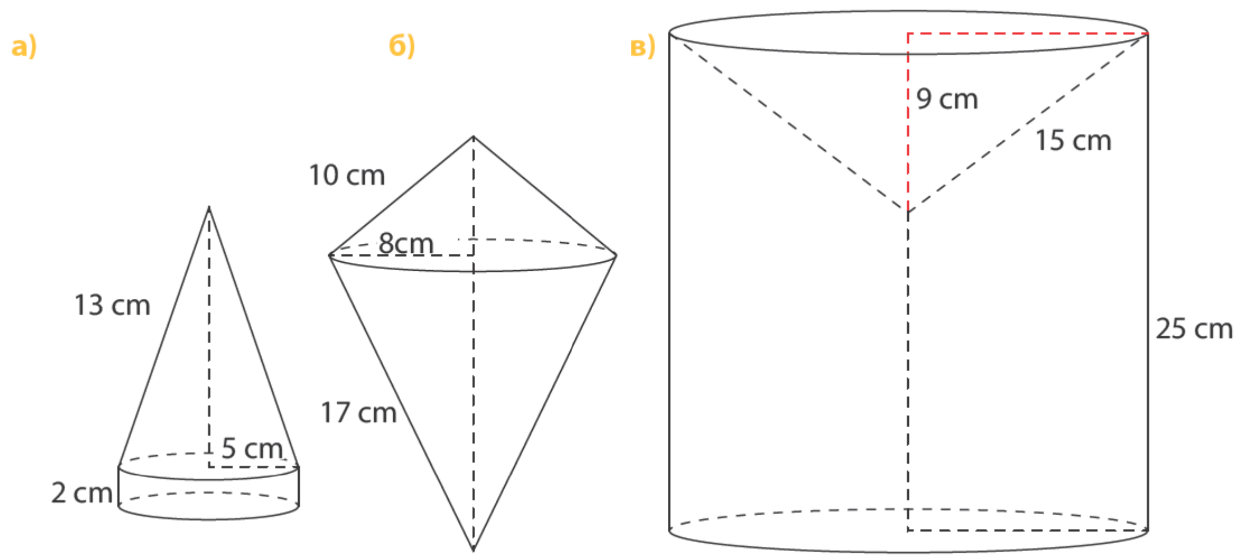
122. Изводница купе гради са равни основе угао од 30°. Израчунај запремину те купе ако је њена висина 8 cm.

123. Изводница купе гради са равни основе угао од 45°. Израчунај запремину те купе ако је изводница 20 cm.

124. Изводнице купе заклапају угао од 45° са равни основе. Површина осног пресека купе је 100 cm². Израчунај запремину купе.

125. Омотач купе је кружни исечак полупречника 15 cm коме одговара централни угао од 120°. Израчунај запремину купе.

126. На основу података са слике израчунај запремине следећих тела:



127. Израчунај масу гвозденог тела облика купе ако је $r = 1{,}2$ m, а $H = 0{,}8$ m и густина гвожђа $\rho = 7870\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

128. Оловни ваљак $r = 4$ dm и $H = 1{,}2$ dm претопљен је у купу полупречника 0,8 m. Израчунај висину и масу купе ако је густина олова $\rho = 11\,350\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

129. Израчунај запремину тела добијеног обртањем правоуглог троугла чије су катете 30 cm и 40 cm око хипотенузе.

130. Једнакостранични троугао обима 18 cm обрће се око једне своје странице. Израчунај запремину тако добијеног тела.

131. Једнакокраки трапез чије су основице 24 cm и 12 cm и крак 10 cm обрће се око своје дуже основице. Израчунај запремину тако добијеног тела.

132. Једнакокраки троугао чији је један угао 120° и основица 6 cm обрће се око једног крака. Израчунај запремину добијеног тела.

8.3. ЛОПТА

Од најранијег детињства играли смо се лоптом. Већини нас је то била прва, или једна од првих играчака. Лопта је најраспрострањенија у спортовима: у фудбалу, кошарци, ватерполу, тенису, одбојци.

• Наведи бар три спорта у којима се не користи лопта.

• Иако сви знамо шта је лопта, можемо ли дефинисати појам лопте?

Основни елементи лопте и сфере 8.3.1.

подсетник

Скуп тачака у равни, са особином да је растојање r тих тачака од неке задате тачке S једнако, назива се **кружна линија** или **кружница**. Тачку S зовемо још и **центар** кружне линије, а растојање r зовемо и **полупречник** кружне линије. Кружну линију чији је центар S, а полупречник r обележавамо $k(S, r)$. Кружна линија дели раван на две области – унутрашњу и спољашњу. Скуп свих тачака кружне линије и тачака унутрашње области називамо **круг**. Круг чији је центар тачка S, а полупречник r обележавамо $K(S, r)$. Дакле, тачка M припада кружној линији $k(S, r)$ ако је дужина дужи SM једнака r, а тачка N припада кругу $K(S, r)$ ако је дужина дужи SN мања или једнака од r.

Посматрајмо круг $K(O, r)$. Уочимо један његов пречник AB, који круг дели на два полукруга. Када се један од полукругова обрне око праве која садржи пречник AB за цео круг, све тачке простора кроз које је „прошао" полукруг називамо **лопта**. Тачка O се зове **центар лопте**, а r је **полупречник лопте**. Површ коју описује полукружница оваквим обртањем зове се **сфера**. Растојање било које тачке сфере од центра лопте O једнако је полупречнику r лопте. Дакле, лопта и сфера имају исти центар и исти полупречник. Разлика је у томе што лопта обухвата и све тачке простора чије је растојање од центра лопте мање од полупречника лопте. Можемо рећи следеће:

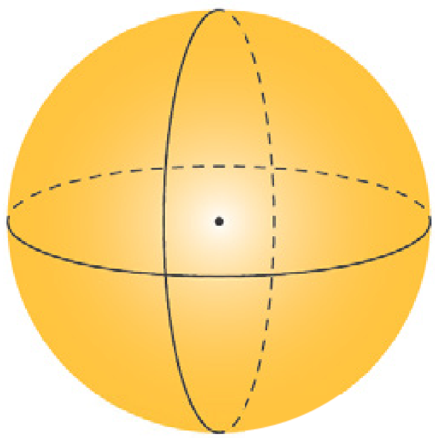
Скуп тачака у простору које су на растојању *r* од дате тачке *O* назива се сфера са центром у *O* полупречника *r*. Сферу обележавамо са *S* (*O*, *r*).

Скуп тачака у простору које су на растојању мањем или једнаком од *r* од дате тачке *O* назива се лопта са центром у *O* полупречника *r*. Лопту обележавамо са *L* (*O*, *r*).

Сваку дуж *OM* која је одређена центром лопте (сфере) *O* и произвољном тачком сфере *M* називамо полупречник лопте (сфере).

Сваку дуж *MN* која је одређена двема тачкама сфере и која садржи центар лопте (сфере) *O* називамо пречник лопте (сфере).

На слици уочи центар лопте, нацртај један полупречник и један пречник лопте.



пример 1

Дуж $PQ = 18$ cm је пречник лопте. Где се налази центар те лопте? Израчунај њен полупречник.

Решење:

Центар лопте је тачка *S*, средиште дужи *PQ*, а полупречник лопте је $r = 18 \text{ cm} : 2 = 9 \text{ cm}$.

пример 2

Катете правоуглог троугла су $a = 14$ cm и $b = 48$ cm. Обртањем описаног круга овог троугла око хипотенузе *c* настаје лопта. Где се налази центар те лопте? Израчунај њен полупречник.

Решење:

Центар лопте је тачка *S*, средиште хипотенузе правоуглог троугла.

Како је $c^2 = a^2 + b^2$, добијамо $c^2 = 196 + 2\,304$, па је $c = 50$ cm, односно, полупречник лопте је $r = \frac{c}{2} = 25 \text{ cm}$.

пример 3

Круг описан око квадрата површине 72 cm^2 обрће се око једне од оса симетрија квадрата. Где се налази центар тако добијене лопте? Израчунај њен полупречник.

Решење:

Центар лопте је центар описаног круга око квадрата, односно пресек дијагонала квадрата. Пречник лопте једнак је дијагонали квадрата. Ако је a страница квадрата, тада је $a^2 = 72\ cm^2$, односно $a = 6\sqrt{2}\ cm$. Дијагонала квадрата је $d = a\sqrt{2}$, тј. $d = 12$ cm, па је полупречник лопте $r = 6$ cm.

ЗАДАЦИ

133. Описани круг правоугаоника површине 60 cm^2 и краће странице 5 cm обрће се око једне дијагонале правоугаоника. Где се налази центар тако добијене лопте? Израчунај њен полупречник.

134. Око једнакостраничног троугла обима 54 cm описан је круг. Обртањем овог круга око једне од оса симетрија троугла добија се лопта. Где се налази центар тако добијене лопте? Израчунај њен полупречник.

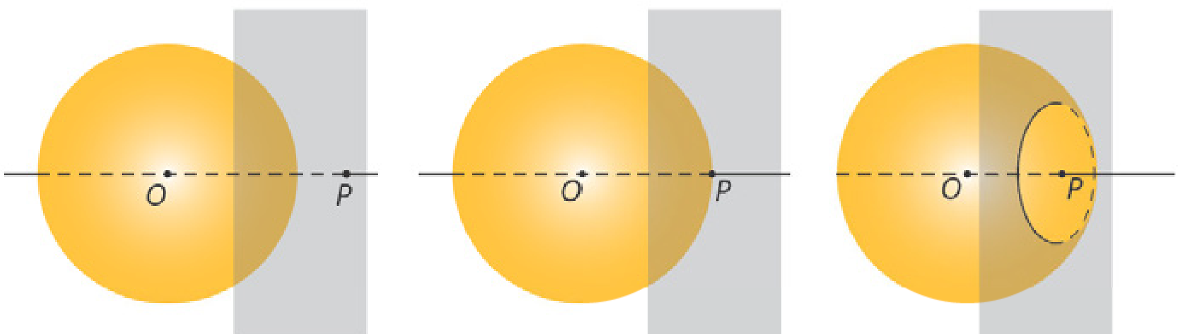
135. У правилни шестоугао обима 24 cm уписан је круг. Обртањем овог круга око праве која садржи дужу дијагоналу шестоугла добија се лопта. Где се налази центар тако добијене лопте? Израчунај њен полупречник.

8.3.2. Равни пресеци лопте (сфере)

Нека је дата лопта $L(O, r)$ (сфера $S(O, r)$) и нека је α произвољна раван. Посматрајмо праву p која садржи центар лопте (сфере) и нормална је на раван α. Ако је P тачка продора праве p кроз раван α и ако је d растојање тачке P од центра O лопте (сфере), тада је пресек лопте $L(O, r)$ (сфере $S(O, r)$) и равни α:

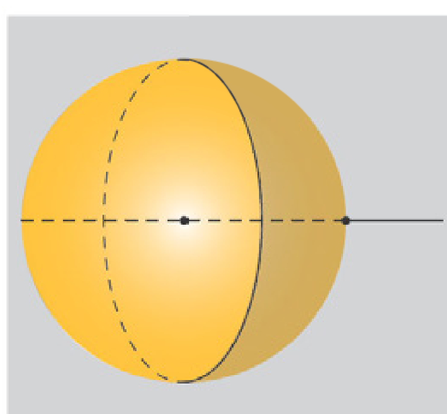
- празан скуп (нема пресека) уколико је $d > r$ (слика лево),
- тачка на сфери уколико је $d = r$ (слика у средини), кажемо и да раван додирује лопту (сферу),
- круг (кружна линија) уколико је $d < r$ (слика десно).

У последњем случају, пресек лопте и равни је круг, а пресек сфере и равни је кружна линија. Зашто?



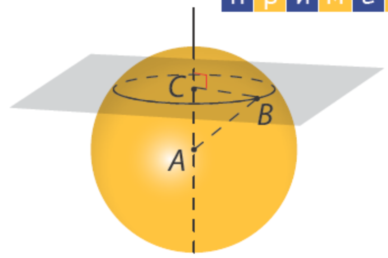
Када раван α садржи центар лопте (сфере), тада је пресек круг (кружна линија) највећег могућег полупречника.
Овај круг називамо велики круг лопте.

Површина великог круга једнака је $P_{vk} = r^2\pi$.



пример 1

Нека је A центар сфере $S(A, r)$ и нека је C продор нормале из тачке A на раван α која сече сферу. Ако је тачка B нека тачка пресека равни и сфере, тада је троугао ABC правоугли.



Ово произлази из саме формулације примера. Обележимо растојање равни од центра сфере (лопте) са $d = AC$, растојање тачке продора од пресечне тачке на сфери са $\rho = BC$ (то је полупречник пресека равни и лопте) и полупречник лопте са $r = AB$, тада, на основу Питагорине теореме важи: $r^2 = d^2 + \rho^2$.

пример 2

Лопта $L(O, r = 6\text{ cm})$ пресечена је са равни која је на растојању 4 cm од центра лопте. Израчунај површину пресека.

Решење:

Користећи ознаке из претходног примера, имамо $r = 6$ cm, $d = 4$ cm, па је $\rho^2 = r^2 - d^2$, односно $\rho^2 = 20\text{ cm}^2$. Површина пресека једнака је $P_p = \rho^2\pi = 20\pi\text{ cm}^2$.

пример 3

Површина пресека лопте $L(O, r = 8\text{ cm})$ и неке равни је четири пута мања од површине великог круга. На ком растојању је раван од центра лопте?

Решење:

Површина великог круга је $P_{vk} = r^2\pi = 64\pi\text{ cm}^2$, па је површина пресека $P_p = 16\pi\text{ cm}^2$. Одавде следи да је $\rho^2 = 16\text{ cm}^2$. Користећи чињеницу да је $r^2 = d^2 + \rho^2$, добијамо $d^2 = 48\text{ cm}^2$, па је растојање равни од центра лопте једнако $d = 4\sqrt{3}\text{ cm}$.

ЗАДАЦИ

136. Израчунај површину великог круга лопте полупречника 12 cm.

137. Узмимо да је Земља облика лопте. Ако је дужина екватора (велики круг) 40 000 km, израчунај полупречник Земље (узети да је $\pi \approx 3{,}14$).

138. Површина пресека равни и лопте је $15\pi\text{ cm}^2$. Израчунај дужину полупречника лопте ако је растојање равни од центра лопте 1 cm.

139. Лопта полупречника 6 cm пресечена је са пет паралелних равни од којих су сваке две суседне на растојању 2 cm. Ако трећа по реду (средња) раван садржи центар лопте, израчунај збир површина свих пресека равни и лопте.

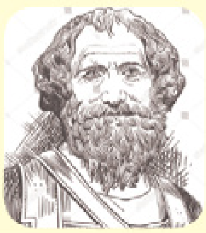
140. Две паралелне равни секу лопту полупречника 10 cm по подударним круговима површине $36\pi\text{ cm}^2$. Израчунај растојање између тих равни.

141. На ком растојању је раван од центра лопте полупречника 12 cm, ако је површина пресека равни и лопте три пута мања од површине великог круга.

8.3.3. Површина и запремина лопте

Површ лопте је сфера, па је површина лопте, заправо, површина сфере. За разлику од тела о којима смо причали у претходним лекцијама, сфера се не може развити у раван. Још у античко време, чувени математичар Архимед дошао је до формула за израчунавање површине и запремине лопте које и данас користимо.

занимљивост



Архимед (око 287–212. године пре нове ере), један од најчувенијих старогрчких математичара и један од највећих математичара свих времена. Између осталог, бавио се израчунавањем површина и запремина обртних тела. Утврдио је да се запремине ваљка, лопте и купе једнаких полупречника и једнаких висина односе као 3 : 2 : 1.

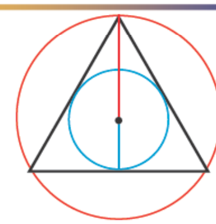
тврђење

Површина лопте полупречника r једнака је

$$P = 4r^2\pi$$

пример 1

Дат је једнакостраничан троугао странице 6 cm. Око њега је описан и у њега је уписан круг (види слику). Израчунај површине лопти које настају обртањем тих кругова око једне од оса симетрије троугла.



Решење:

Полупречник описаног круга једнакостраничног троугла је $r_o = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Површина описане лопте је $P_o = 4r_o^{\,2}\pi = 48\pi\ \text{cm}^2$. Полупречник уписаног круга једнакостраничног троугла је $r_u = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}\,\text{cm}$. Површина уписане лопте је $P_u = 4r_u^{\,2}\pi = 12\pi\,\text{cm}^2$.

пример 2

Око правоугаоника чије су странице 24 cm и 7 cm описан је круг. Израчунај површину лопте која настаје обртањем тог круга око праве која садржи једну дијагоналу правоугаоника.

Решење:

Пречник лопте је једнак дужини дијагонале правоугаоника. Ако су a и b странице, а d дијагонала правоугаоника, тада је $d^2 = a^2 + b^2$, одакле добијамо да је $d = 25$ cm. Одавде следи да је полупречник лопте $r = 12{,}5$ cm и њена површина $P = 4\,r^2\pi = (2r)^2\pi = 625\pi\,\text{cm}^2$.

твређење

Запремина лопте полупречника *r* једнака је

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

пример 3

Око правоуглог троугла чије су катете 9 cm и 12 cm описан је круг. Израчунај запремину лопте која се добија обртањем тог круга око праве која садржи хипотенузу троугла.

Решење:

Пречник лопте једнак је дужини хипотенузе правоуглог троугла. Из Питагорине теореме добијамо да је хипотенуза 15 cm, па је полупречник лопте $r = \frac{15}{2}$ cm. Запремина лопте је $V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{15^3}{2^3} \pi$, односно $V = \frac{1\,125\pi}{2}$ cm³.

пример 4

Метални ваљак полупречника $r = 6$ cm и висине $H = 8$ cm претопљен је у лопту. Израчунај полупречник те лопте.

Решење:

Из услова задатка запремине ваљка и лопте су једнаке. Како је запремина ваљка $V_v = r^2 \pi H = 288\pi$ cm³, то је и $V_{EL} = \frac{4}{3} r_L^3 \pi = 288\pi$ cm³, одакле добијамо да је полупречник лопте $r_L = 6$ cm.

ЗАДАЦИ

142. Израчунај површину сфере пречника 24 cm.

143. Површина лопте је 1 296π cm². Израчунај полупречник те лопте.

144. Израчунај запремину лопте полупречника 15 cm.

145. Израчунај полупречник лопте чија је запремина 36π cm³.

146. Површина великог круга лопте је 81π cm². Израчунај површину и запремину те лопте.

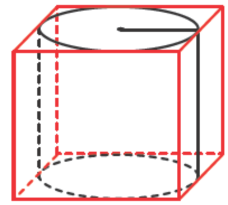
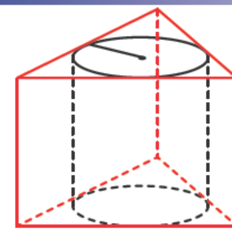
147. Дат је квадрат површине 324 cm². Око квадрата је описан и у квадрат је уписан круг. Израчунај површину и запремину лопти које се добијају обртањем ових кругова око праве која садржи једну дијагоналу квадрата.

148. Метална купа полупречника $3\sqrt{3}$ cm и висине 32 cm претопљена је у лопту. Израчунај полупречник и површину те лопте.

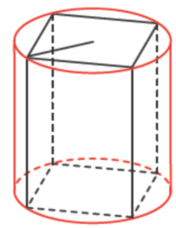
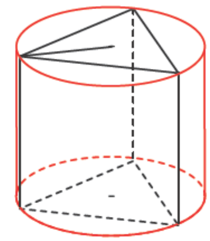
149. Метална лопта полупречника 12 cm претопљена је у ваљак висине 16 cm. Израчунај однос површина ова два тела.

