Александар Кавчић • Мирослав Антонић • Војислав Андрић

МАТЕМАТИКА 6

Уџбеник са збирком задатака за шести разред основне школе

АрхиКњига

МАТЕМАТИКА 6

Уџбеник са збирком задатака за шести разред основне школе

Редакција Фондације Алек Кавчић

Аутори	Проф. др Александар Кавчић, Мирослав Антонић и проф. др Војислав Андрић
Рецензенти	Др Срђан Огњановић, Математичка гимназија, Београд Бранка Зацеро, ОШ „Руђер Бошковић", Београд Душанка Ковачевић, ОШ „Милош Црњански", Београд
Главни уредник	Крста Поповски
Уредник	Крста Поповски
Илустрације	Горан Витановић
Лектура и коректура	Редакција АрхиКњиге
Ликовни уредник	Слађана Николић
Дизајн и прелом	Срђан Попов

Издавач	АрхиКњига д. о. о. Љубостињска 2, Београд
За издавача	Оливер Кавчић
Штампа	ALPHA PRINT д. о. о., Земун
Тираж	20.000
	Прво издање, 2024.
ISBN	978-86-6130-045-5

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)

КАВЧИЋ, Александар, 1968-
Математика 6 : уџбеник са збирком задатака за шести разред основне школе / Александар Кавчић, Мирослав Антонић, Војислав Андрић ; [илустрације Горан Витановић]. - 1. изд. - Београд : АрхиКњига, 2024 (Земун : Alpha print). - 287 стр. : илустр. ; 29 cm

Тираж 20.000. - Регистар.

ISBN 978-86-6130-045-5

1. Антонић, Мирослав, 1973- [аутор] 2. Андрић, Војислав, 1953- [аутор]

COBISS.SR-ID 137471753

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије одобрило је овај уџбеник за употребу у школама решењем број: 650-02-00249/2023-07 од 31. 1. 2024. године.

РЕЧ АУТОРА

Поштовани читаоци, ђаци шестог разреда,

Када завршите овај разред остаће вам само још две године до мале матуре. Можете сигурно очекивати да ће се градиво из шестог разреда појавити и на завршном испиту јер се до сада то редовно и дешавало. Као трајно знање, остаће вам појмови негативних бројева и математичких доказа (углавном подударности троуглова), који ће вас пратити кроз даље школовање. Овај уџбеник смо осмислили тако да вам помогне у савладавању градива за шести разред, али и да вам остане као трајна вредност која ће вам свакако помоћи да се спремате за малу матуру када за то дође време, или чак за такмичења из математике. Одабрали смо тим од три аутора са стручним знањима у настави, методици, науци, као и са великим домаћим и међународним искуством у представљању градива и састављању задатака за контролне вежбе, мале матуре и међународна такмичења. Збику задатака сачињава скуп од преко 1 000 задатака.

Срећно,

Аутори

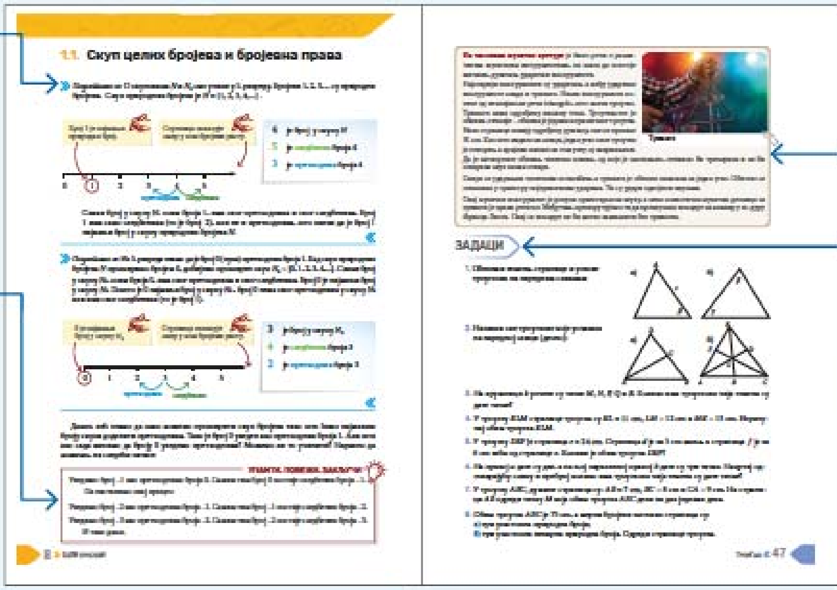
САДРЖАЈ

ВОДИЧ КРОЗ УЏБЕНИК

Сазнај више – Занимљивости о вези математике и других наука, или уметности, о славним математичарима, или, рецимо, о томе како је настала реч „алгоритам”