8.4. ЗА ДОДАТНИ РАД
Уписана и описана тела

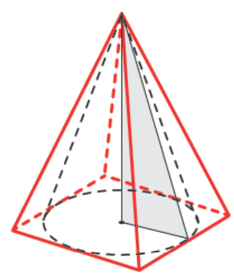
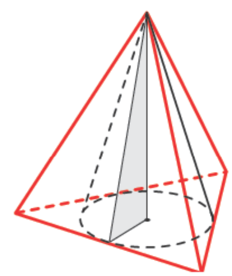
Ваљак је **уписан** у правилну призму ако је основа ваљка уписан круг многоугла који је у основи призме и ако су висине ваљка и призме једнаке.

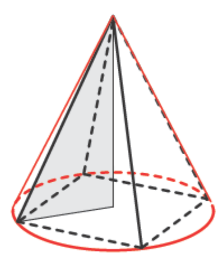
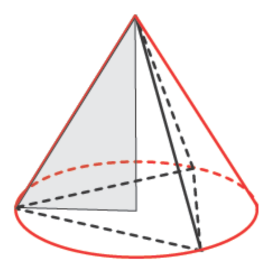
Ваљак је **описан** око правилне призме ако је основа ваљка описан круг многоугла који је у основи призме и ако су висине ваљка и призме једнаке.

Купа је **уписана** у правилну пирамиду ако је основа купе уписан круг многоугла који је у основи пирамиде и ако се врхови купе и пирамиде поклапају.
Код уписане купе у правилну пирамиду треба посматрати карактеристичан правоугли троугао чије су катете полупречник уписаног круга у основу пирамиде и висина купе, док је хипотенуза изводница купе, односно апотема пирамиде.

Купа је **описана** око правилне пирамиде ако је основа купе описан круг многоугла који је у основи пирамиде и ако се врхови купе и пирамиде поклапају.
Код описане купе око правилне пирамиде треба посматрати карактеристичан правоугли троугао чије су катете полупречник описаног круга око основе пирамиде и висина купе, док је хипотенуза изводница купе, односно, бочна ивица пирамиде.

пример 1

Израчунај површину и запремину ваљка уписаног у правилну једнакоивичну тространу призму ивице 6 cm.

Решење:

Основа ваљка је круг уписан у једнакостраничан троугао странице $a = 6$ cm, па је $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ cm. Висина ваљка једнака је висини призме, односно $H = 6$ cm.

Сада није тешко израчунати да је $P_V = 6\pi\left(1+2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$ и $V_V = 18\pi\ \text{cm}^3$.

пример 2

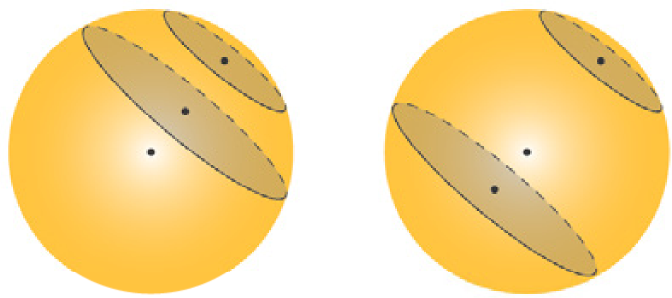
Израчунај површину и запремину купе описане око правилне четворостране једнакоивичне пирамиде ивице 8 cm.

Решење:

Основа купе је круг описан око квадрата странице $a = 8$ cm, па је $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ cm. Изводница купе једнака је бочној ивици пирамиде, односно $s = 8$ cm. Висину купе рачунамо из карактеристичног правоуглог троугла: $H^2 = s^2 - r^2$, одакле је $H = 4\sqrt{2}$ cm. Површина купе је $P_K = 32\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm^2, а запремина $V_K = \dfrac{128\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

пример 3

Површина великог круга лопте је 625π cm^2. Лопта је пресечена двема паралелним равнима, таквим да су површине пресека 49π cm^2 и 400π cm^2. Израчунај растојање између тих равни. Колико решења има овај задатак?

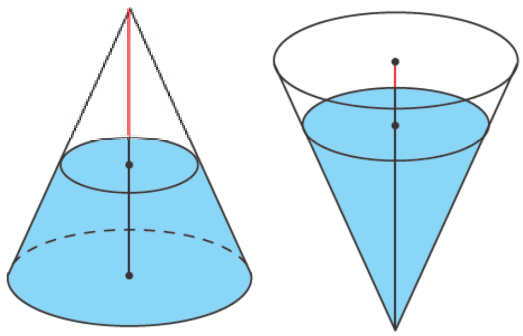


Решење:

Како је површина великог круга лопте 625π cm^2, добијамо да је полупречник лопте $r = 25$ cm. Површина првог пресека је 49π cm^2, па је полупречник тог пресека $\rho_1 = 7$ cm. На исти начин закључујемо да је полупречник другог пресека $\rho_2 = 20$ cm. То значи да је растојање прве равни од центра лопте $d_1{}^2 = r^2 - \rho_1{}^2 = 24$ cm и слично, растојање друге равни од центра лопте је $d_2{}^2 = r^2 - \rho_2{}^2 = 15$ cm. Уколико су обе равни са исте стране центра лопте (слика лево), тада је растојање између ове две равни $d' = d_1 - d_2 = 9$ cm, а уколико су равни са различитих страна центра лопте (слика десно), растојање је једнако $d'' = d_1 + d_2 = 39$ cm.

Предлог задатака за додатни рад

1. У затворену посуду облика купе, окренуту врхом на горе, полупречника 6 cm и висине 12 cm сипана је вода до половине висине. До које висине би дошла вода ако бисмо посуду окренули врхом на доле?



2. Израчунај запремину описаног ваљка око правилне тростране призме основне ивице дужине 9 cm и висине 5 cm.

3. Израчунај површину описаног ваљка око правилне једнакоивичне шестостране призме чији је збир дужина свих ивица 36 cm.

4. Израчунај однос запремина уписаног и описаног ваљка око правилне четворостране призме запремине 50 cm^3 и висине 8 cm.

5. Већи дијагонални пресек правилне шестостране призме је квадрат. Израчунај однос запремина уписаног и описаног ваљка ове призме.

6. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране призме је квадрат површине 48 cm^2. Израчунај површину описаног и запремину уписаног ваљка ове призме.

7. У правилну тространу призму уписан је ваљак код кога је $r = H = 3$ cm. Израчунај површину призме.

8. У правилну четворострану пирамиду код које је $a = 8$ cm и $H = 2$ cm, уписана је купа. Израчунај површину и запремину те купе.

9. Осни пресек купе која је уписана у правилну четворострану пирамиду је једнакостранични троугао странице 6 cm. Израчунај површину и запремину ова два тела.

10. Купа је уписана у правилну шестострану пирамиду. Изводница купе са равни основе гради угао од 30º. Ако је висина пирамиде 2 cm, израчунај бочну ивицу пирамиде и површине и запремине ова два тела.

11. Око правилне тростране пирамиде описана је купа изводнице 6 cm. Израчунај површину и запремину купе ако је основна ивица пирамиде $2\sqrt{3}$ cm.

12. У коцку ивице 30 cm уписана је купа, тако да основа купе припада једној страни коцке, а врх купе је средиште наспрамне стране коцке. Израчунај површину и запремину те купе.

Питалице

1.	Обртањем квадрата око једне своје странице настаје ваљак.	да	не
2.	Обртањем правоугаоника око једне своје дијагонале настаје ваљак.	да	не
3.	Ако је осни пресек ваљка квадрат странице 2 cm, тада је запремина ваљка 8π cm³.	да	не
4.	Постоји ваљак површине π cm².	да	не
5.	Обртањем правоуглог троугла око своје катете увек настаје купа.	да	не
6.	Површина омотача купе је увек већа од површине њене основе.	да	не
7.	Ако су полупречник основе и висина купе 3 cm, тада је њена запремина 27π cm³.	да	не
8.	Произвољан кружни исечак може бити омотач неке купе.	да	не
9.	Ако је полупречник лопте 1 cm, тада је њена површина 4π cm².	да	не
10.	Ако је полупречник лопте 3 cm, тада је њена запремина 27π cm².	да	не

Предлог теста знања

1. Ако је полупречник ваљка 4 cm и висина 6 cm, тада је површина ваљка:

(А) 80π cm² **(Б)** 32π cm² **(В)** 40π cm² **(Г)** 16π cm² **(Д)** 64π cm²

2. Запремина ваљка који се добија обртањем правоугаоника чије су странице 8 cm и 4 cm око краће странице је:

(А) 32π cm³ **(Б)** 64π cm³ **(В)** 96π cm³ **(Г)** 128π cm³ **(Д)** 256π cm³

3. Дијагонала осног пресека ваљка је 5 cm, а висина ваљка 3 cm. Површина ваљка је:

(А) 80π cm² **(Б)** 48π cm² **(В)** 30π cm² **(Г)** 28π cm² **(Д)** 20π cm²

4. Изводница купе је 12 cm, а полупречник основе 8 cm. Површина купе је:

(А) 96π cm² **(Б)** 144π cm² **(В)** 160π cm² **(Г)** 240π cm² **(Д)** 320π cm²

5. Запремина купе је 12π cm³, а површина осног пресека 12 cm². Полупречник купе је:

(А) 1 cm **(Б)** 3 cm **(В)** 6 cm **(Г)** 2 cm **(Д)** 12 cm

6. Површина купе је 36π cm² , а пречник 8 cm. Запремина купе је:

(А) 36π cm³ **(Б)** 32π cm³ **(В)** 18π cm³ **(Г)** 16π cm³ **(Д)** 64π cm³

7. Полупречник лопте површине 36π cm² је:

(А) 2 cm **(Б)** 3 cm **(В)** 6 cm **(Г)** 4 cm **(Д)** 18 cm

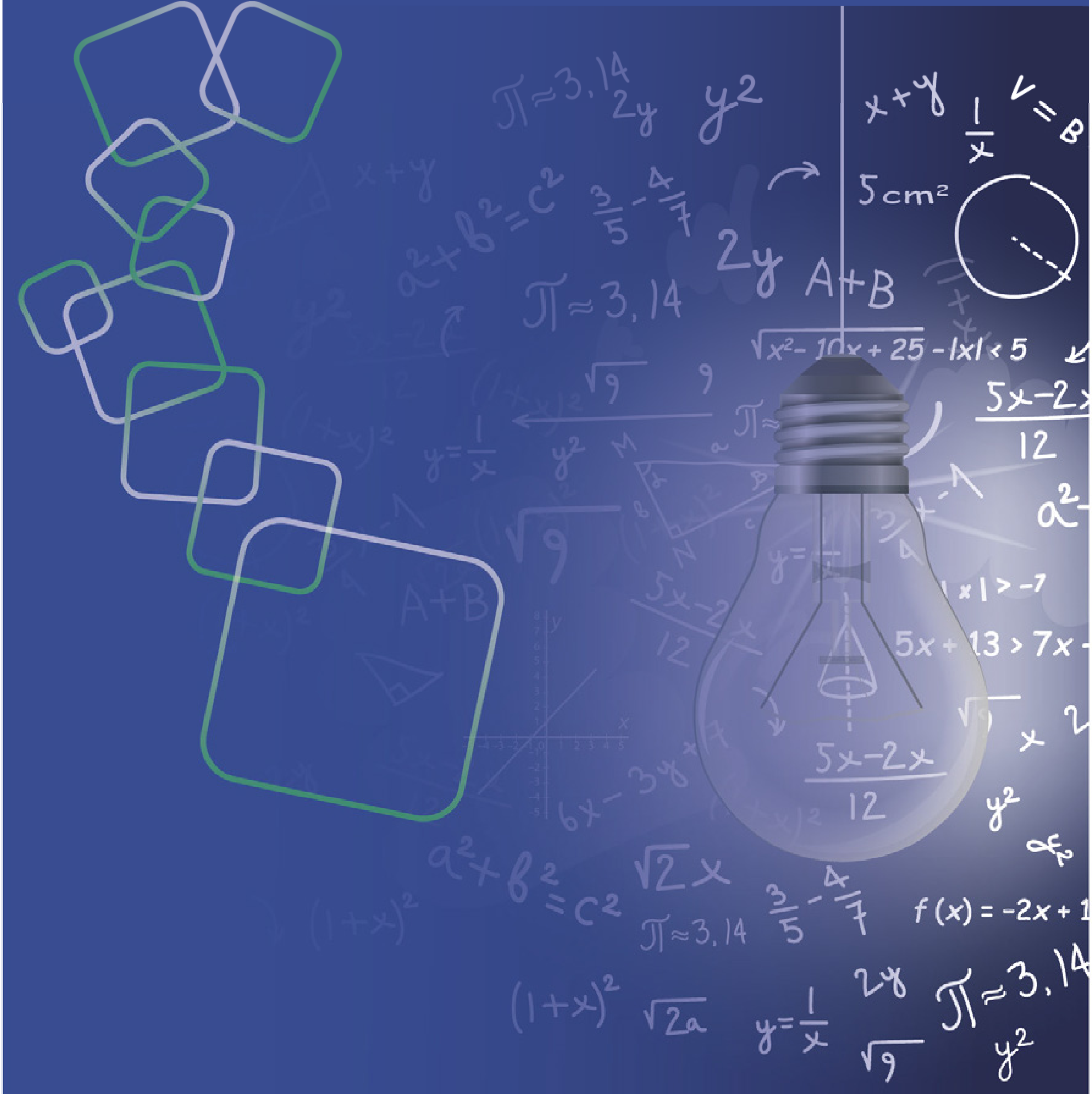
8. Запремина лопте је 3 пута већа од запремине ваљка полупречника 2 cm и висине 3 cm. Полупречник лопте је:

(А) 1 cm **(Б)** 2 cm **(В)** 3 cm **(Г)** 4 cm **(Д)** 6 cm

Предлог контролне вежбе

8.1..	Израчунај површину ваљка полупречника основе 6 cm и висине 7 cm.	**15**
8.2.	Дијагонала осног пресека ваљка је 8 cm, а висина 4 cm. Израчунај запремину ваљка.	**20**
8.3.	Дијагонала осног пресека ваљка гради са основом угао од 60°. Ако је полупречник основе 2 cm, израчунај запремину ваљка.	**25**
8.4.	Израчунај површину купе полупречника 12 cm и изводнице 13 cm.	**15**
8.5.	Израчунај површину купе пречника 12 cm и висине 8 cm.	**20**
8.6.	Осни пресек купе је правоугли троугао површине 36 cm^2. Израчунај површину купе.	**25**
8.7.	Израчунај површину и запремину лопте пречника 12 cm.	**15**
8.8.	Површина великог круга лопте је 36π cm^2. Израчунај њену запремину.	**20**
8.9.	Површина пресека лопте и равни, која је на растојању 2 cm од центра, је 32π cm^2. Израчунај запремину лопте.	**25**
8.10.	Израчунај запремину тела које настаје обртањем квадрата странице 12 cm око једне своје странице.	**15**
8.11.	Израчунај запремину тела које настаје обртањем једнакостраничног троугла странице 12 cm око једне своје осе симетрије.	**20**
8.12.	Израчунај запремину тела које настаје обртањем једнакокраког трапеза, чије су основице 8 cm и 2 cm и крак 5 cm, око своје краће основице.	**25**

РЕШЕЊА



2. Постоји. Свака тространа пирамида има то својство.

3. Шестострана пирамида има седам страна, седам темена, шест основних ивица, шест бочних ивица и шест бочних страна.

4. **б**), **г**), **ђ**).

5. Четворострана пирамида има пет темена, осам ивица и пет страна. Тражени збир је једнак 18.

6. **а**), **б**), **д**).

7. Може. То је тространа пирамида.

8. Не постоји. Пирамида која има n основних има и n бочних ивица, па је збир ивица те пирамиде увек једнак парном броју $2n$. Како 13 није паран број, таква пирамида не постоји.

9. **а)** Да; **б)** Не. **10.** **в**).

11. **а)** дуж; **б)** многоугао који представља основу; **в)** дуж; **г)** троугао; **д)** тачка.

12. Пирамида је правилна. Бочна ивица је $4\sqrt{6}$ cm, висина 8 cm, а апотема $4\sqrt{5}$ cm.

13. Не. **14.** **а)** 12 cm; **б)** 12 cm; **в)** 12 cm.

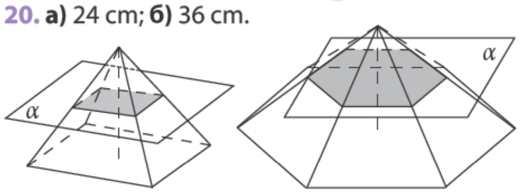
15. 12 cm^2. **16.** **а**).

17. $O = 4\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm, $P = 8$ cm^2.

18. С обзиром на то да је та пирамида једнакоивична, то су троуглови ACS и ABC подударни. Одатле следи да је $\sphericalangle ASC = 90^\circ$, па је $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA = 45^\circ$. То је угао између бочне ивице и равни основе.

19. $O = \left(5\sqrt{2}+24\right)$cm, $P = \dfrac{5\sqrt{236}}{2}$ cm^2.

20. **а)** 24 cm; **б)** 36 cm.



21. Није.

22. Мрежа правилне шестостране пирамиде.

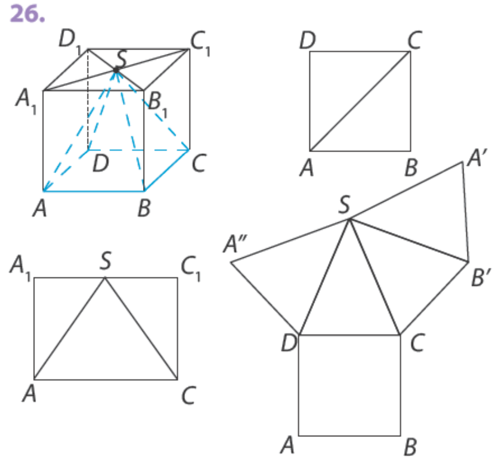
23. Види решење примера 1. у поглављу 5.2.

24. **а)** Основа је правилан шестоугао странице 3 cm, а бочна страна је једнакокраки троугао са основицом 3 cm и краком 5 cm.

б) Конструише се правоугли троугао ASO тако да је хипотенуза $AS = 5$ cm, а катета $OS = 4$ cm. Катета AO једнака је основној ивици пирамиде, па се задатак своди на пример под а).

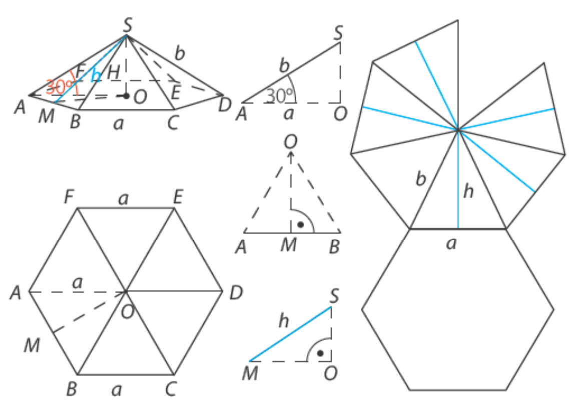
25. **в**).

26.



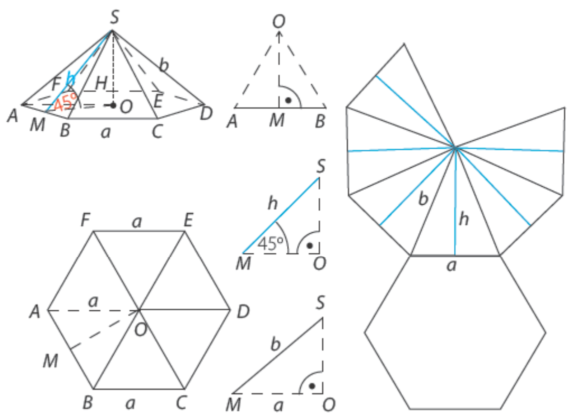
27. Нека је $SABCDEF$ тражена пирамида и O центар њене основе.

а) Конструишемо троугао AOS, тако да је $AO = a = 4$ cm, $\sphericalangle AOS = 90^\circ$, $\sphericalangle OAS = 30^\circ$. Дужина дужи OS је висина пирамиде. Затим конструишемо једнакостранични троугао ABO и троугао MOS где је M средиште ивице AB. Дуж MO је једнака висини троугла ABO, $\sphericalangle MOS = 90^\circ$, OS је катета троугла AOS.
Дуж MS је апотема. Даље конструишемо мрежу. Видети слике.



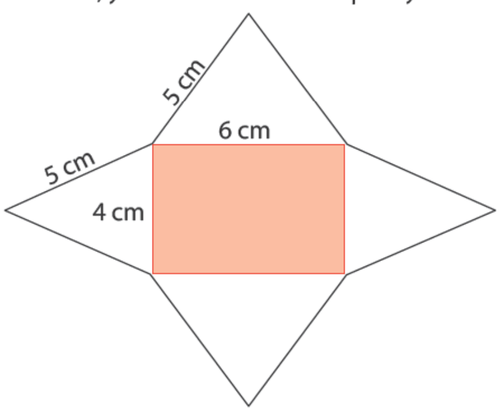
б) Конструишимо једнакостранични троугао ABO. Затим конструишимо троугао MOS, где је M средиште ивице AB. Страница MO је једнака висини троугла ABO.

$\sphericalangle MOS = 90°$, $\sphericalangle OMS = 45°$. Дужина дужи MS је апотема. Даље конструишемо мрежу, као у делу под а).



28. Мрежу пирамиде не представљају фигуре на сликама в) и г).

29. Најпре се конструише правоугаоник са страницама дужине 4 cm и 6 cm, а затим по два једнакокрака троугла, са крацима дужине 5 cm, у спољашњости тог правоугаоника.



30. **а)** 105 cm²; **б)** 144 cm²; **в)** 336 cm²; **г)** 360 cm²; **д)** $100\left(1+\sqrt{3}\right)$cm²; **ђ)** 432 cm².

31. $100+20\sqrt{119}$ cm²; 1 360 cm²;
Код треће пирамиде, апотема која одговара основној ивици од 6 cm једнака је 13 cm, док апотема која одговара основној ивици од 10 cm једнака је $3\sqrt{17}$ cm . Њена површина једнака је $P = 60+6\cdot 13+10\cdot 3\sqrt{17} = \left(138+30\sqrt{17}\right)\text{cm}^2$.

32. 84 cm². **33.** 96 cm².

34. $64\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm². **35.** 96 cm².

36. Бочна и основна ивица су једнаке страници једнакостраничног троугла ABS, тј. 8 cm.
$P = 64\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

37. **д)**. **38.** **в)**.

39. $h = 4\sqrt{5}$ cm , $P = 64\left(1+\sqrt{5}\right)\text{cm}^2$.

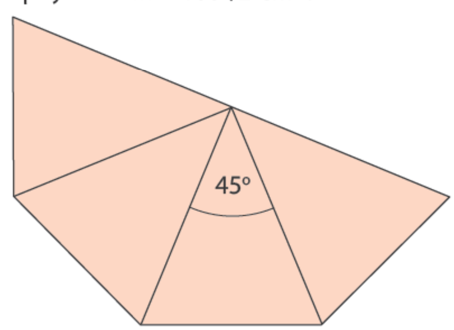
40. $H^2 + r_u^2 = h^2$, $h = \sqrt{24^2+7^2}$, $h = 25$ cm. Основна ивица је дупло дужа од полупречника уписаног круга, па је $a = 14$ cm. Одатле следи да је површина $P = a^2 + \frac{4ah}{2}$, $P = 896$ cm².

41. $P = 4\left(1+\sqrt{7}\right)\text{cm}^2$.

42. Површина те пирамиде једнака је
$P = 10^2 + 4\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}$, $P = 100\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$,
а површина папирног квадрата једнака је 361 cm². С обзиром на то да је $100\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 \approx 273\,\text{cm}^2$, могуће је облепити пирамиду.

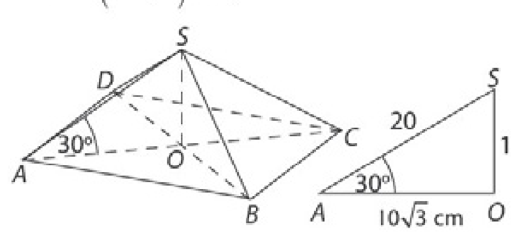
43. Делови који не чине дно шатора су бочне стране пирамиде. Апотема је
$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $h^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2$,
$h = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ cm . Површина је $\frac{25\sqrt{5}}{4}$ cm² .

44. Бочне стране су подударни једнакокраки троуглови $M = 100\sqrt{2}$ cm² .

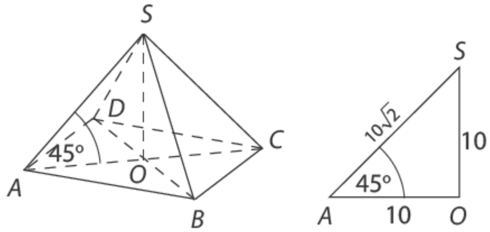


45. Уочимо правоугли троугао AOS. У њему је $\sphericalangle SAO = 30°$, па је катета OS (висина пирамиде) једнака половини хипотенузе AS (бочне ивице), тј. OS = 10 cm.Такође је и $AO = 10\sqrt{3}$ cm и $AC = 20\sqrt{3}$ cm . Одатле је $AB = a = 10\sqrt{6}$ cm .

Сада је $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $h = 5\sqrt{10}$, а биће и $P = 200\left(3+\sqrt{5}\right)\text{cm}^2$.



46. $H = 10$ cm, $\sphericalangle SAO = 45^\circ$, $P = 40\left(5+\sqrt{30}\right)$ cm^2.



47. $a=\sqrt{2}$ m, $P=(2+2\sqrt{7})$ m^2.

48. Добија се да је та пирамида једнакоивична. Њена површина је једнака $64\left(1+\sqrt{3}\right)$cm^2.

49. Бочна страна те пирамиде је једнакостранични троугао, па је $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, односно $9=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Одатле је $a=6\sqrt{3}$ cm.

Сада је $P=108\left(1+\sqrt{3}\right)$cm^2.

50. 300 cm^2.

51. $a = 18$ cm, $h = 18$ cm, $P=972$cm^2.

52. $a=20$cm, $P=400\left(1+\sqrt{2}\right)$cm^2.

53. Из $H^2+3^2=\left(H+1\right)^2$ следи да је $H=4$ cm и $h = 5$ cm. Одалте се добија да је $P = 84$ cm^2.

54. Из $\dfrac{4ah}{2}=80$ следи да је $ah=40$.

Из $a:h=2:5$ је $a=2x$, $h=5x$, за неки позитиван реалан број x. Сада је $10x^2=40$, па је $x=2$. Дакле, имамо да је $a=4$ cm и $h = 10$ cm. Одатле је $P=a^2+\dfrac{4ah}{2}$, $P=96$cm^2.

55. Из $a:H=5:6$ је $a=5x$, $H=6x$ за неки позитиван реалан број x. Убацујући то у релацију $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+H^2=h^2$ биће $\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2+\left(6x\right)^2=169$. Одатле следи да је $x=2$, односно $a=10$cm и $H=12$ cm.

Површина те пирамиде једнака је 360 cm^2.

56. **г)**.

57. **а)** $\left(36\sqrt{3}+126\right)$cm^2; **б)** $9\left(\sqrt{3}+4\right)$ cm^2;

в) $27\sqrt{3}$cm^2; **г)** $\left(25\sqrt{3}+180\right)$cm^2.

58. **а)** $4\left(\sqrt{3}+3\sqrt{15}\right)$cm^2; **б)** $25\left(\sqrt{3}+6\right)$cm^2;

в) $4\left(\sqrt{3}+12\right)$cm^2.

59. $9\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$cm^2. **60.** $108\sqrt{3}$cm^2.

61. $36\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right)$cm^2. **62.** $108\sqrt{3}$cm^2.

63. $\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=h^2-H^2, a=4\sqrt{21}$,

$P=\left(84\sqrt{3}+48\sqrt{21}\right)$cm^2.

64. Та пирамида је правилна једнакоивична, јер су јој ивице једнаке дијагоналама страна коцке.

65. **а)** ивица $12\sqrt{2}$cm, висина $8\sqrt{3}$cm;

б) $P=288\sqrt{3}$cm^2.

66. Површина једне стране те пирамиде је $9\sqrt{3}$cm^2. Из $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$ cm^2 је $a=6$ cm.

67. **а)** $30\left(5\sqrt{3}+12\right)$cm^2; **б)** $54\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$cm^2;

в) $54\left(\sqrt{3}+2\right)$cm^2; **г)** $30\left(5\sqrt{3}+12\right)$cm^2.

68. **а)** $\left(24\sqrt{3}+120\right)$cm^2; **б)** $600\left(\sqrt{3}+2\right)$cm^2;

в) $6\left(\sqrt{3}+8\right)$cm^2.

69. $P=\left(216\sqrt{3}+72\sqrt{43}\right)$cm^2.

70. $P=150\left(\sqrt{3}+2\right)$cm^2.

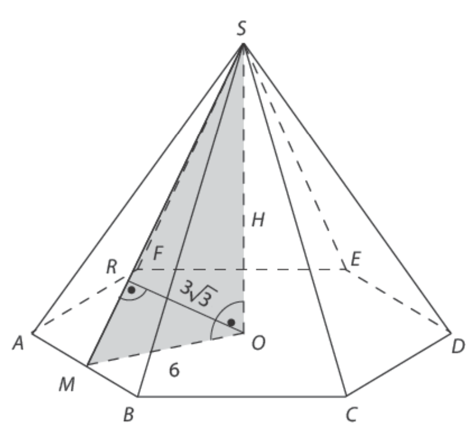
71. Нека је h_1 висина карактеристичног троугла шестоугла у основи пирамиде. Угао између апотеме и равни основе је угао SMO, где је M средиште ивице AB. Добија се да је

$h_1=6\sqrt{3}$ cm, $a=12$ cm и $P=648\sqrt{3}$cm^2.

72. $P=\left(150\sqrt{3}+300\right)$cm^2.

73. $P=54\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)$cm^2.

74. Нека је $SABCDEF$ правилна шестострана пирамида. Уочимо троугао MOS, где је M средиште основне ивице AB и O центар основе. Растојање центра основе од бочне стране ABS је OR и једнако је висини која одговара хипотенузи правоуглог троугла MOS. $OM = 6$ cm, $RS = 9$ cm, $MS = 12$ cm. Површина је $P=216\sqrt{3}$cm^2.



75. Нека је *SABCDEF* правилна шестострана пирамида. Уочимо троугоа *AOS*, где је *O* центар основе. Растојање центра основе од бочне ивице *AS* је *OR* и једнако је висини која одговара хипотенузи правоуглог троугла *AOS*. $OA = 2\sqrt{5}$ cm, $AR = 2$ cm, $RS = 8$ cm, $AS = 10$ cm, $h = \sqrt{95}$. Површина је $P = 30\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)\text{cm}^2$.

76. Запремина зелене пирамиде једнака је 128 cm^3, а запремина плаве пирамиде је $40\sqrt{39}\,\text{cm}^3$.

77. 2 592 276,48 cm^3.

78. **а)** 108 cm^3; **б)** 64 cm^3; **в)** 192 cm^3; **г)** 400 cm^3; **д)** $\frac{256\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^3$; **ђ)** $1445\sqrt{12}\,\text{cm}^3$.

79. **а)** 192 cm^3; **б)** $\frac{128}{3}\,\text{cm}^2$; **в)** $\frac{256\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}^3$.

80. **а)** $\frac{64\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^3$; **б)** $\frac{4\sqrt{143}}{3}\,\text{cm}^3$; **в)** $24\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

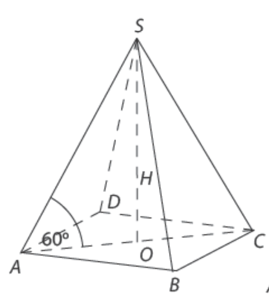
81. Код те пирамиде је $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + H^2 = b^2$, па је $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 10^2 - 8^2$, односно $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 36$. Одатле се добија да је $a = 6\sqrt{2}$ cm. Сада је $V = \frac{a^2H}{3}$, односно $V = 192\,\text{cm}^3$.

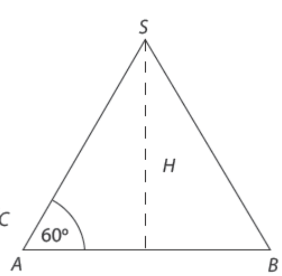
82. **а)** 288 cm^3; **б)** 1 : 6. **83.** 18 000 cm^3.

84. $36\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

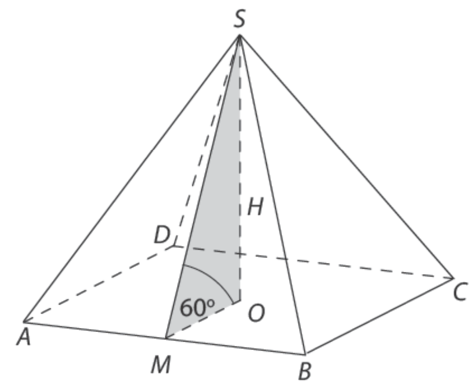
85. $P = 100\left(1 + \sqrt{7}\right)\text{cm}^2$, $V = \frac{500\sqrt{6}}{3}\,\text{cm}^3$.

86. Нагибни угао бочне ивице према равни основе правилне четворостране пирамиде је угао између бочне ивице и дијагонале основе. Нека је *SABCD* дата пирамида. Троугао *ACS* је једнакостраничан, па је $AS = AC = 40$ cm. Висина је $H = 20\sqrt{3}$ cm, а тражена запремина $V = \frac{1600\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}^3$.





87. Нека је *SM* апотема правилне четворостране пирамиде *SABCD*. $SM = h = 10$ cm, $MO = \frac{a}{2} = 5$ cm (*SMO* је половина једнакостраничног троугла). $OS = H = 5\sqrt{3}$ cm, па је $V = \frac{500\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}^3$.



88. Из $a^2 + \frac{ah}{2} = 36$ и $2ah - a^2 = 64$, сабирањем тих једнакости добијамо да је $\frac{5}{2}ah = 100$, односно $ah = 40$. Заменом добијене вредности у прву једнакост следи да је $a = 16\,\text{cm}^2$, а одатле је и $a = 4$ cm. Такође, имамо и да је $h = 10$ cm. Сада за висину те пирамиде важи да је $H^2 = (10\,\text{cm})^2 - (2\,\text{cm})^2$, односно $H = 4\sqrt{6}$ cm. Запремина је $V = \frac{64\sqrt{6}}{3}\,\text{cm}^3$.

89. $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^2$.

90. Површина једне бочне стране је $\frac{ah}{2} = \frac{60}{4}$, па је $ah = 30\,\text{cm}^2$. Из $a : h = 3 : 2$ следи да је $a = \frac{3}{2}h$, па је $\frac{3}{2}h^2 = 30\,\text{cm}^2$. Одатле је $h = 2\sqrt{5}$ cm, $a = 3\sqrt{5}$ cm, па је $H = \frac{\sqrt{35}}{2}$ cm, $V = \frac{15\sqrt{35}}{2}\,\text{cm}^3$.

91. Дијагонала квадрата у који је уцртана мрежа је 24 cm. Следи да су основна ивица и апотема 8 cm. Висина пирамиде је $H = 4\sqrt{3}$ cm, па је тражена запремина једнака: $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}^3$.

92. Пирамида је четворострана, па је $V = \frac{a^2H}{3}$. Одатле је $48\,\text{cm}^3 = \frac{(6\,\text{cm})^2 H}{3}$, па је $H = 4$ cm. За апотему важи $h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, па је $h = 5$ cm. Површина пирамиде је једнака $P = a^2 + 4 \cdot \frac{ah}{2}$, па је $P = 96\,\text{cm}^2$.

93. Висина те пирамиде је једнака 16 cm, па је запремина једнака $80\sqrt{31}\ \text{cm}^3$.

94. 1 776 cm^2.

95. $\frac{512\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$.

96. **а)** $73\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; **б)** $3\sqrt{39}\,\text{cm}^3$;

в) $\frac{27\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$; **г)** $\frac{25\sqrt{407}}{3}\ \text{cm}^2$.

97. $H = 4\,\text{cm}$. **98.** $m = 17{,}766\,\text{g}$. **99.** **б)**.

100. $108\,\text{cm}^3$. **101.** **в)**.

102. Површина једне бочне стране те пирамиде је $48\ \text{cm}^2$. Из $\frac{12h}{2} = 48$ следи да је $h = 8\ \text{cm}$.

Код правилне тростране пирамиде важи

$H^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$, па је $H = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$. Сада је

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{H}{3}$, односно $V = 24\sqrt{39}\ \text{cm}^3$.

103. $V = \frac{81}{4}\ \text{cm}^3$.

104. **а)** $V = 486\,\text{cm}^3$; **б)** $V = 128\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

105. Из $h_1 = 9\,\text{cm}$ следи да је $a = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$,

апотема $h^2 = 6^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $h = 3\sqrt{6}\,\text{cm}$. Даље

је $H^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$, $H = 3\sqrt{5}\,\text{cm}$. Површина

и запремина су $P = 27\left(\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$ и

$V = 27\sqrt{15}\,\text{cm}^3$.

106. $\frac{32}{3}\ \text{cm}^3$.

107. Површина тог тела једнака је збиру површина једне основе призме, омотача призме и омотача пирамиде. Дакле,

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2 + a^2\sqrt{3}$,

$P = 16\left(3+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

Запремина је једнака збиру запремина призме и пирамиде, па је

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a + \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$, $H = \frac{\sqrt{6}a}{3}$. Дакле,

$V = \left(16\sqrt{3} + \frac{16\sqrt{2}}{3}\right)\text{cm}^3$.

108. **а)** $54\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; **б)** $216\ \text{cm}^3$;

в) $108\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; **г)** $100\sqrt{23}\,\text{cm}^3$.

109. $\frac{75\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^3$. **110.** $600\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

111. $324\sqrt{2}\,\text{cm}^3$. **112.** $480\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

113. $108\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

114. $a = 4\ \text{cm}$, $h = 5\ \text{cm}$, $H = \sqrt{13}\,\text{cm}$, $V = 8\sqrt{39}\,\text{cm}^3$.

115. Површина једне бочне стране је $72\ \text{cm}^2$. Апотема је 12 cm. Висина пирамиде је 6 cm. Запремина је $V = 432\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

116. $24\sqrt{3}\left(4+\sqrt{17}\right)\text{cm}^3$.

117. Нека је дата пирамида *ABCDEFS*. Тада је троугао *ADS* једнакокраки, а пошто је нагибни угао бочне ивице према равни основе 45°, он је и правоугли са катетом 8 cm. Његова хипотенуза *AD* је већа дијагонала основе пирамиде, па је једнака двострукој дужини основне ивице. Сада је $AD = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$, односно $a = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$. Такође је и $H = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$, па је $V = \left(4\sqrt{2}\,\text{cm}\right)^2\cdot\frac{4\sqrt{2}\,\text{cm}}{3}$,

тј. $V = \frac{128\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$.

118. **а)** $V = 96\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; **б)** $V = 384\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

119. $H^2 = b^2 - a^2$, $H^2 = (3a)^2 - a^2$, па је $a = 4\ \text{cm}$

и $V = 64\sqrt{6}\,\text{cm}^3$.