Подсетимо се – Да бисмо могли да савладамо нове лекције, неопходно је да се стално подсећамо онога што смо већ научили

Упамти, повежи, закључи – Наводи нас да сазнања и запажања повезујемо и извлачимо закључке


1.1. Скуп целих бројева и бројевна права

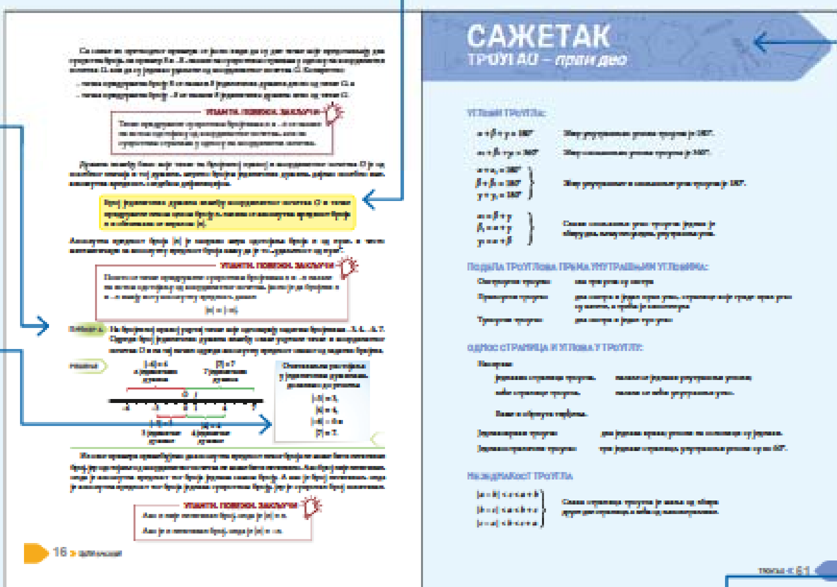
ЗАДАЦИ

Задаци на крају лекције – Различитог типа, а сви се односе само на претходну лекцију

Дефиниције (жута подлога) – Има података које морамо памтити

Пример – Начин на који се ради одређени тип задатка помаже нам да касније то лакше радимо сами

Цедуља – Уоквирени делови, налик на цедуље, обично садрже математичке формуле и правилности помоћу којих се долази до решења математичких проблема

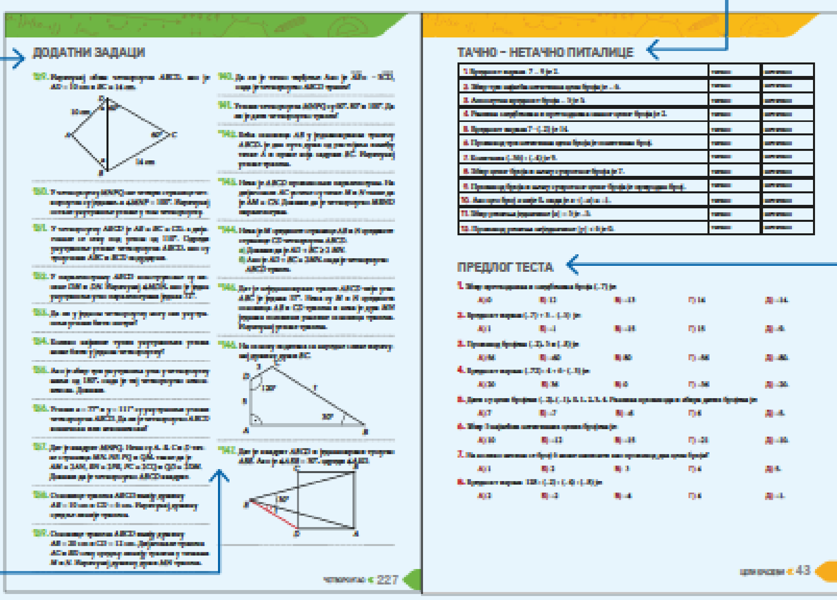

САЖЕТАК

Сажетак – То је најмање што мора да се разуме и запамти из одређене области математике

Тачно – нетачно питалице – Задаци који на један несвакидашњи начин подстичу да дођемо до тачних одговора

Задаци на крају области – Велики број задатака из целе области математике, с решењима на крају књиге