120. $48\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

121. $B = \frac{3V}{H}$, $B = 3\cdot\frac{864\sqrt{3}}{4} = 648\sqrt{3}$,

$\frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = 648\sqrt{3}, a = 12\sqrt{3}\,\text{cm}$;

$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + H^2$, $h = 2\sqrt{85}\,\text{cm}$;

$P = \left(648\sqrt{3} + 72\sqrt{255}\right)\text{cm}^2$.

122. $a = 2\,\text{cm}$, $h = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $H = 3\,\text{cm}$, $P = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$,

$V = 6\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

123. $V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$, где је $H = \sqrt{b^2 - a^2}$.

$V = 300\sqrt{3}\,\text{mm}^3$, $V \approx 519\,\text{mm}^3$, $V = 0{,}519\,\text{cm}^3$.

$m = \rho V$, $m = 3{,}51\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\cdot 0{,}519\ \text{cm}^3$,

$m = 1{,}82169\,\text{g}$.

Решења задатака за додатни рад

1. $H=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{18}=\dfrac{a^3}{24}$,

$P=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\dfrac{a\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{6}}{2}=\dfrac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$.

2. Тежиште (T) основе ABC, пирамиде $ABCD$ удаљено је од сваке основне ивице пирамиде за $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Нека је P средиште ивице AB, а R подножје нормале из T на PD, тада је троугао TPR правоугли са угловима $30°, 60°$ и $90°$. Одатле следи да је $TR=\dfrac{TP\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{4}$, односно $TR=4$ cm.

3. $P_k : P_t=\sqrt{3}:1$. **4.** $H=5$ cm.

5. Квадрат $ABCD$ странице a могуће је представити као мрежу тростране пирамиде, само ако је $AB=BA'=\dfrac{a}{2}$, $AC=CA''=\dfrac{a}{2}$. Тада је $A'D=A''D=a$, висина те пирамиде, па је запремина једнака $V=\dfrac{BH}{3}=\dfrac{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}}{2}\cdot\dfrac{a}{3}=\dfrac{a^3}{24}$.

6. Запремина тетраедра $AB'C'D'$ једанака је $\dfrac{1}{6}$ запремине квадра $ABCDA'B'C'D'$.

7. Нека је V_1 запремина пирамиде, а V_2 запремина призме. Важи однос $V_1 : V_2=9$.

8. Бочне ивице ове пирамиде су 9 cm, 12 cm и 16 cm. $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9\cdot 12\cdot 16}{2}$, $V=288$ cm^3.

9. Циљ је показати да је троугао ABE правоугли. Нека је F подножје нормале из D на основу ABC. Тада је $AF=BF=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ и $DE=EF=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Уверити се да је $AE^2+BE^2=AB^2$, па користећи обрнуту Питагорину теорему и да је троугао ABE правоугли.

10. 60°. **11.** $P=2\sqrt{3}a^2$, $V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

12. 3 cm. **13.** $P=16\left(3+\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}\right)$ cm^2.

14. $x=18$. **15.** $P=\dfrac{a\sqrt{3}}{16}\sqrt{s^2-a^2}$.

Питалице – решења:

1. не. **2.** да. **3.** не. **4.** да. **5.** да. **6.** да.
7. да. **8.** не. **9.** да. **10.** да.

Предлог теста знања – решења:

1. Г. **2.** А. **3.** В. **4.** Б. **5.** А. **6.** Г. **7.** Г. **8.** Г.

Предлог контролне вежбе – решења:

1. 260 cm^2. **2.** 360 cm^2. **3.** $\left(192+128\sqrt{3}\right)$ cm^2.
4. $600\sqrt{3}$ cm^2.

5. $P=18\left(3\sqrt{3}+10\right)$ cm^2, $V=136\sqrt{3}$ cm^3.

6. $V=8\sqrt{39}$ cm^3. **7.** $P=12\left(3\sqrt{3}+5\right)$ cm^2.

8. $V=\dfrac{81}{8}\sqrt{687}$ cm^3.

9. $P=110\sqrt{3}$ cm^2, $V=76\sqrt{3}$ cm^3.

10. $36\sqrt{3}$ cm^2. **11.** $\dfrac{243\sqrt{2}}{4}$ cm^3. **12.** $144\sqrt{2}$ cm^2.

ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА 6.

1.

Функција	$y=2x-30$	$y=-x$	$y=3x+200$	$y=-3x-200$	$y=x$
Коефицијент	2	–1	3	–3	1
Слободан члан	–30	0	200	–200	0

2.

x	1	2	0	–1	6	–100	100	$\frac{1}{2}$
y	1	–1	3	5	–9	203	–197	2

3. **а)** $y=2x-\dfrac{3}{5}$; **б)** $y=-3x+0,5$; **в)** $y=\dfrac{1}{2}x$.

4. **б)**.

5. $f(2)=0,5\cdot 2+2=3$; $f(-2)=0,5\cdot(-2)+2=1$.

6. $k=12$, $n=-1$.

7. $f(x)=3x$.

8. Нека је a дужина странице квадрата.

а) $O(a)=4a$; **б)** $a(O)=\frac{1}{4}O$;

в) Добијене функције су линеарне.

9. $O=2c+10$.

10. **а)** $y=x+1$; **б)** $y=2x-5$.

11. За $y=-13$ је $-13=3x+7$. Решавањем те једначине добија се да је $x=-\frac{20}{3}$.

12. **а)** $x=5$; **б)** $x=2$; **в)** $x=2{,}25$; **г)** $x=-2{,}5$.

13. **а)** 270000 динара; **б)** 29 кревета.

14. Да.

15. **а)** $nh=10(1\,013-p)$; **б)** $nh=10(1013-982)$, $nh=310$ m.

16. $p=1250+600m$.

17. **а)** $p=\frac{1}{15}s$; **б)** 12 литара; **в)** 480 km. **18.** **в)**.

19. Нека је t време пуњења (у минутима), а $f(t)$ запремина воде. Тада је $f(t)=100\,t$.

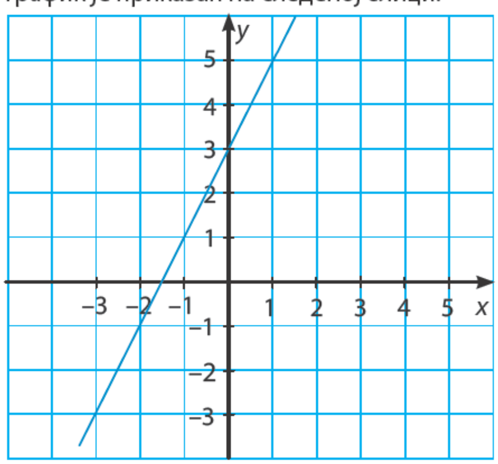
а) 12 000 литара; **б)** За 2 000 минута ($33\frac{1}{3}$ сати).

20. **в)**. **21.** **г)**.

22. С обзиром на то да је једнакост $2=3\cdot1-1$ тачна, дата тачка припада графику.

23. Све дате тачке припадају графику.

24. График је приказан на следећој слици.



Дата тачка припада графику јер је $245=2\cdot121+3$.

25. −13. **26.** $x=\frac{1}{2}$. **27.** $x=4$. **28.** 16.

29. Произвољну тачку која припада графику можемо одредити узимањем произвољне вредности променљиве x и рачунањем вредности функције y за узету вредност променљиве x:

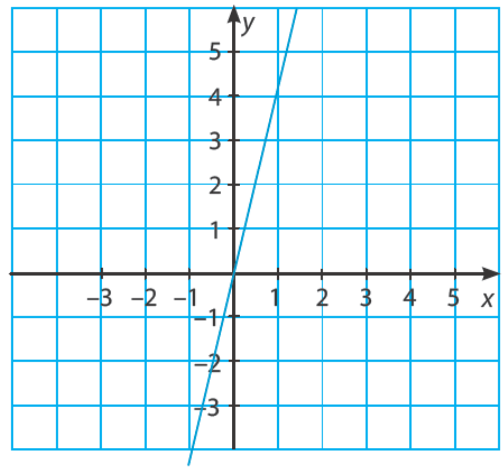
а) за $x=0$, $y=2\cdot0-7$, $y=-7$, па тачка $A(0,-7)$ припада графику, као и тачка $B(3,-1)$;

б) $A(3,7), B(6,9)$; **в)** $A(0,4), B(3,3)$;

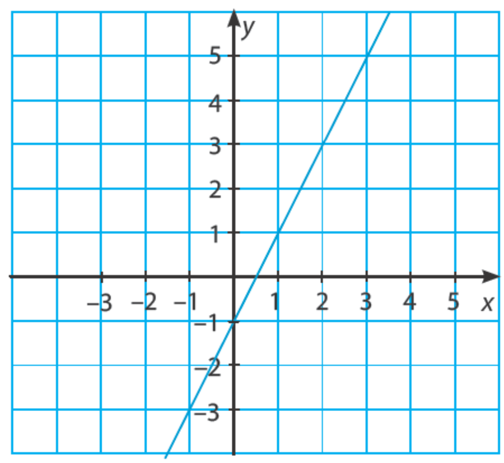
г) $A\left(0,-\frac{7}{2}\right), B\left(-5,-\frac{3}{2}\right)$.

30. **а)** Тачка пресека са x-осом је (3, 0), а са y-осом је (0, −3); **б)** Тачка пресека са x-осом је (2, 0), а са y-осом је (0, 4); **в)** Тачка пресека са x-осом је (−2, 0), а са y-осом је (0, 20); **г)** Тачка пресека са x-осом је (0, 0), а са y-осом је (0, 0).

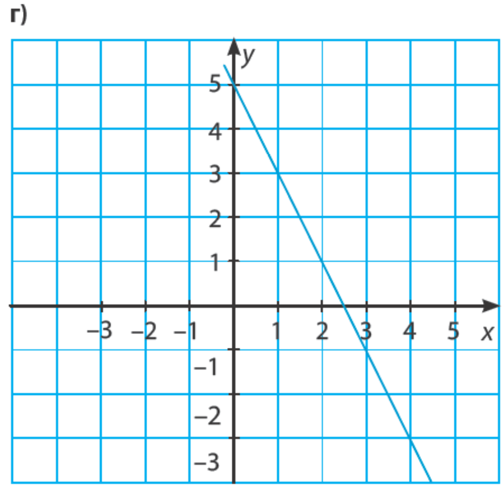
31. **а)**



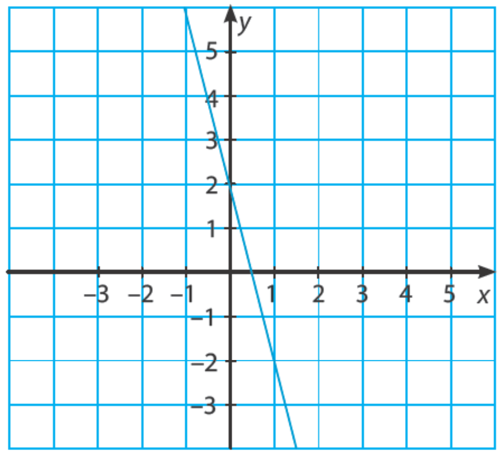
в)



г)



ђ)



32. С лева на десно: $y = x, y = 3x, y = -\frac{1}{3}x$.

33. С лева на десно: $y = x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

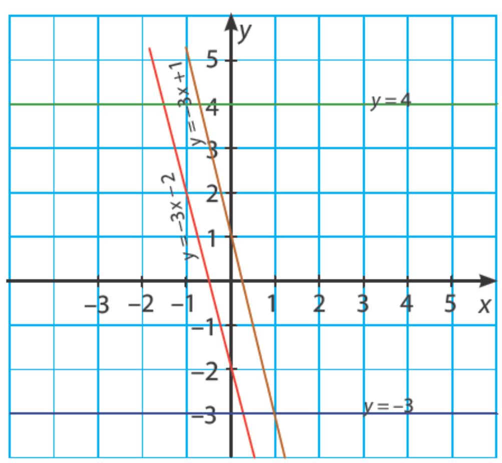
34. График садржи координатни почетак када је $n = 0$, а то се постиже за $a = \frac{1}{2}$.

35. **а)** да; **б)** не.

36. $y = \frac{5}{4}x + 5$. **37.** $y = -x + 3$.

38. $y = 4x + 5$. **39.** $y = -x - 3$.

40. Графици функција $y = -3x + 1$ и $y = -3x - 2$ су међусобно паралелни. Такође, и графици функција $y = 4$ и $y = -3$ су међусобно паралелни, док се било које две функција из ових парова међусобно секу.



41.

$y = -2x$ $\qquad$ $y = x + 7$

$y = \frac{1}{2}x - 3$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x + 7$

$y = x$ $\qquad$ $y = \frac{1}{10}x - 3$

$y = 0{,}1x + 1$ $\qquad$ $y = -2x + 3$

42. $k = 5$. **43.** Растојање је једнако 12.

44. $k = 2$. **45.** $a = \frac{1}{3}, b = -2, k \in R \setminus \{0\}$.

46. $y = \frac{2}{3}x$. **47.** $y = 2x + 3$.

48. Да. **49.** $m = -1$. **50.** $l = \frac{2}{3}$.

51. $k = -6{,}5$.

52. **а)** $O = 12$ cm; **б)** $O = 24$ cm.

53. $\frac{27}{4}$.

54. **а)** $x = \frac{1}{24}$; **б)** $x = \frac{7}{4}$; **в)** $x = 0$.

55. **а)** $x = 5$; **б)** $x = \frac{20}{3}$; **в)** $x = -200$.

56. $n = 20$.

57. Нула функције је $x = -2$. Функција је позитивна за све $x > -2$, односно негативна за све $x < -2$.

58. **а)** За $x < \frac{7}{3}$ је $y < 0$, а за $x > \frac{7}{3}$ је $y > 0$;

б) За $x < 4$ је $y < 0$, а за $x > 4$ је $y > 0$;

в) За $x < \frac{3}{8}$ је $y < 0$, а за $x > \frac{3}{8}$ је $y > 0$.

59. **а)** Нула те функције је $x = \frac{5}{3}$. За све $x > \frac{5}{3}$ је $y < 0$, а за $x < \frac{5}{3}$ је $y > 0$.

б) За све $x > 5$ је $y < 0$, а за $x < 5$ је $y > 0$;

в) За $x > 0$ је $y > 0$, а за $x < 0$ је $y < 0$;

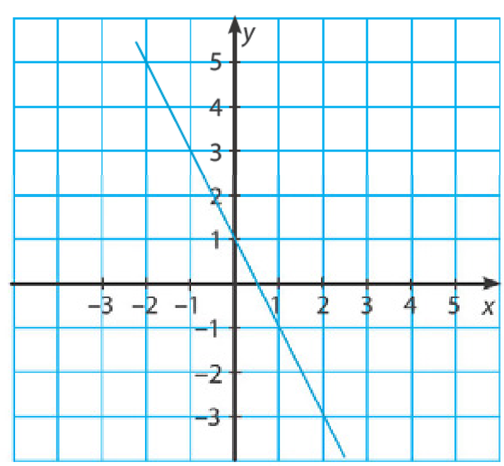
г) За све реалне бројеве x је $y > 0$.

60. За $x > -\frac{2}{3}$. **61.** За $x < \frac{2}{5}$.

62. Тачна је само реченица **б)**.

63. $m = \frac{1}{2}$. **64.** $y = \frac{3}{4}x - 3$.

65. Ради се о линеарној функцији $f(x) = -2x + 1$. График је приказан на следећој слици.



Како је нула функције $x = \frac{1}{2}$, то је $y > 0$ за све $x < \frac{1}{2}$ и $y < 0$ за све $x > \frac{1}{2}$.

66.

Функција	Р (растућа), О (опадајућа)
$y=7x-5$	**Р**
$y=-7x+5$	**О**
$y=\frac{1}{100}x+1$	**Р**
$y=-\frac{1}{2}x$	**О**
$y=0{,}5x-2$	**Р**

67. **а)** растућа; **б)** опадајућа;
в) растућа; **г)** опадајућа; **д)** растућа.

68. На пример, растуће функције су $y=3x-10$ и $y=0{,}5x+1$.

69. На пример, опадајуће функције су $y=-2x+30$ и $y=-x+1$.

70. $r-n=-1$.

71. Дата функција је растућа ако је $3-\frac{a}{2}>0$. Одатле је $a<6$.

72. Дата функција је опадајућа ако је $3k-\frac{1}{2}<0$. Одатле је $k<\frac{1}{6}$.

73. $m<\frac{3}{2}$.

74. Функција је константна ако је $m-7=0$. То се постиже за $m=7$.

75. $l\in\{-1,1\}$.

76. Дата функција је растућа за два природна броја (за $m=1$ или $m=2$).

77. $a\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

78. **а)** $2x-y-3=0$; **б)** $15x-5y-1=0$; **в)** $2x-3y=0$.

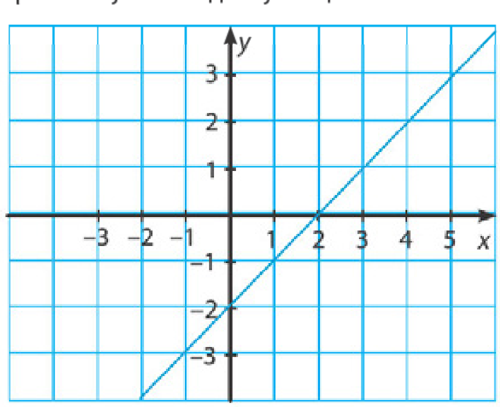
79. **а)** $11x-9y-10=0$; **б)** $-3x-2y+0{,}5=0$.

80. **а)** $y=-x-1$; **б)** $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$; **в)** $y=\frac{1}{2}x$.

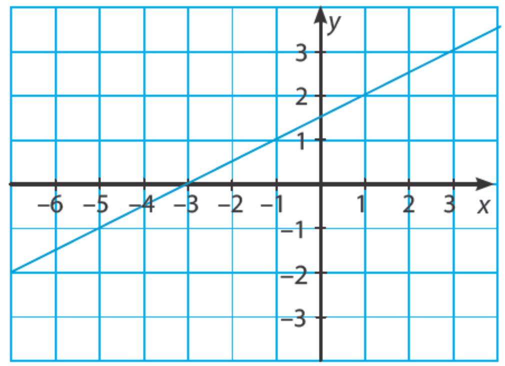
81. $-x-3y+30=0$.

82. **а)** $x=5$; **б)** $x=-\frac{11}{2}$; **в)** $x=0$.

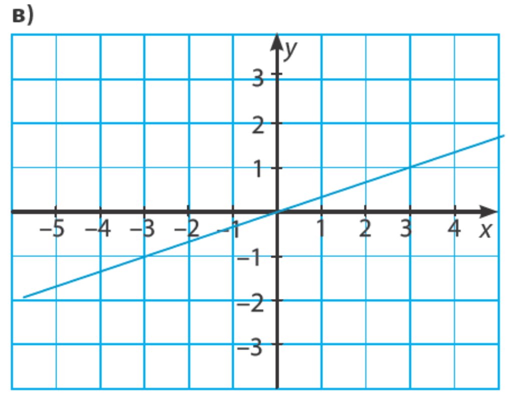
83. **а)** Из $-x+y+2=0$ је $y=x-2$. Њен график приказан је на следећој слици.



б)



в)



84. $T\left(\frac{5}{2},0\right)$. **85.** $T\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

86. Пресек са y-осом $A\left(0,-\frac{5}{3}\right)$,

пресек са x-осом $B\left(\frac{5}{2},0\right)$.

87. За $x>-4$ је $y>0$, а за $x<-4$ је $y<0$.

88. За $x>\frac{15}{2}$ је $y<0$, а за $x<\frac{15}{2}$ је $y>0$.

89. **а)** опадајћа; **б)** растућа; **в)** растућа.

90. Из имплицитног облика $2ax-3y+2=0$ можемо прећи у експлицитни: $y=\frac{2a}{3}x+\frac{2}{3}$. Функција је растућа ако је $\frac{2a}{3}>0$, а то се постиже за $a>0$.

91. За $m>\frac{2}{3}$.

92. Тачке A и B припадају, док тачка C не припада графику дате функције.

93. Одстојање је једнако $\frac{6}{5}$.

94. $y=2x-3$.

95. Површина тог троугла једнака је 4.

96. Та фигура је унија два правоугла троугла који имају заједничко теме. Површина је једнака збиру површина троуглова, а то је $\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

97. Обим је једнак $14+3\sqrt{2}+\sqrt{130}$, а површина је 21.

98. **а)** 300 динара; **б)** $c=300t$.

99. **а)** $c(5)=17+12{,}5(5-1)$, $c(5)=67$ динара;
б) Из $42=17+12{,}5(t-1)$, $t=3$ минута.

100. **б)**.

101. **а)** $c=0{,}3s+35$, где је s пређени пут,
б) 77 евра.

102. $S=38400+500t$, где је t број година протеклих од 2 000.

103. **а)** $v=70\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$; **б)** После 4 сата вожње.

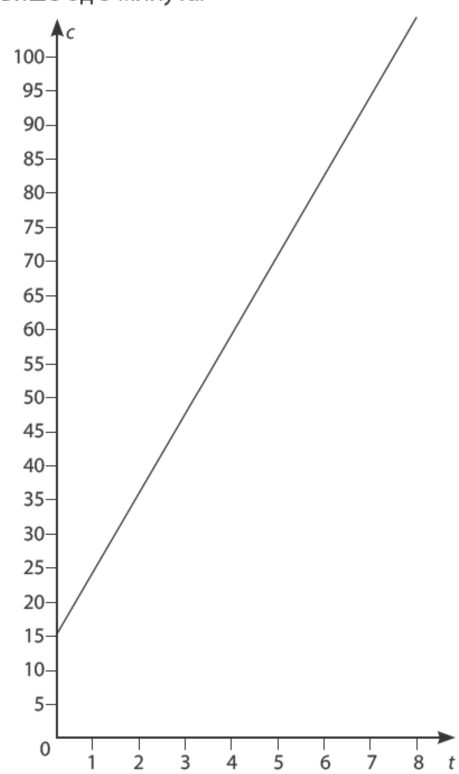
104. **а)** $f(x)=2555+28\cdot x-5\cdot 35\cdot x$, x – број дана.
$f(x)=2555-147x$. Воде ће бити за 17 дана.
б) $f(x)=2555+28\cdot x-35\cdot x$, x – број дана.
$f(x)=2555-7x$. Воде ће бити за 365 дана.

105. $f(t)=3\,500\,000+100\,000\,t$, где је t број година протеклих од 2000. године.
а) 5 000 000 динара; **б)** 7 000 000 динара.

106. **а)** 2 890 километара; **б)** 10 сати.

107. Четвртина цистерне се празни за 45 минута. У њој ће после 75 минута остати 1050 литара воде. Цистерна ће се испразнити после 180 минута (3 сата).

108. $C(t)=15+10t$. Цена разговора од 3,5 минута је 55 динара. Разговор који је плаћен 65 динара трајао је више од 4 и не више од 5 минута.



109. **а)** $x=2$; **б)** $-1<x\le 6$.

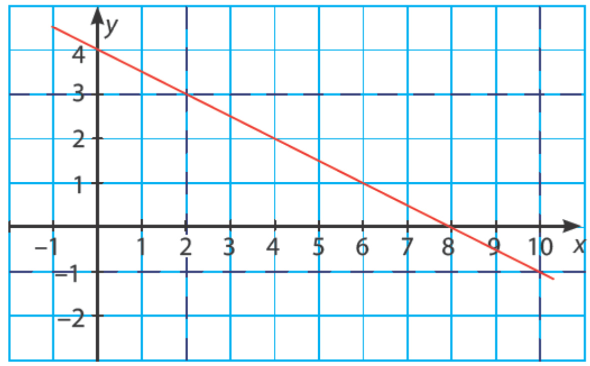
110. Приметимо да је један од њих график растуће, један график опадајуће, а један график константне функције. Одатле закључујемо да је a: $y=-1$, b: $y=0{,}5x-3$; c: $y=-4x+5$.

111. Ниједно од датих тврђења није тачно.

112. Пресечна тачка графика тих функција је (3,2).

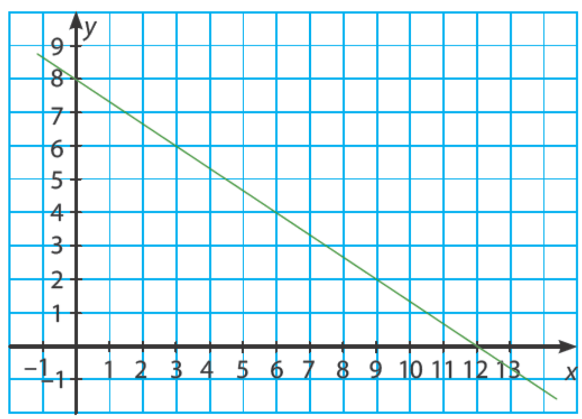
113. $P=24$.

114.



а) $y=4$; **б)** $-1\le y\le 3$.

115. На основу графика утврђујемо да су уређени парови $(3,6)$, $(6,4)$ и $(9,2)$ решења дате једначине.



Решења задатака за додатни рад

1. $a=-3$.

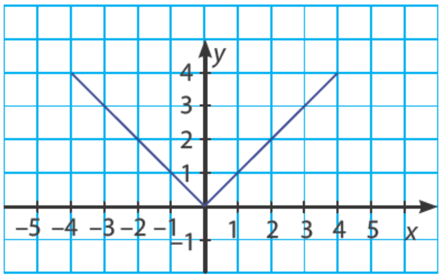
2. Сабирајући дате једначине добија се $2x-8=0$, односно $x=4$. Следи да је $y=3$, па је пресечна тачка графика тих функција (4,3). Одстојање те тачке од координатног почетка једнако је 5.

3. Тражена фуункција је $y=2x-2$.

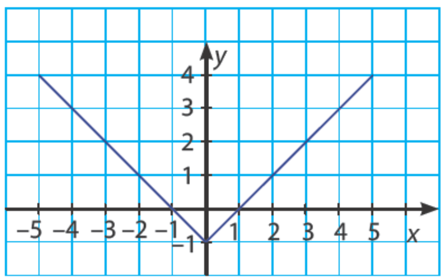
4. Темена тог троугла си $A(-16,0)$, $B(9,0)$ и $C(0,12)$. Дужине страница троугла су 15, 20 и 25, па због $15^2+20^2=25^2$, на основу обрнуте Питагорине теореме следи да је тај троугао правоугли.

5. $P = 18$. **6.** $P = 5$. **7.** $n = 60$, $P = 150$.

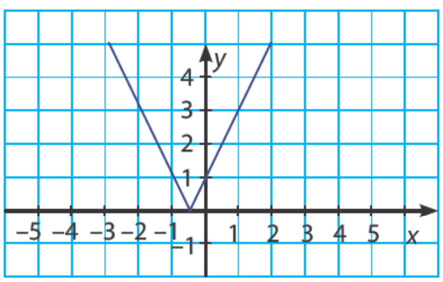
8. а)



б)



в)



9. $P = 8$.

10. Одговарајућа фигура је трапез, а његова површина је једнака 6.

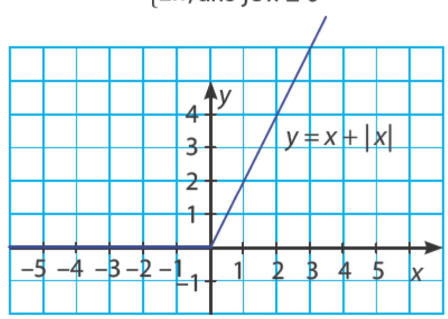
11. $k = -1$ и $n = 10$ или $k = \frac{1}{3}$ и $n = \frac{14}{3}$.

12. Због дефинисаности датог услова, бројеви x и y морају бити различити од нуле. Ако уређени пар (x, y), односно тачка чије су координате x и y припадају првом или трећем квадранту, онда је $xy > 0$, па је дата неједнакост еквивалентна са $y > x$. У другом случају, ако је $xy < 0$, добија се неједнакост $y < x$, која важи за координате свих тачака у четвртом квадранту ($x > 0$ и $y < 0$) и не важи ни за једну тачку у другом квадранту ($x < 0$ и $y > 0$) (види слику). При томе тачке за чије координате важи $x = y$ и све тачке координатних оса не припадају траженом скупу.

13. Из $||x - 2| - 1| = a$, следи да је $a \geq 0$.
За $x < 2$ једначина постаје
$|2 - x - 1| = |1 - x| = a$, док за за $x \geq 2$,
постаје $|x - 3| = a$.
Даљим разматрањем добијају се четири једначине:
1) у интервалу $(-\infty, 1)$: $1 - x = a$;
2) у интревалу $[1, 2)$: $x - 1 = a$;
3) у интервалу $[2, 3)$: $3 - x = a$;
4) у интервалу $[3, \infty)$: $x - 3 = a$.

Ако је $a = 0$, решења су: 1 и 3 и има их 2.
Ако је $0 < a < 1$, решења су: $1 - a$, $1 + a$, $3 - a$ и $3 + a$ и има их 4.
Ако је $a = 1$, решења су: 0, 2, 4 и има их 3.
Ако је $a > 1$, решења су: $1 - a$ и $3 + a$ и има их 2.
Према томе, највећи број решења је четири и добија се ако је $0 < a < 1$.

14. $y = |x| + x = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x < 0 \\ 2x, & \text{ако је } x \geq 0 \end{cases}$



15. Из $f(1) + f(2) + ... + f(10) = 10$, односно
$(a + b) + (2a + b) + (3a + b) + ... + (10a + b) = 10$,
следи да је $55a + 10b = 10$, $11a + 2b = 2$.
Из $f(1) - f(2) + f(3) - ... - f(10) = -10$, односно
$(a + b) - (2a + b) + (3a + b) - ... - (10a + b) = -10$,
следи $-5a = -10$. Одатле је $a = 2$ и $b = -10$.
Дакле, реч је о функцији $f(x) = 2x - 10$,
па је $f(0) = -10$.

Питалице – решења:

1. да. **2.** не. **3.** да. **4.** да. **5.** не. **6.** да.
7. не. **8.** не. **9.** да. **10.** да. **11.** не. **12.** да.

Предлог теста знања – решења:

1. Б. **2.** Б. **3.** В. **4.** Г. **5.** Д. **6.** Б. **7.** Б. **8.** Г.

Предлог контролне вежбе – решења:

1. $x = 8$. **2.** $k = -1$.

3. а) 83 квадрата; **б)** $K(n) = 2n - 1$;

в) 1 011. фигура.

4. Пресек са x-осом $A(-6,0)$, пресек са y-осом $B(0,3)$.

5. $k = \frac{2}{3}, n = -4; f(100) = \frac{188}{3}$.

6. $k = \frac{3}{2}, n = 3,\ f(60) = 93$.

7. а) За $x \in (-\infty, -6)$ је $y < 0$;

б) За $x = -6$ је $y = 0$;

в) За $x \in (-6, \infty)$ је $y > 0$.

8. $k = 3, n = -12$; С обзиром на то да је $k > 0$, дата функција је растућа.

9. а) Дата функција је растућа за $k \in (-\infty, -2)$;

б) За $k \in \{-2, 2\}$.

10. в).

11. а) За $k > 3270$; **б)** $k = 53\,270$.

12. а) $y = 1{,}8x + 32$; **б)** 97,7F;

в) Постоји. То је – 40°.

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА 7.

1. Једначине са две непознате су: **а), в)** и **г).** Линеарне једначине су: **а)** и **в).**

2. а) $5x + 6y = 7$; **б)** $12m + 13 = 14n$.

3. а) $a + b = 57$; **б)** $2x - 3y = 2021$; **в)** $m : n = 9$.

4. а) $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25$;

б) $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 = -3 + 28 = 25$.

5. а) $8 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20 \neq 7$;

б) $8 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 40 - 6 = 34 \neq 7$.

6. а) Из $3 \cdot m - 2 \cdot 4 = 7$ следи да је $3m = 15$ и $m = 5$;

б) Из $3 \cdot 1 - 2 \cdot n = 7$ следи да је $-2n = 4$ и $n = -2$.

7. а) $7x + y = 7 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 45$;

б) $x - y = 7 - (-4) = 11$.

8. а) $O = 2(a + b) = 200$;

б) $m = (a + b) : 2 = 24$; $O = a + 2b = 100$.

9. Да.

10. а) (7,0) задовољава прву, а не задовољава другу једначину;

б) (2, 2) је решење;

в) (–2, 5) не задовољава ни прву ни другу једначину.

11. Решење датог система једначина је (2, 2).

12. (–1, 5) задовољава прву, а не задовољава другу једначину;

б) (4, 9) не задовољава прву једначину.

13. $\begin{cases} 3x + 11y = 9 \\ 6x - 5y = 18 \end{cases}$.

14 Из друге једначине је b једнако 2 или –2.

Тада је $a = 6$ или $a = -\frac{14}{3}$.

15. Не постоје јер не може бити истовремено $7x - 2y = 15$ и $7x - 2y = 9$.

16. Јесу, јер уређени пар (0, 0) задовољава и једну и другу једначину система.

17. Уређени пар (0, 5) је решење и једног и другог система.

18. Уређени пар (4, 5) је решење и једног и другог система једначина.

19. Скуп решења првог система је $S_1 = \{(1, 2)\}$, а скуп решења другог система је $S_2 = \{(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)\}$. Скупови нису једнаки, па системи нису еквивалентни.

20. Скуп решења другог система је $S_2 = \{(2, 1)\}$, а скуп решења првог система је $S_1 = \{(2, 1)\}$. Како су ти скупови једнаки, системи једначина су еквивалентни.

21. $\begin{cases} 2m + 3 = 7 \\ 3n - 10 = 17 \end{cases}$.

22. Скуп решења првог и другог система $S_1 = S_2 = \{(2, -2)\}$ су једнаки, а системи једначина су еквивалентни.

23. $\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$.

24. Решење другог система је $x = 1$, $y = 1$, што је и решење првог система. Системи једначина су еквивалентни.

25. Први и трећи су еквивалентни, јер је (1, –3) решење и једног и другог система. Други систем има решење (1, –4) и није еквивалентан са првим и трећим системом.

26. Други систем има решење (0, 1), а то није решење првог система и системи нису еквивалентни.

27. Нису, јер је $S_1 = \{(1, -4)\}$, а скуп решења другог система је $S_2 = \{(1, 4), (1, -4)\}$, па системи нису еквивалентни.

28. И један и други систем имају решење (4, 3).

29. **а)** $x = 3, y = 3$; **б)** $a = -2, b = 2$; **в)** $m = 4, n = 3$.

30. **а)** $\begin{cases} 3x + 4y = 13 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \to \begin{cases} 3(2y+1) + 4y = 13 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 10y + 3 = 13 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \to \begin{cases} 10y = 10 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases};$

б) $\begin{cases} a = b - 2 \\ 4b - 5a = 5 \end{cases} \to \begin{cases} a = b - 2 \\ 4b - 5(b-2) = 5 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} a = b - 2 \\ -b + 10 = 5 \end{cases} \to \begin{cases} a = b - 2 \\ -b = 5 - 10 \end{cases} \to \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases};$

в) $\begin{cases} n = m + 6 \\ 7m + 2n = 21 \end{cases} \to \begin{cases} n = m + 6 \\ 7m + 2(m+6) = 21 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} n = m + 6 \\ 7m + 2m + 12 = 21 \end{cases} \to \begin{cases} n = m + 6 \\ 9m = 9 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} n = 7 \\ m = 1 \end{cases}.$

31. **а)** $\begin{cases} 5x + 4y = 24 \\ x - y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} 5x + 4y = 24 \\ x = y + 3 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 5(y+3) + 4y = 24 \\ x = y + 3 \end{cases} \to \begin{cases} 9y + 15 = 24 \\ x = y + 3 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases};$

б) $a = 4, b = 2$; **в)** $m = 1, n = -1$.

32. **а)** $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ x = 4 - 3y \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 8(4 - 3y) - 3y = 5 \\ x = 4 - 3y \end{cases} \to \begin{cases} 32 - 27y = 5 \\ x = 4 - 3y \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases};$

б) $p = 5, q = 2$;

в) $\begin{cases} 0{,}2a + 0{,}3b = 1{,}2 \\ 0{,}4a - 0{,}1b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2a + 3b = 12 \\ 4a - b = 10 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2a + 3(4a - 10) = 12 \\ b = 4a - 10 \end{cases} \to \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}.$

33. **а)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ y - x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ y = x + 1 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 3x + 4(x+1) = 18 \\ y = x + 1 \end{cases} \to \begin{cases} 7x = 14 \\ y = x + 1 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases};$

б) $x = 15, y = 4$.

34. Тражени бројеви су решења система једначина: $x + y = 2\,021$ и $x - y = 765$. Следи да је $x = 1\,393$ и $y = 628$.

35. Тражене суме су решења система једначина $m = n + 1\,000$ и $m = 5n$. Како је $m = 1\,250$ и $n = 250$, тј. Милан има 1 250 динара, а Никола 250 динара.

36. Тражени бројеви су решења система једначина $x + y = 200$ и $x - y = 36$. Следи да је $x = 118, y = 82$.

37. Из $x + y = 200$ и $5x + 2y = 520$ следи да је цена свеске $x = 40$ и цена књиге $y = 160$. Две свеске и једна књига коштају $80 + 160 = 240$ динара.

38. Из услова задатка је $m = 5n + 2$ и $m + n = 50$. Тражени бројеви су $m = 42$ и $n = 8$.

39. Из услова задатка је $a + b = 50$ и $a - b = 8$, па је $a = 29, b = 21$. Површина правоугаоника је 609 cm^2.

40. Из $a + 2b = 32$ и $6b = 5a$, следи да је $a = 12$ и $b = 10$. Из Питагорине теореме висина једнакокраког троугла је 8 cm. Површина датог троугла је 48 cm^2.

41. Ако је основна ивица призме једнака a, а бочна b, онда је $8a + 4b = 60$ и $b = a + 3$. Следи да је $a = 4$, а $b = 7$. Површина призме је $32 + 112 = 144$ cm^2 и запремина је 112 cm^3.

42. Из услова задатка је $x + y = 90^\circ$, $x + z = 180^\circ$ и $y + z = 180^\circ$, следи да је $x = y = 45^\circ$ и $z = 135^\circ$.

43. Нека су тражени бројеви x, y и z.
Тада је $x + y = 56$, $x + z = 84$ и $y + z = 112$.
Сабирањем све три једначине добија се да је $2(x + y + z) = 252$, тј. $x + y + z = 126$,
Тада је $x = 14$, $y = 42$ и $z = 70$.

44. Из услова задатка је $a - b = 2$ и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 2(a + b) = 28$. Следи да је $a + b = 14$, па је $a = 8$ и $b = 6$.
Хипотенуза датог правоуглог троугла је 10.

45. **а)** $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 5x-3y=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x=21 \\ 5x-3y=6 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x=3 \\ 15-3y=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 6a+5b=22 \\ 7b-6a=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12b=24 \\ 7b-6a=2 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} b=2 \\ 14-6a=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases};$

в) $\begin{cases} 4m+9n=13 \\ 5n-2m=3/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4m+9n=13 \\ 10n-4m=6 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 4m+9n=13 \\ 19n=19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4m+9=13 \\ n=1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases};$

г) $\begin{cases} 8x=5y \\ 4x+3y=44/(-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x=5y \\ -8x-6y=-88 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 8x=5y \\ -6y=5y-88 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x=5y \\ 88=11y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x=40 \\ y=8 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=8 \end{cases}.$

46. **а)** $x=3, y=4$; **б)** $a=\frac{1}{5}, b=\frac{7}{5}$; **в)** $c=1, d=2$.