Задаци са звездицом – То су захтевнији задаци, они око којих се треба више потрудити


ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

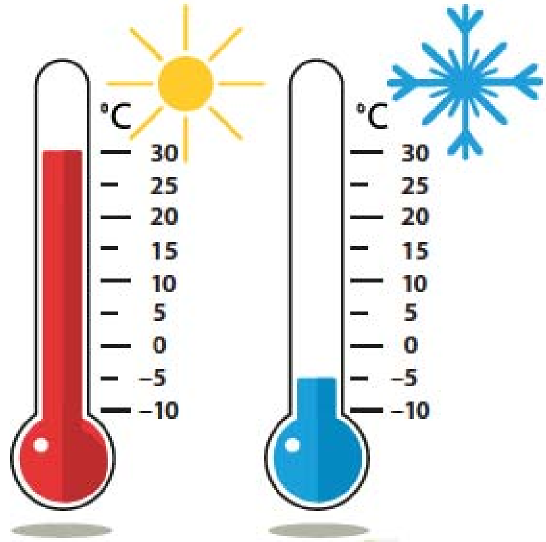
ПРЕДЛОГ ТЕСТА

Предлог теста – Тестови су посебна врста провере знања где међу понуђеним треба пронаћи тачан одговор

1 ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Да бисмо дошли до нових бројева, које ћемо називати „целим бројевима”, потребно је да се прво позабавимо **негативним бројевима**. Већина вас се већ сусрела са појмом негативног броја, мада тога можда нисте ни свесни, али из ових примера ће вам бити јасно да јесте.

ПРИМЕР 1. Знамо да се вода замрзава на температури од нула степени на Целзијусовој скали (означено 0 °C). Сви сте већ видели снег и лед, и знате да је температура леда и снега нижа од нуле, тј. **негативна**. Такође, небројено пута сте слушали временску прогнозу и навикли сте се да су најављиване температуре лети око тридесет степени (означено 30 °C), а зими око минус 5 степени. У овом случају реч **минус** означава **негативну** температуру. Можемо реч **минус** заменити и математичким знаком за минус „–” и симболички означити температуру од минус пет степени Целзијуса изразом –5 °C. На термометру се то врло лако очитава.

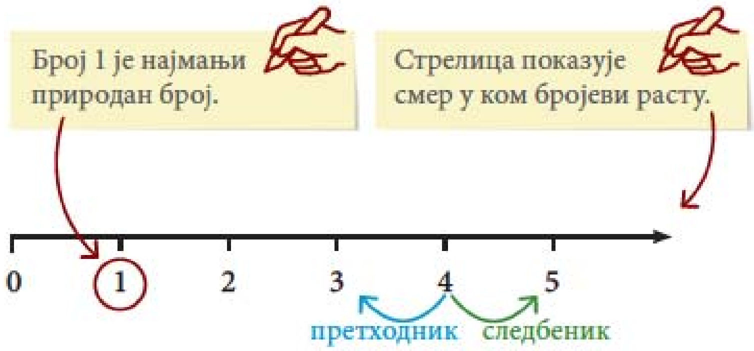


ПРИМЕР 2. Сигурно сте приметили да неки лифтови могу да се спусте у подрум зграде. Неке зграде имају и неколико нивоа испод нивоа земље, тј. испод нивоа приземља. То су обично нивои подрума или паркинга који се налазе испод приземља, а означавају се често латиничним словом „P”. Тако се први ниво испод приземља означава изразом P1, други ниво испод приземља изразом P2, и тако даље. Међутим у неким лифтовима, уместо словом „P”, нивои испод приземља се означавају предзнаком минус „–”, па сходно томе први ниво испод приземља означавамо изразом –1, други ниво испод приземља изразом –2 итд. Ако још и само приземље означимо бројем 0 (нула), добијемо две врсте командних табли по лифтовима, као на слици.

Из ових примера је јасно да негативни бројеви почињу предзнаком минус који означава вредност „**испод** нуле” (на пример, температура **испод** тачке замрзавања воде, или ниво **испод** приземља). Све што сада треба да урадимо јесте да ова запажања о негативним бројевима претворимо у језик математике и да научимо да баратамо негативним бројевима.

1.1. Скуп целих бројева и бројевна права

Подсетимо се: О скуповима N и N_0 смо учили у 5. разреду. Бројеви 1, 2, 3, ... су природни бројеви. Скуп природних бројева је $N = \{1, 2, 3, 4,...\}$.