47. **а)** $x=y=2$; **б)** $p=1, q=-1$; **в)** $m=n=0$.

48. **а)** $x=-1, y=2$; **б)** $x=4, y=10$; **в)** $x=-1, y=2$.

49. Из услова задатка је $5s+7o=220$ и $s-o=20$. Следи да је $s=30$ и $o=10$. Дакле, 7 свезака и 5 оловака кошта $7\cdot 30+5\cdot 10=210+50=260$ динара.

50. Како је $x+y=74$, а $x-y=8$, то је $x=41$ и $y=33$.

51. Из услова задатка је $10x+y=4(x+y)$ и $10x+y=12(y-x)$, следи да је $4(x+y)=12(y-x)$, тј. $16x=8y$ или $y=2x$. Тражени бројеви су 12, 24, 36 и 48.

52. Ако је за 8 сокова и 7 лимунада плаћено 820 динара и ако је за 4 сока и 3 лимунаде плаћено 380 динара, онда је за 8 сокова и 6 лимунада плаћено 760 динара. Дакле, једна лимунада кошта 60 динара, а један сок 50 динара. Тада 6 сокова и 5 лимунада кошта $300+300=600$ динара.

53. Ако је $x-y=62$ и ако је $x=6y+2$, онда је $62+y=6y+2$, па је $y=12$ и $x=74$.

54. Из $x+y=100$ и $x:2=y:3$ следи да су тражени бројеви 40 и 60.

55. Из услова задатка је $M=1\,300+l$ и $M:3=100+l$, па је $M=1\,800$ и $l=500$. Лопта кошта 500 динара.

56. Из услова задатка је $L=3Ž$ и $L-1\,000=4(Ž-1\,000)$, па је $L=9\,000$ и $Ž=3\,000$.

57. Ако је тражени двоцифрени број $10x+y$, онда је $10x+y=x+y+45=x-y+53$, па је $x=5$ и $y=4$.

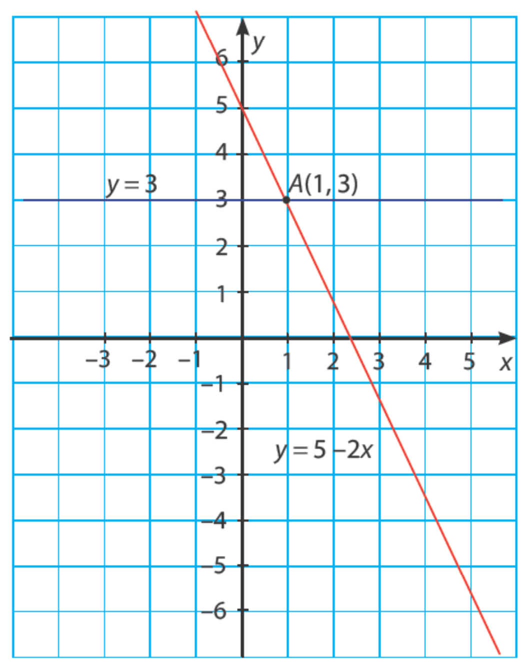
58. **а)** Систем једначина је немогућ;
б) Систем једначина је неодређен.

59. Ако је $\frac{1}{x}=a$ и $\frac{1}{y}=b$, онда је $\begin{cases} 5a-2b=4 \\ 15a+4b=17 \end{cases}$

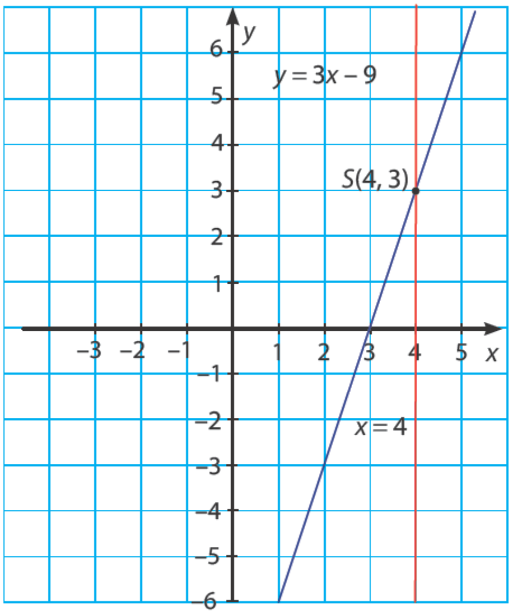
и $a=1,\ b=\frac{1}{2}$, то је $x=1$ и $y=2$.

60. **а)** $|x|=3, |y|=4$ и
$S=\{(3,4),(3,-4),(-3,4),(-3,-4)\}$;
б) $x^2=9, y^2=4, S=\{(3,2),(3,-2),(-3,2),(-3,-2)\}$.

61.
а)

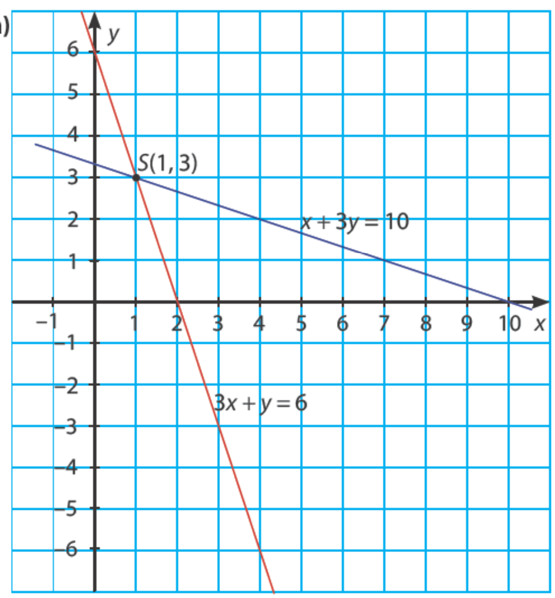


б)

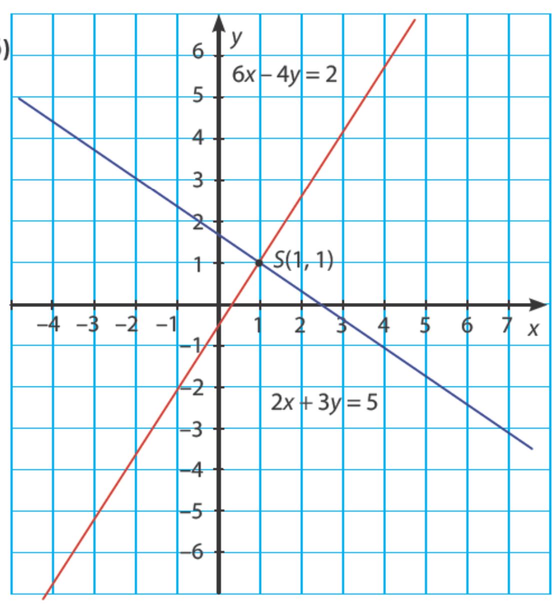


62.

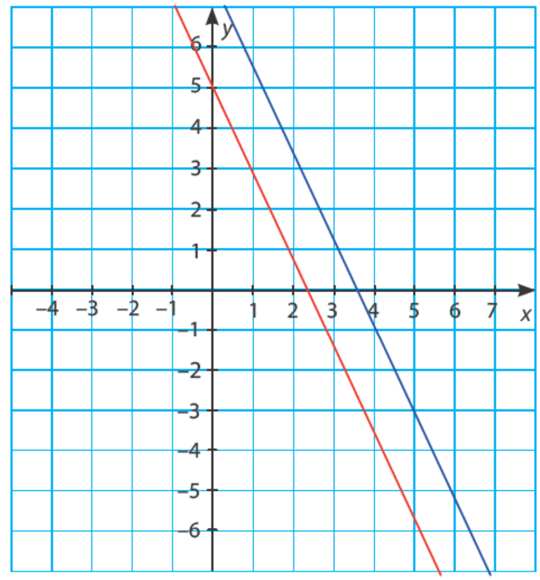
а)



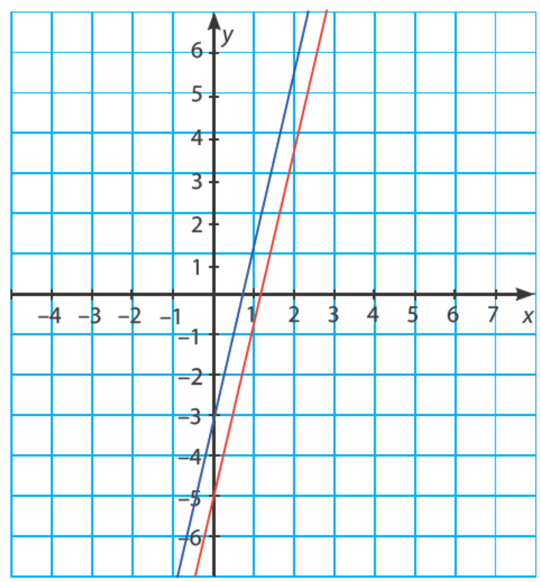
б)



63. а) Систем једначина нема решења;



б) Систем једначина нема решења.



64. Решење теста 252 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

65. $P = 7 \cdot 7 = 49$.

66. Дијагонала квадрата је 8, па је површина квадрата 32.

67. а) Основица је 8, висина 4, па је површина 16; **б)** Основица је 4, висина 2, па је површина 4.

68. Заменом $x = 1$, $y = 1$ у систем једначина добија се да је $3 - a = 1$ и $b - 2 = 1$, па је $a = 2$ и $b = 3$.

69. а) $m = 3, n = 2$; **б)** $m = 2, n = -6$; **в)** $m = 2, n = 2$.

70. Решење система је $x = 5, y = 1$, па систем није ни немогућ ни неодређен.

71. Дати систем је еквивалентан са једначином $2x - 3y = 8$ и неодређен је јер је сваки уређен пар $(3\alpha + 4, 2\alpha)$ његово решење.

72. Зато што није могуће да је $7x - 2y = 9$ и $7x - 2y = 10$.

73. **а)** Систем је немогућ; **б)** $a = b = 1$;
в) систем је немогућ.

74. **а)** Систем је неодређен;
б) систем је неодређен;
в) $c = 2, d = 1$.

75. $\begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}.$

76. $\begin{cases} x - y = 17 \\ 2x - 2y = 34 \end{cases}.$

77. Ако 5 свезака и 7 оловака кошта 220 динара, онда 10 свезака и 14 оловака кошта дупло, тј. 440 динара, а 15 свезака и 21 оловка кошта три пута више, дакле 660 динара.

78. $x + y = 15$ и $3x + 3y = 45$.

79. $x + y = 7$ и $2x = 14 - 2y$.

80. Из $x + y = 64$ и $x : 4 - y : 3 = 2$, следи да је $x = 40$ и $y = 24$.

81. Како је $120x + 80y = 84\,000$ и $3x = 5y$, то је $3x + 2y = 7y = 2100$ и $y = 300$ и $x = 500$.

82. Из $x = y$ и $x - 42 = 3(y - 214)$, следи да је $x - 42 = 3x - 642$. Мира и Весна су имале по 300 динара.

83. Ако је $x + y = 60$ и $x - 5 = 4(y - 5)$, онда је $x = 45$ и $y = 15$. Отац има 45, а син 15 година.

84. Нека у тој породици има x мушке и y женске деце. Из услова задатка $x - 1 = y$ и $x = 2(y - 1)$. Следи да је $y + 1 = 2(y - 1)$ и $y = 3$ и $x = 4$, па у тој породици има седморо деце.

85. Из услова задатка је $x = 4y$ и $x - 950 = y - 50$. Следи да је $y = 300$ и $x = 1\,200$.

86. Ако је $x = 2y$ и $x - 20 = 3(y - 20)$, онда је $2y - 20 = 3y - 60$, па је $y = 40$, а $x = 80$.

87. Из услова задатка $20x + 30y = 50 \cdot 26 = 1\,300$ и $30x + 20y = 50 \cdot 24 = 1\,200$. Решавањем система једначина добија се $x = 20$°C и $y = 30$°C.

88. Нека је растојање од A до B једнако s и нека је брзина воза v. Из услова задатка је $s = (v + 20)6$ и $s = (v - 20)11$.
Следи да је $6v + 120 = 11v - 220$ и $v = 68$.
Тада је $s = 88 \cdot 6 = 48 \cdot 11 = 528$.

89. Решење теста 254 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

90. Из $x + y = 2\,010$, $x : y = 3 : 7$, следи да је $x = 603$ и $y = 1\,407$.

91. Како је $x - y = 19$ и $(x + y) : 3 = 27$, то је $x = 50$ и $y = 31$.

92. Из $x + y = 3(x - y)$ и $x - 10 = y + 10$, добија се $x = 40$ и $y = 20$.

93. Како је $x + y = 7$ и $10x + y - (10y + x) = 9(x - y) = 45$, то је $x = 6$, $y = 1$ и тражени број је 61.

94. Из $10x + y = 4(x + y)$ следи да је $6x = 3y$, тј. $y = 2x$. Тражени бројеви су 12, 24, 36 и 48.

95. Како је $10x + y + (10y + x) = 11(x + y) = 99$, то је $x + y = 9$. Тражени су 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 и 81.

96. Из $x + y = 234$ и $xy = (x + 20)(y - 20) = xy + 20y - 20x - 400$, следи $x = 107$, $y = 127$.

97. Како је $x + y = 100$ и $\dfrac{1{,}25x}{0{,}75y} = \dfrac{5x}{3y} = \dfrac{x}{y} + 1$, то је $x = 60$ и $y = 40$.

98. Из $\alpha + \beta = 180°$ и $\alpha - \beta = 24°$ следи да је $\alpha = 102°$ и $\beta = 78°$.

99. Ако је $a + 2b = 72$ и $b - a = 6$ следи да је $a = 20$ cm и $b = 26$ cm. Из Питагорине теореме, висина троугла је 24 cm, а површина 240 cm^2.

100. Из $a - b = 7$ и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 7(a + b) = 189$ следи да је $a + b = 27$ и $a = 17$ cm и $b = 10$ cm.

101. Како је $2(a + b) = 140$ и $a - b = 10$, то је $a = 40$ и $b = 30$. Дијагонала правоугаоника, тј. пречник круга је 50, а обим 50π cm.

102. Решавањем система
$a + b = 60$ и $2(1{,}25a + 1{,}5b) = \dfrac{4}{3} \cdot 120 = 160$
добија се $a = 40$ и $b = 20$.
Површина правоугаоника је 800 cm^2.

Решења задатака за додатни рад

1. **а)** $x = 1, y = 2, z = 3$; **б)** $x = 4, y = 1, z = 5$;
в) $x = 4, y = 3, z = 5$.

2. Ако од друге једначине одузмемо прву, добија се $2y^2 = 2$, па је $y^2 = 1$ и тада је $x^2 = 4$. Дакле, $x \in \{-2, 2\}$ и $y \in \{-1, 1\}$. Трећу једначину задовољава једино уређени пар $(2, -1)$.

3. Решење система који чине прве две једначине је $x = 3, y = 1$. Добијена решења не задовољавају трећу једначину, па дати систем нема решења.

4. Ако се од прве једначине одузме друга, добија се $2y = 22$, $y = 11$. Тада је $x + z = 55$. Решење система је $(x, 11, 55 - x)$ и има их бесконачно.

5. **а)** $a = -2$; **б)** $a \neq -2$.

6. Ако од прве једначине одузмемо другу, добијамо $a^2x - x = a - 1$ или $(a^2 - 1)x = (a + 1)(a - 1)x = a - 1$.

Ако је $a = 1$, систем постаје $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ и има бесконачно много решења облика $(m, 1 - m)$ где је m неки реалан број.

Ако је $a = -1$ добија се систем $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ који је очигледно противуречан и нема решења. Ако је $a \neq 1$ и $a \neq -1$, онда дати систем једначина има јединствено решење

$$x = \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a+1},$$

$$y = 1 - x = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

7. Ако се дати систем реши по $|x|$ и $|y|$ добија се да је $|x| = 3$ и $|y| = 2$. Тада је $(x, y) \in \{(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)\}$.

8. Ако је $x \geq 0$, онда добијени систем једначина нема решења, јер су друга и трећа једначина противуречне. Ако је $x < 0$, онда систем има јединствено решење $x = -1$, $y = 2019$, $z = 1$.

9. Нека једна шибица кошта x, а 20 шибица y динара. Тада y шибица кошта 500 динара. Добијају се једначине $20x = y$ и $yx = 500$. $20x \cdot x = 500$, $20x^2 = 500$, $x^2 = 25$, $x = 5$, $y = 100$. *Провера*: 20 шибица кошта 100 динара, а за 500 динара се може купити тачно 100 шибица. Следи да 2 020 шибица кошта 10 100 динара.

10. a – цена сендвича,
b – цена кафе,
c – цена палачинке:

$$\begin{cases} 4a + b + 10c = 6{,}76 & \text{(помножимо са 2)} \\ 3a + b + 7c = 5{,}04, & \text{(помножимо са 3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 2b + 20c = 13{,}52 \\ 9a + 3b + 21c = 15{,}12 \end{cases}$$

Одузимањем прве једначине од друге: $a + b + c = 1{,}60$, тј. сендвич, чаша кафе и палачинка коштају 1,60 долара.

РЕШЕЊЕ 2:

Од једнакости $4a + b + 10c = 6{,}76$ одузме се $3a + b + 7c = 5{,}04$. Добија се $a + 3c = 1{,}72$ и $a = 1{,}72 - 3c$. Из прве једначине $b = 6{,}76 - 10c - 4a = 6{,}76 - 10c - 4(1{,}72 - 3c) = = 2c - 12$. Тада је $a + b + c = (172 - 3c) + (2c - 12) + c = 1{,}60$.

11. Нека краљ тренутно има x, а краљица y година. Краљ има $x - y$ година више од краљице. Када је краљ имао y година, краљица је имала $(x - y)$ година мање, тј. $y - (x - y) = 2y - x$ година.
Први услов: $x = 2(2y - x)$, па је $x = 4y - 2x$ и $3x = 4y$.
Када краљица буде имала x година, краљ ће имати $x + x - y = 2x - y$ година.
Други услов: $x + 2x - y = 63$.
Решавањем система $3x = 4y$, $3x - y = 63$, следи $4y - y = 3y = 63$, $y = 21$.
Краљица сада има 21 годину.
Како је $3x = 4y = 84$, то је $x = 28$, па краљ сада има 28 година.

12. Из услова задатка је $a + b + c = 1\,000$. Како је $2m = 2a + b = 1\,100$, то је $b = 1\,100 - 2a$. Тада је $a + 1\,100 - 2a + c = 1\,000$, па је $a - c = 100$. Дакле, $n = 100$.

13. Нека је сваки од 6 студената добио x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 динара. Ако је $x_1 = a$ и $x_2 = b$, онда је на основу услова задатка, тј. чињенице да је сваки број једнак половина збира суседних, тј. $x_3 = 2b - a$, $x_4 = 3b - 2a$, $x_5 = 4b - 3a$ и $x_6 = 5b - 4a$. Како је $2x_1 = x_6 + x_2$, то је $2a = 5b - 4a + b$, па је $6a = 6b$. Дакле, $a = b$, што значи да је $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 10\,000$ динара.

14. Нека један слон за један дан попије количину воде s. Нека је количина воде у језеру x и нека сваког дана извор даје количину воде y. Тада је $x + y = 183s$ и $x + 5y = 37 \cdot 5s = 185s$. Решавањем система једначина добија се да је $4y = 2s$, $y = \frac{s}{2}$. Тада је $x = \frac{365s}{2}$. Ако један слон пије k дана, онда је $x + ky = ks$, па је

$k(s - y) = x$

$$k = \frac{x}{s-y} = \frac{\frac{365s}{2}}{s - \frac{s}{2}} = \frac{\frac{365s}{2}}{\frac{s}{2}} = 365 \text{ дана.}$$

15. Ако све једначине датог система саберемо, добија се да је $3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = 42$, па је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 14$. Како је $x_2 + x_3 + x_4 = 4$ и $x_5 + x_6 + x_7 = 7$, то је $x_1 = 3$. Слично је $x_3 + x_4 + x_5 = 5$ и $x_6 + x_7 + x_1 = 8$, па је $x_2 = 1$. Аналогно се добија $x_3 = -1$, $x_4 = 4$, $x_5 = 2$, $x_6 = 0$, $x_7 = 5$.

16. Ако је број Питагориних ученика $28x$ (јер је НЗС $(2, 4, 7) = 28$), онда је $14x + 7x + 4x + 3 = 28x$, $25x + 3 = 28x$, $x = 1$.
Питагора је имао 28 ученика. *Напомена*: ово је решење које подразумева да групације математичара, природњака, „ћутолога" и жена немају пресек. Ученицима се препушта да размотре и случај када постоје пресеци.

17. Нека је син добио x-ти, жена y-ти и кћи z-ти део наслеђа. Према одредбама тестамента, очигледно је $x = 2y$ и $y = 2z$. Тада је $x = 4z$, а то значи да ће имовина аристократе бити подељена на 7 делова у односу $4z : 2z : z = 4 : 2 : 1$.

18. Нека су x, y и z редом количине траве коју за један дан попасу редом крава, коза и гуска, a количина траве која је присутна на ливади на почетку процеса и b количина траве која порасте за један дан. Из услова задатка је
$x = y + z$, $45x + 45y = a + 45b$,
$60x + 60z = a + 60b$ и $90y + 90z = a + 90b$.
Решавањем система добија се:
$x = \frac{a}{90} + b$, $y = \frac{a}{90}$ и $z = \frac{a}{180}$.
Нека крава, коза и гуска пасу k дана, онда је:
$k(x + y + z) = a + kb$
$x + y + z = \frac{a}{k} + b = \frac{a}{90} + b + \frac{a}{90} + \frac{a}{180}$
$\frac{a}{k} = 5\frac{a}{180}$, $k = 36$ дана.

19. a – количина траве на 1ha ливаде
b – количина траве на 1ha која порасте за једну недељу
x – количина траве коју попасе једна крава за једну недељу

$$\begin{cases} 4 \cdot 12x = a \cdot \frac{10}{3} + 4b \cdot \frac{10}{3} \\ 9 \cdot 21x = a \cdot 10 + 9b \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 144x = 10a + 40b \\ 189x = 10a + 90b \end{cases}$$

$a = 12b$, $x = \frac{10}{9} \cdot b$

k – број крава на ливади од 24 ha
$18kx = 24 \cdot a + 24 \cdot 18b$
$18k \cdot \frac{10}{9} b = 24 \cdot 12b + 24 \cdot 18b$
$k = 36$

20. m – количина траве коју крава попасе за 1 дан
a – количина траве на почетку
b – количина траве која порасте за 1 дан

$$\begin{cases} 60 \cdot 36m = a + 36b \\ 20 \cdot 100m = a + 20b \end{cases}$$

Ако се од прве одузме друга једначина:
$160m = 16b$, $b = 10m$, $a = 1\,800m$.
Ако 85 крава треба да пасе k дана, онда је:
$85 \cdot km = a + kb = 1\,800m + 10km$,
$75k = 1\,800$, $k = 24$ дана.
Тражена функција се добија из једнакости:
$xym = a + yb = 1\,800m + 10my$,
$y(x - 10) = 1\,800$, $y = \frac{1\,800}{(x - 10)}$.

21. x – број радних дана
y – број нерадних дана

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 48x - 12y = 0 \end{cases}$$

$y = 4x$,
$5x = 30$, $x = 6$
Радник је радио 6 дана, а није радио 24 дана.

22. Нека су тражени бројеви $x_1, x_2, ... x_{2011}$ и нека је скуп $A = \{x_1, x_2, ... x_{2011}\} = B = \{y_1, y_2, ... y_{2011}\}$, где је $y_1 = x_2 + x_3 + ... + x_{2011}$, $y_2 = x_1 + x_3 + ... + x_{2011}$, ... $y_{2011} = x_1 + x_2 + ... + x_{2010}$. Ако се уочене једнакости саберу, добија се да је
$y_1 + y_2 + ... + y_{2011} = 2\,010(x_1 + x_2 + ... + x_{2011})$.
Како је $y_1 + y_2 + ... + y_{2011} = x_1 + x_2 + ... + x_{2011} = S$, то је $S = 2010 \cdot S$, па је
$S = y_1 + y_2 + ... + y_{2011} = x_1 + x_2 + ... + x_{2011} = 0$.
Из $y_1 = x_2 + x_3 + ... + x_{2011}$ добија се $y_1 = S - x_1 = -x_1$. На сличан начин се добија и да је $y_2 = -x_2 ... y_{2011} = -x_{2011}$.
То значи да сваки број у скупу има и свој супротни број. Како има 2 011 бројева, дакле непарно бројева, један од њих је супротан самом себи, тј. једнак је нули. Због тога је $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{2011} = 0$.

23. Ако су написани бројеви $x_1, x_2, ... x_k$ и нека је $S = x_1 + x_2 + ... + x_k$. Из услова задатка је
$6x_1 = x_2 + x_3 + ... + x_k$,
$6x_2 = x_1 + x_3 + ... + x_k$, ... $6x_k = x_1 + x_2 + ... + x_{k-1}$.
Ако се једнакости саберу, добија се
$6S = 6x_1 + 6x_2 + ... + 6x_k = 6S =$
$= (k - 1)(x_1 + x_2 + ... + x_k) = (k - 1)S$.
Тада је $6 = k - 1$, па је $k = 7$.

24. Нека су деца редом појела $x_1, x_2, ... x_k$ бомбона и нека је $S = x_1 + x_2 + ... + x_k$. Следи да је
$x_1 = x_2 + x_3 + ... + x_k - 10 = S - x_1 - 10$,
$x_2 = x_1 + x_3 + ... + x_k - 10 = S - x_2 - 10$, ...
$x_k = x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} - 10 = S - x_k - 10$.
Како је $2x_1 = 2x_2 = ... = 2x_k = S - 10$, то је свако дете добило једнак број бомбона $\frac{S}{k}$.

Ако се једнакости саберу, добија се да је
$S = (k-1)(x_1 + x_2 + ... + x_k) - 10k = (k-1)S - 10k$.

Тада је $(k-2)S = 10k$, па је

$$S = \frac{10k}{k-2} = \frac{10k-20+20}{k-2} = 10 + \frac{20}{k-2}.$$

Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $k-2=1$, тј. $k=3$, онда је $S=30$, па је свако дете добило по 10 бомбона.
2) Ако је $k-2=2$, тј. $k=4$, онда је $S=20$, па је свако дете добило по 5 бомбона.
3) Ако је $k-2=5$, тј. $k=7$, онда је $S=14$, па је свако дете добило по 2 бомбоне.
4) Ако је $k-2=10$, тј. $k=12$, онда је $S=12$, па је свако дете добило по 1 бомбону.
5) Ако је $k-2=20$, тј. $k=22$, онда је $S=11$, што није могуће, јер би свако дете добило по пола бомбоне.

25. Ако се дате једначине саберу, добија се да је
$x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy = (x+y+z)^2 =$
$= x+y+z$. Тада је $x+y+z=0$ или $x+y+z=1$.
Како је у оба случаја вредност израза $x+y+z$ ненегативна, то је:
$x+y+z = |x+y+z|$

$$|x+y+z| - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$|x+y+z| - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$||x+y+z| - \frac{1}{2}| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

$$||x+y+z| - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

Тиме је доказ завршен.

26. Нека је x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 редом број ученика у свакој од пет група, а y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 редом број задатака који је решио сваки ученик у својој групи. На основу услова задатка добијају се једначине
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$ и
$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 = 40$. Како је свака група решила различит број задатака, то је
$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 1+2+3+4+5 = 15$, тј. пет ученика (репрезената својих група) је решило 15 или више задатака. То значи да је преосталих
$(x_1-1) + (x_2-1) + (x_3-1) + (x_4-1) + (x_5-1) =$
$= 30 - 5 = 25$ ученика решило $40 - 15 = 25$ или мање задатака. Како је сваки ученик решио бар један задатак, то је сваки од преосталих 25 ученика решио тачно по 1 задатак. Према томе, 1 ученик је решио 5, 1 ученик је решио 4, 1 ученик је решио 3, 1 ученик је решио 2 и 26 ученика је решило по 1 задатак.

27. Како Влада има 50 бомбона, то значи да је он на аутомату направио тачно 50 „трансакција”. Нека је број трансакција у којима је мењао доларе x, а број трансакција у којима је мењао евре y. Тада је $x + y = 50$. Свака промена долара повећава број евра за 3 и смањује број долара за 5, а свака промена евра повећава број долара за 3, а смањује број евра за 2. Ако Влада сада има 0 евра, то је $3x - 2y = 0$. Како $y = 50 - x$, то је $3x - 2(50 - x) = 0$, па је $5x = 100$ и $x = 20$. Дакле, Влада је 20 пута мењао доларе и 30 пута мењао евре. Притом је 20 пута мењао по 5 долара, дакле смањио број долара за 100, а за 30 промена евра повећао број долара за $30 \cdot 3 = 90$. Према томе, у изведеним трансакцијама Влада је потрошио $100 - 90 = 10$ долара, што значи да га свака бомбона „кошта” 20 доларских центи.

28. Ако су непозната хипотенуза и катета c и b, онда је $c^2 - b^2 = 8^2 = 64$, односно $(c-b)(c+b) = 64$.
Како су збир и разлика два природна броја увек исте парности у обзир долазе комбинације:
$c-b=2, c+b=32$ и $c-b=4, c+b=16$.
Решавањем система једначина добијају се Питагорине тројке: (8, 15, 17) и (8, 6, 10).

29. Ако је $a+b+c+d = 20$, онда је
$(a+b+c+d)^2 = 400$.
Квадрирањем једнакости добија се
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc +$
$+ 2bd + 2cd = 400$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 300 = 400$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$
$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (2ab + 2ac + 2ad + 2bc +$
$+ 2bd + 2cd) = 300 - 300 = 0$
$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (2ab + 2ac + 2ad + 2bc +$
$+ 2bd + 2cd) = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 +$
$+ (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$
Збир добијених шест квадрата једнак је 0 ако је сваки од њих једнак 0, па је $a = b = c = d = 5$.

РЕШЕЊЕ 2:
Из $a+b+c+d = 20$ следи $(a+b+c+d)^2 = 400$.
Из другог услова $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150$,
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$.
На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине добија се:
$a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$, $a^2 + d^2 \geq 2ac$,
$b^2 + c^2 \geq 2bc$, $b^2 + d^2 \geq 2bd$, $c^2 + d^2 \geq 2cd$.

Сабирањем шест претходних неједнакости добија се $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$.
$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 300 = 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, па важи једнакост.
Како у свих шест уочених неједнакости, једнакост важи само ако су оба елемента једнака, то је $a = b$ и $a = c$ и $a = d$ и $b = c$ и $b = d$ и $c = d$, што значи да је $a = b = c = d = 5$.

Питалице – решења:

1. да. **2.** не. **3.** да. **4.** да. **5.** не. **6.** да.
7. да. **8.** не. **9.** не. **10.** да.

Предлог теста знања – решења:

1. В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** А. **5.** Б. **6.** В. **7.** Б. **8.** А.

Предлог контролне вежбе – решења:

1. $x = 4, y = 7$. **2.** Системи су еквивалентни ($x = 4, y = 1$). **3.** $x = 7, y = 2$. **4.** $x = 5, y = 1$.
5. $x = 2, y = -1$. **6.** $x = 8, y = 9$. **7.** $x = 1, y = 2$.
8. $x = 2, y = -1$. **9.** $x = 3, y = 7$. **10.** $x = 1, y = 2$.
11. $P = 50$. **12.** $P = 100$. **13.** Дара има 550 динара, а Мара 450 динара.
14. $g = 65, j = 35$. **15.** $n = 75$.

ВАЉАК, КУПА, ЛОПТА 8.

Ознаке које се појављују у решењима су:
r – полупречник основе (круга, лопте)
H – висина тела
s – изводница
d – дијагонала осног пресека тела
P – површина тела
B – површина основе
M – површина омотача
P_{op} – површина осног пресека
P_{pp} – површина попречног (паралелног) пресека
V – запремина тела

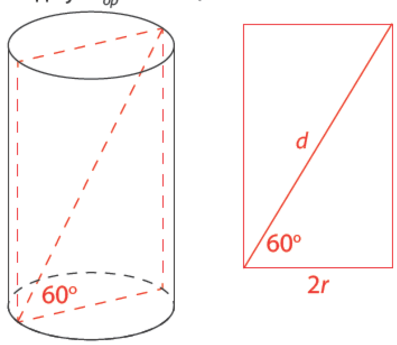
1. $r = 25$ cm, $H = 25$ cm, $s = 25$ cm.
2. $r = 3$ cm, $H = 6$ cm, $s = 6$ cm.
3. **а)** $r = 12$ cm, $H = 8$ cm, $s = 8$ cm;
б) $r = 8$ cm, $H = 12$ cm, $s = 12$ cm;
в) $r = 4$ cm, $H = 12$ cm, $s = 12$ cm;
г) $r = 6$ cm, $H = 8$ cm, $s = 8$ cm.
4. **а)** $r = 16$ cm, $H = 9$ cm, $s = 9$ cm; **б)** $r = 9$ cm, $H = 16$ cm, $s = 16$ cm; **в)** $r = 4{,}5$ cm, $H = 16$ cm, $s = 16$ cm; **г)** $r = 8$ cm, $H = 9$ cm, $s = 9$ cm.
5. **а)** $r = 16$ cm, $H = 24$ cm, $s = 24$ cm;
б) $r = 16$ cm, $H = 24$ cm, $s = 24$ cm;
в) $r = 8$ cm, $H = 24$ cm, $s = 24$ cm;
г) $r = 12$ cm, $H = 16$ cm, $s = 16$ cm.
6. Такав ваљак може настати обртањем квадрата странице 12 cm око осе симетрије која не садржи теме квадрата, или обртањем правоугаоника страница 6 cm и 12 cm око своје дуже странице.
7. Настаје шупља цев дужине 4 cm, дебљине зида 4 cm, унутрашњег полупречника 9 cm и спољашњег полупречника 13 cm (види слику из примера 5).
8. Настаје шупља цев дужине 7 cm, дебљине зида 12 cm, унутрашњег полупречника 1 cm и спољашњег полупречника 13 cm (види слику из примера 5).
9. **а)** $P_{op} = 30$ cm^2;
б) $H = 6$ cm, $P_{op} = 48$ cm^2;
в) $r = 18$ cm, $P_{op} = 1\,728$ cm^2.
10. $d = 26$ cm, $P_{op} = 240$ cm^2.
11. $r = 6$ cm, $P_{pp} = 36\pi$ cm^2. **12.** $H = 4{,}5$ cm. **13.** $r = 6$ cm.
14. Како је $r : H = 2 : 5$, закључујемо да је $r = 2x$ и $H = 5x$. Обим осног пресека ваљка је $4r + 2H = 18x$, одакле следи да је $x = 14$ cm, односно $r = 28$ cm, $H = 70$ cm и $P_{op} = 3920$ cm^2.
15. Слично као у претходном задатку је $r = 3x$ и $H = 8x$. Применом Питагорине теореме добијамо да је $d = 10x$, односно $x = 5$ cm. Тада је $r = 15$ cm, $H = 40$ cm и $P_{op} = 1\,200$ cm^2.
16. Као и у претходна два задатка можемо записати $r = 3x$ и $d = 10x$. Применом Питагорине теореме добијамо да је $H = 8x$, односно $x = 3$ cm. Сада је $r = 9$ cm, $H = 24$ cm и $P_{op} = 432$ cm^2.

17. Из услова задатка можемо поставити систем једначина $4r + 2H = 36$ и $H = r + 6$. Решавањем овог система добијамо $r = 4$ cm, $H = 10$ cm, $P_{op} = 80$ cm² и $P_{pp} = 16\pi$ cm².

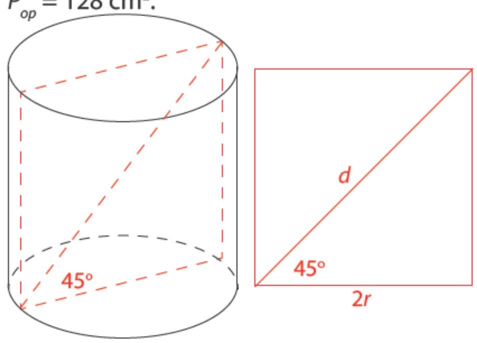
18. Слично као и у претходном задатку је $4r + 2H = 44$ и $H = r - 8$, одакле је $r = 10$ cm, $H = 2$ cm, $P_{op} = 40$ cm² и $P_{pp} = 100\pi$ cm².

19. $r = 13$ cm, $H = 26$ cm, $P_{op} = 676$ cm².

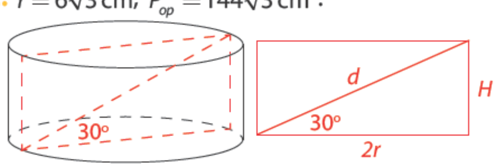
20. Из карактеристичног правоуглог троугла добијамо $d = 2 \cdot (2r)$, па је $r = 5$ cm, односно $H = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, одакле следи да је $H = 10\sqrt{3}$ cm.
Сада је $P_{op} = 100\sqrt{3}$ cm².



21. Из карактеристичног правоуглог троугла добијамо $d = 2r\cdot\sqrt{2}$, па је $r = 4\sqrt{2}$ cm, односно $d = H\sqrt{2}$, одакле је $H = 8\sqrt{2}$ cm.
Сада је $P_{op} = 128$ cm².
Задатак се може решити и тако што приметимо да је осни пресек ваљка квадрат са познатом дијагоналом, па је $H^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{16^2}{2}$, $P_{op} = 128$ cm².



22. $r = 6\sqrt{3}$ cm, $P_{op} = 144\sqrt{3}$ cm².



23. $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm, $P_{op} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$ cm².

24. Растојање равни од осе ваљка је 8 cm (види слику из примера 5).

25. Растојање равни од осе ваљка је $3\sqrt{3}$ cm (види слику из примера 5).

26. $P = 28\pi$ cm².

27. **а)** $P = 24\pi$ cm²; **б)** $P = 70\pi$ cm²; **в)** $P = 56\pi$ cm².

28. $P = 576\pi$ cm².

29. **а)** $P = 640\pi$ cm²; **б)** $P = 160\pi$ cm²; **в)** $P = 72\pi$ cm²; **г)** $P = 192\pi$ cm².

30. Како је $r : H = 2 : 3$, закључујемо да је $r = 2x$ и $H = 3x$. Пречник је $2r = 8$ cm, одакле је $r = 4$ cm и $x = 2$ cm, односно $H = 6$ cm. Површина ваљка је $P = 80\pi$ cm².

31. Из услова задатка је $d = 13x$, $H = 5x$. Из Питагорине теореме се добија да је $r = 6x$, а из површине осног пресека $x = 0{,}5$ cm, па је $P = 33\pi$ cm². **32.** $P = 37{,}5\pi$ cm².

33. $P = 18\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\pi$ cm².
π

34. $H = 3$ cm, $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm, $P = 9\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$ cm².

35. $P = 50\left(2 + \frac{1}{\pi}\right)$ cm².