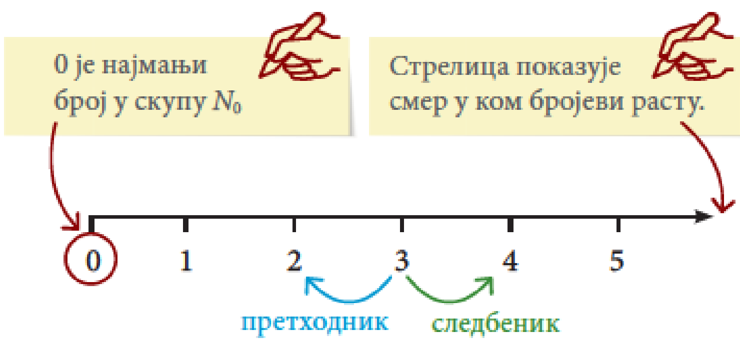
4 је број у скупу N

5 је следбеник броја 4

3 је претходник броја 4

Сваки број у скупу N, осим броја 1, има свог претходника и свог следбеника. Број 1 има само следбеника (то је број 2), али не и претходника, што значи да је број 1 најмањи број у скупу природних бројева N.

Подсетимо се: Из 5. разреда знамо да је број 0 (нула) претходник броја 1. Кад скуп природних бројева N проширимо бројем 0, добијемо проширен скуп $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4,...\}$. Сваки број у скупу N_0, осим броја 0, има свог претходника и свог следбеника. Број 0 је најмањи број у скупу N_0. Пошто је 0 најмањи број у скупу N_0, број 0 нема свог претходника у скупу N_0 али има свог следбеника (то је број 1).



3 је број у скупу N_0

4 је следбеник броја 3

2 је претходник броја 3

Дакле, већ знамо да лако можемо проширити скуп бројева тако што ћемо најмањем броју скупа доделити претходника. Тако је број 0 уведен као претходник броја 1. Али шта ако сада желимо да броју 0 уведемо претходника? Можемо ли то учинити? Наравно да можемо, на следећи начин:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Уведимо број –1 као претходника броја 0. Самим тим број 0 постаје следбеник броја –1.

Па наставимо овај процес:

Уведимо број –2 као претходника броја –1. Самим тим број –1 постаје следбеник броја –2.

Уведимо број –3 као претходника броја –2. Самим тим број –2 постаје следбеник броја –3.

И тако даље.

Нове бројеве –1, –2, –3, ... изговарамо „минус један", „минус два", „минус три" итд. Пошто из 5. разреда већ знамо како графички да прикажемо претходнике и следбенике, можемо то одмах учинити и са новим бројевима –1, –2, –3, –4, као на следећој слици.

0 је претходник броја 1	1 је следбеник броја 0
–1 је претходник броја 0	0 је следбеник броја –1
–2 је претходник броја –1	–1 је следбеник броја –2
–3 је претходник броја –2	–2 је следбеник броја –3
–4 је претходник броја –3	–3 је следбеник броја –4

Овим поступком смо увели све **негативне бројеве,** дакле оне бројеве који почињу знаком минус „–". То је претходник броја 0, па затим претходник претходника броја 0, и тако даље. Како из градива за 5. разред већ знамо да је сваки претходник мањи од свог следбеника, јасно је да су сви негативни бројеви мањи од нуле. Дакле, можемо слободно рећи да су **негативни бројеви сви бројеви мањи од нуле.**

ПРИМЕР 1. Наведи претходнике и следбенике следећих бројева: –3, 0 и 7.

РЕШЕЊЕ а) Претходник броја –3 је број –4, а следбеник броја –3 је број –2.

б) Претходник броја 0 је број –1, а следбеник броја 0 је број 1.

в) Претходник броја 7 је број 6, а следбеник броја 7 је број 8.

Направимо сада један нови скуп бројева тако што ћемо проширити скуп N_0 свим новоуведеним негативним бројевима. Тај нови скуп се зове **скуп целих бројева**, означава се словом Z, и садржи у себи све природне бројеве, нулу и све новоуведене негативне бројеве. Скуп целих бројева можемо дефинисати на следећи начин.

Скуп целих бројева

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

ПРИМЕР 2. Којем од скупова N, N_0 и Z припадају следећи бројеви: 8, –3, 11, –6, 0 и 7.

РЕШЕЊЕ а) Скупу N припадају бројеви: 8, 11 и 7.

б) Скупу N_0 припадају бројеви: 8, 11, 0 и 7.