36. Из $r^2\pi : 2r\pi H = 1 : 4$, добијамо да је $H = 2r$. Како је $r = 2$ cm, то је $H = 4$ cm и $P = 24\pi$ cm².

37. Из услова задатка је $r = 2x$, $H = 3x$. Из површине ваљка следи да је $20\pi x^2 = 20\pi$ cm², па је $x = 1$ cm, односно $P_{op} = 12$ cm².

38. $P = 140\pi$ cm².

39. $P = 294\pi$ cm². **40.** $P = 2\,560\pi$ cm².

41. Површина тела састоји се од два кружна прстена (види задатак 7) и од омотача унутрашњег и спољашњег ваљка, дакле $P = 480\pi$ cm².

42. Види претходни задатак, $P = 532\pi$ cm².

43. Површина коју треба офарбати је $P = 7{,}14\pi$ m² $\approx 22{,}4196$ m², па је потребно приближно 29,9 kg фарбе.

44. Нека је $P_0 = 2r^2\pi + 2r\pi H$ површина почетног ваљка, P_1 површина после повећања висине, а P_2 површина после смањивања полупречника основе ваљка. После повећавања висине можемо записати да је $2r^2\pi + 2r\pi H + 16\pi = 2r^2\pi + 2r\pi(H + 2)$, одакле се лако израчунава да је $r = 4$ cm. Користећи овај резултат у делу задатка када се смањује полупречник добијамо $2r^2\pi + 2r\pi H - 24\pi = 2(r-1)^2\pi + 2(r-1)\pi H$, одакле се добија да је $H = 5$ cm. Површина ваљка је $P = 72\pi$ cm².

45. **а)** $V = 54\pi$ cm³; **б)** $V = 75\pi$ cm³; **в)** $V = 180\pi$ cm³.

46. $V = 1\,728\pi$ cm³.

47. **а)** $V = 600\pi$ cm³; **б)** $V = 360\pi$ cm³;

в) $V = 90\pi$ cm³; **г)** $V = 150\pi$ cm³.

48. $V = 17\,640\pi$ cm³. **49.** $V = 6\,750\pi$ cm³.

50. Из услова задатка је $r = x$, $H = 3x$.
Како је $2r = 6$ cm, добијамо $H = 9$ cm, односно $V = 81\pi$ cm³.

51. Из услова задатка је $d = 17x$, $H = 15x$.
Применом Питагорине теореме добијамо $r = 4x$, а из површине дијагоналног пресека следи да је $x = 0{,}5$. Запремина ваљка је $V = 30\pi$ cm³.

52. $V = 2\pi$ cm³. **53.** $V = 128\pi\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

54. $V = 162\pi$ cm³. **55.** $V = 96\pi$ cm³. **56.** $V = 12\pi$ cm³.

57. $V = 384\pi$ cm³. **58.** $V = 512\pi$ cm³.

59. $V = \dfrac{128}{\pi}\,\text{cm}^3$. **60.** 17 584 динара.

61. Пречник лонца је приближно 19,6 cm.

62. $H \approx 9{,}96$ cm.

63. Маса шипке је приближно 66,8 kg.

64. Маса цеви је приближно 4,35 kg.

65. Запремина једне медаље је 22,608 cm³, од чега је 88% бакра и 12% калаја. Маса једне медаље једнака је
$22{,}608 \cdot 0{,}88 \cdot 8{,}96 + 22{,}608 \cdot 0{,}12 \cdot 7{,}31$, што је приближно 198 g. Маса 150 медаља је приближно 29,7 kg.

66. **а)** $r = 24$ cm, $H = 10$ cm, $s = 26$ cm;
б) $r = 10$ cm, $H = 24$ cm, $s = 26$ cm.

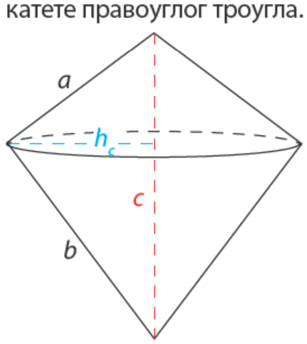
67. **а)** $r = 6$ cm, $H = 6$ cm, $s = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$;
б) $r = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$, $H = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$, $s = 6$ cm.

68. **а)** $H = 12$ cm; **б)** $r = 12$ cm; **в)** $s = 29$ cm.

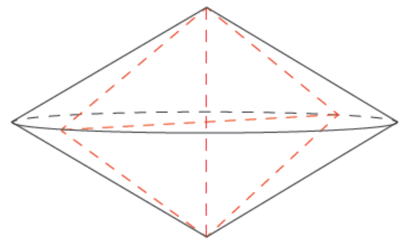
69. $r = 18$ cm, $H = 18\sqrt{3}\,\text{cm}$, $s = 36$ cm.

70. $r = 6$ cm, $H = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $s = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

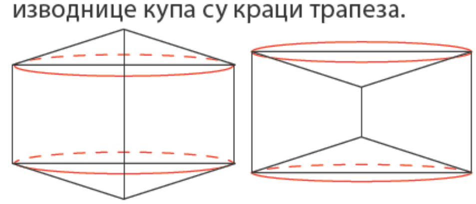
71. Обртањем правоуглог троугла око хипотенузе настаје тело које се састоји од две купе заједничких основа. Полупречник основе ових купа је висина троугла која одговара хипотенузи, висине купа су одговарајући одсечци на хипотенузи, а изводнице купа су катете правоуглог троугла.



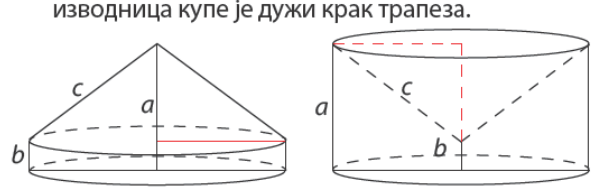
72. Обртањем ромба око своје дијагонале настаје тело које се састоји од две подударне купе заједничких основа. Полупречник основе ових купа је половина једне дијагонале, а висине купа једнаке су половини друге дијагонале. Изводнице купа су странице ромба.



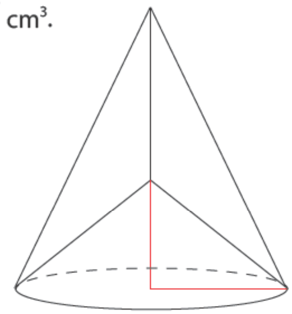
73. Обртањем једнакокраког трапеза око дуже основице настаје тело које се састоји од ваљка и две купе, тако да свака од купа има заједничку основу са ваљком.
Полупречници основа ваљка и купа једнаки су висини трапеза, висина ваљка је краћа основица трапеза, висине купа једнаке су половини разлике основица трапеза, а изводнице купа су краци трапеза. Уколико се трапез обрће око краће основице, настаје ваљак из кога су „извађене“ две купе. Полупречници основа ваљка и купа једнаки су висини трапеза, висина ваљка је дужа основица трапеза, висине купа једнаке су половини разлике основица трапеза, а изводнице купа су краци трапеза.



74. Обртањем правоуглог трапеза око дуже основице настаје тело које се састоји од ваљка и купе заједничих основа.
Полупречници основа ваљка и купа једнаки су висини трапеза, висина ваљка је краћа основица трапеза, висина купе једнака је разлици основица трапеза, а изводница купе је дужи крак трапеза. Уколико се трапез обрће око краће основице, настаје ваљак из кога је „извађена“ купа. Полупречници основа ваљка и купе једнаки су висини трапеза, висина ваљка је дужа основица трапеза, висина купе једнака је разлици основица трапеза, а изводница купе је дужи крак трапеза.



75. **а)** $P_{op} = 120$ cm²; **б)** $P_{op} = 108$ cm²; **в)** $P_{op} = 48$ cm².
76. **а)** $H = 5$ cm; **б)** $r = 8$ cm.
77. **а)** $P_{pp} = 4\pi$ cm²; **б)** $P_{pp} = 9\pi$ cm²; **в)** $P_{pp} = 9\pi$ cm².
78. $r = 6$ cm, $s = 10$ cm. **79.** $H = 24$ cm, $s = 26$ cm.
80. $s = 12\sqrt{2}$ cm, $P_{op} = 144$ cm².
81. $P_{op} = 12\sqrt{3}$ cm². **82.** $P_{op} = 168$ cm².
83. $P_{op} = 144\sqrt{3}$ cm². **84.** $P_{op} = 50$ cm².
85. $H = 9$ cm, $s = 15$ cm. **86.** $P_{op} = 48$ cm².
87. $P_{pp} = 6{,}25\pi$ cm².
88. $P_{pp(\text{већи})} = 16\pi$ cm², $P_{pp(\text{мањи})} = 4\pi$ cm².
89. $P_{pp} = 36\pi$ cm². **90.** $H = 9$ cm, $s = 3\sqrt{13}$ cm.
91. $P = 64\pi$ cm².
92. **а)** $r = 2$ cm, $P = 16\pi$ cm²; **б)** $r = 3$ cm, $P = 21\pi$ cm²;
в) $r = 2{,}5$ cm, $P = 21{,}25\pi$ cm².
93. **а)** $P = 65\pi$ cm²; **б)** $P = 96\pi$ cm²; **в)** $P = 90\pi$ cm².
94. $P = 90\pi$ cm². **95.** $P = 40\pi$ cm². **96.** $P = 384\pi$ cm².
97. $P = 800\pi$ cm². **98.** $P = 192\pi$ cm².
99. $P = 9\pi\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$cm².
100. $P = 100\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$cm². **101.** $P = 75\pi$ cm².
102. 240°. **103.** $P = 27\pi$ cm². **104.** $P = 384\pi$ cm².
105. $P = 216\pi$ cm². **106.** $P = 144\pi$ cm².
107. $P_1 - P_2 = 144\pi$ cm² $- 96\pi$ cm² $= 48\pi$ cm².
108. $P = 75\pi$ cm². **109.** $P = 144\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$cm².
110. 588π cm². **111.** 630π cm². **112.** 816π cm².
113. **а)** $V = 64\pi$ cm³; **б)** $V = 128\pi$ cm³;
в) $V = 800\ \pi$ cm³.
114. $V = 192\pi$ cm³. **115.** $V = 600\pi$ cm³.
116. $V = 392\pi$ cm³. **117.** $V = 72\pi\sqrt{3}$ cm³.
118. $V = 96\pi$ cm³. **119.** $V = 1\,024\pi$ cm³.
120. $V = 69\,120\pi$ cm³. **121.** $V = 9\,000\pi\sqrt{3}$ cm³.
122. $V = 512\pi$ cm³. **123.** $V = \dfrac{2\,000\pi\sqrt{2}}{3}$cm³.
124. $V = \dfrac{1000\pi}{3}$ cm³. **125.** $V = \dfrac{250\pi\sqrt{2}}{3}$ cm³.
126. **а)** $V = 150\pi$ cm³; **б)** $V = 448\pi$ cm³;
в) $V = 3\,168\pi$ cm³. **127.** 9 489,3 kg.
128. $H_K = 0{,}9$ dm, $m_K \approx 684{,}27$ kg.
129. Тело које се добија обртањем правоуглог троугла око хипотенузе састоји се од две купе заједничких основа (погледај пример 5 у претходној лекцији). Запремина тела једнака је збиру запремина те две купе, односно $V = 9\,600\pi$ cm³.
130. Тело које се добија обртањем једнакостраничног троугла око своје странице састоји се од две подударне купе заједничких основа. Запремина тела једнака је збиру запремина те две купе, односно $V = 54\pi$ cm³.
131. $V = 1\,024\pi$ cm³ (види слику уз решење задатка 73).
132. Тело које се добија обртањем једнакокраког троугла око свог крака је купа из које је „извађена“ купа заједничке основе. Запремина тела једнака је разлици запремина те две купе, односно $V = 6\pi\sqrt{3}$ cm³.



133. Центар лопте је пресек дијагонала правоугаоника, $r = 6{,}5$ cm.
134. Центар лопте је центар описаног круга око једнакостраничног троугла, $r = 12\sqrt{3}$ cm.
135. Центар лопте је центар уписаног круга у правилни шестоугао, $r = 2\sqrt{3}$ cm.
136. $P_{vk} = 144\pi$ cm². **137.** $r \approx 6\,369{,}4$ km. **138.** $r = 4$ cm.
139. Највећи пресек је велики круг и његова површина је 36π cm², површина средњег пресека је 32π cm² и површина најмањег 20π cm². Збир површина свих пресека је дакле 140π cm².
140. Растојање сваке равни од центра лопте је 8 cm, па је растојање између две равни 16 cm.
141. $4\sqrt{6}$ cm. **142.** $P = 576\ \pi$ cm². **143.** $r = 18$ cm.
144. $V = 4\,500\pi$ cm³. **145.** $r = 3$ cm.
146. $P = 324\pi$ cm², $V = 972\pi$ cm³.
147. $r_u = 9$ cm, $r_o = 9\sqrt{2}$ cm, $Pu = 324\ \pi$ cm²,
$Po = 648\pi$ cm², $V_u = 972\pi$ cm³,
$V_o = 1\,944\pi\sqrt{2}$ cm³.
148. $V_L = V_K = 288\pi$ cm³, $r_L = 6$ cm, $P_L = 144\pi$ cm².
149. $r_V = 12$ cm, $P_V : P_L = 7 : 6$.

Решења задатака за додатни рад

1. Посматрајмо купу која је окренута врхом на горе. Запремина целе купе је $V_K = 144\pi$ cm³, а запремина ваздуха (горњи део купе) је $V_V = 18\pi$ cm³. Одавде следи да је запремина воде $V(H_2O) = 126\pi$ cm³. Окренимо сада купу врхом на доле и обележимо са ρ полупречник, а са h висину „водене“ купе. Из сличности одговарајућих троуглова следи да је $\rho : h = 6 : 12$, па је $h = 2\rho$. Запремина воде је $V\left(H_2O\right) = \dfrac{1}{3}\rho^2\pi\, h = 126\pi$, па је $\rho^3 = 189$ cm³.

Висина воде једнака је броју који, када га степенујемо трећим степеном, даје 189. Пишемо га још и $\sqrt[3]{189}$ cm и читамо трећи корен из 189 cm.

2. Полупречник основе ваљка је полупречник круга описаног око једнакостраничног троугла, дакле $r_V = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, а висина ваљка једнака је висини призме. Запремина ваљка је $V = 135\pi$ cm³.
3. Шестострана призма има 18 ивица, па је свака од њих једнака 2 cm, дакле $H = 2$ cm. Полупречник основе ваљка једнак је полупречнику описаног круга око правилног шестоугла, па је $r = 2$ cm. Површина ваљка је $P = 16\pi$ cm².
4. Како су висине уписаног и описаног ваљка једнаке, њихове запремине односе се као и површине основа, дакле $V_U : V_O = 1 : 2$.
5. $V_U : V_O = 3 : 4$.
6. Странице мањег дијагоналног пресека су $a\sqrt{3}$ и H, одакле следи да је $a = 4$ cm и $H = 4\sqrt{3}$ cm. Полупречник описаног ваљка је $r_O = 4$ cm, а полупречник уписаног $r_U = 2\sqrt{3}$ cm, одакле следи да је површина описаног ваљка $P_O = 32\pi\left(1 + \sqrt{3}\right)$ cm² и запремина уписаног ваљка $V_U = 48\pi\sqrt{3}$ cm³.
7. Основа ваљка је круг уписан у једнакостранични троугао, одакле добијамо да је $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, односно $a = 6\sqrt{3}$ cm. Површина призме је $P_P = 108\sqrt{3}$ cm².
8. $P_K = 8\pi\left(2 + \sqrt{5}\right)$ cm², $V_K = \frac{32\pi}{3}$ cm³.
9. Пирамида: $P = 108$ cm², $V = 36\sqrt{3}$ cm³, купа: $P = 27\pi$ cm², $V = 9\pi\sqrt{3}$ cm³.
10. Купа: $r = 2\sqrt{3}$ cm, $P = 4\pi\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ cm², $V = 8\pi$ cm³, пирамида: $a = 4$ cm, $h = 4$ cm, $s = 2\sqrt{5}$ cm, $P = 24\left(2 + \sqrt{3}\right)$ cm², $V = 16\sqrt{3}$ cm³.
11. $P = 16\pi$ cm², $V = 8\pi$ cm³.
12. $P = 225\pi\left(1 + \sqrt{5}\right)$ cm², $V = 2\,250\pi$ cm³.

Питалице – решења:

1. да. 2. не. 3. не. 4. да. 5. да. 6. да. 7. не. 8. да. 9. да. 10. не.

Предлог теста знања – решења:

1. А. 2. Д. 3. Д. 4. В. 5. Б. 6. Г. 7. Б. 8. В.

Предлог контролне вежбе – решења:

1. $P = 156\,\pi$ cm². 2. $V = 48\pi$ cm³. 3. $V = 16\pi\sqrt{3}$ cm³.
4. $P = 300\pi$ cm². 5. $P = 96\pi$ cm².
6. $P = 36\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm².
7. $P = 144\pi$ cm², $V = 288\pi$ cm³. 8. $V = 288\pi$ cm³.
9. $V = 288\pi$ cm³. 10. $V = 1\,728\pi$ cm³.
11. $V = 72\pi\sqrt{3}$ cm³. 12. $V = 96\pi$ cm³.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

А

апотема 9

В

висина ваљка 116, 119, 120, 121...

висина пирамиде 9

велики круг 150, 151

врх купе 131, 134, 156

Г

график линеарне функције 46

графичко решавање система једначина 97

Д

дијагонала ваљка 119, 122, 128

дијагонални пресек пирамиде 11

Е

еквивалентне трансформације система једначина 86, 88

еквивалентност једначина 82

З

зависна променљива 41

запремина пирамиде 27

И

изводница ваљка 116, 119

изводница купе 131, 135, 137, 138, 141

Ј

једнакоивична пирамида 10

К

коефицијант 41

константна функција 53

круг 116, 119, 123, 127, 131, 134, 138, 142, 147–153, 155, 158

кружна линија 147, 150, 151, 153, 155

Л

линеарна једначина са две непознате 80

линеарни израз 40

линеарна функција 41

лопта 147, 148, 149

М

метод смене 89

метод супротних коефицијената 93

мрежа ваљка 123

мрежа купе 138

мрежа пирамиде 15

Н

немогућ систем једначина 102

неодређен систем једначина 103

независна променљива 41

нула линеарне функције 56

О

обртно тело 116, 131

омотач ваљка 116, 126, 130

оса ваљка 116

оса купе 131

основа купе 154, 155

осни пресек ваљка 119, 120,126, 157

осни пресек купе 134, 135, 137, 142, 144, 145,156, 158

основа ваљка 116, 154

основа пирамиде 9

омотач пирамиде 9

описан ваљак (купа) 154

П

паралелни графици линеарних функција 52

пирамида 8

површина пирамиде 18

попречни (паралелни) пресек ваљка 119

попречни пресек купе 134

правилна пирамида 10

правилни тетраедар 10

Р

растућа линеарна функција 59

решење система једначина 82

С

систем једначина 80

скуп решења система једначина 82

слободан члан 41

сфера 147, 148, 150, 152

Т

тетраедар 10

У

уписан ваљак (купа) 154

Ц

цилиндар 116

ЛИТЕРАТУРА

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. ***Математика за 8. разред основне школе***. Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. ***Збирка задатака из математике за 8. разред основне школе***. Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. ***Приручник за наставнике математике*** (***за 8. разред основне школе***). Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. ***Збирка задатака из математике за оне који могу и желе више за 8. разред основне школе***. Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Бранимир Дакић, Невен Елезовић. ***Математика за 1. разред гимназије, 1. и 2. део.*** ИП Елемент. Загреб. 2015.

Иван Ивић, Ана Пешикан, Слободанка Антић. ***Водич за добар уџбеник***. Образовни форум. Београд. 2009.