в) Скупу Z припадају сви бројеви: 8, –3, 11, –6, 0 и 7.

Бројеви 1, 2, 3 ... су природни бројеви, али су такође и цели бројеви. Природне бројеве можемо и другачије назвати. То су **позитивни цели бројеви.** Ознака за **скуп позитивних целих бројева** је Z^+, те можемо написати:

$$Z^+ = N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Сличним симболом, али са минусом, означавамо скуп негативних целих бројева:

$$Z^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}$$

Све позитивне целе бројеве можемо писати и са предзнаком плус „+" испред броја, али се обично тај предзнак плус изоставља код позитивних бројева, тако да имамо:

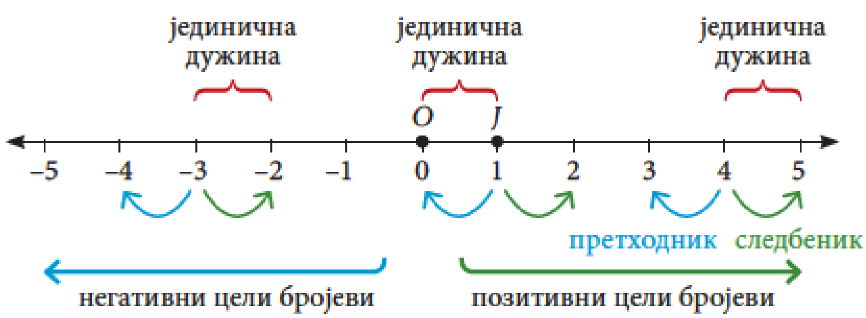
$$+1 = 1$$
$$+2 = 2$$
$$+3 = 3 \text{ и тако даље.}$$

Подсетимо се: **Бројевна полуправа** је полуправа на којој представљамо бројеве скупа N_0. Почетну тачку O називамо **координатни почетак**, и тачки O придружујемо број 0. На слици је број 1 придружен тачки J коју називамо **јединична тачка**. Дуж OJ називамо **јединична дуж**, а дужину те дужи обележавамо изразом $|OJ|$ коју називамо **јединична дужина**. Свака тачка бројевне полуправе придружена било ком броју из скупа N_0 је за јединичну дужину удаљена од тачке придружене следбенику тог броја. Тако је, на пример, тачка придружена броју 4 за јединичну дужину удаљена од тачке придружене броју 5 који је следбеник броја 4.

По узору на бројевну полуправу, уведимо бројевну праву да бисмо представили целе бројеве скупа Z. Бројевну праву добијамо тако што:

1) продужимо бројевну полуправу од координатног почетка O у супротном смеру, и

2) тачке бројевне праве придружујемо целим бројевима тако што се држимо правила да сваки следбеник или претходник било ког броја мора бити удаљен за јединичну дужину од тог броја.



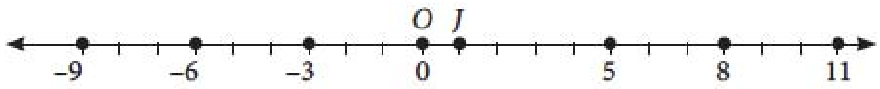
Јасно је да овако конструисана бројевна права има следеће особине:

а) Позитивни цели бројеви Z^+ се налазе десно од координатног почетка O.

б) Негативни цели бројеви Z^- се налазе лево од координатног почетка O.

ПРИМЕР 3. На бројевној правој обележи тачке и придружи им бројеве: $-9, 8, -3, 11, -6, 0$ и 5.

РЕШЕЊЕ



ЗАДАЦИ

1. Одреди скупове: а) $N \cup N_0$; б) $N \cap N_0$; в) $N \setminus N_0$; г) $N_0 \setminus N$.

2. Дат је скуп $A = \{3, 8, 15, 0, 27\}$. Одреди скуп S кога чине следбеници бројева из скупа A.

3. Дат је скуп $B = \{4, 5, 18, 1, 24\}$. Одреди скуп P кога чине претходници бројева из скупа B.

4. Одреди збир претходника и следбеника броја: а) 6; б) 2; в) 11; г) 26.

5. Одреди природан број n, ако је збир његовог претходника и следбеника једнак: а) 14; б) 100; в) 36; г) 2024.

6. Користећи целе бројеве запиши: а) температуру од 12 степени испод нуле; б) надморску висину од 1347 m; в) дубину од 7 m испод површине мора; г) телесну температуру од 36,5 степени.

7. Рукометни тим A је постигао 17 голова више него што је примио, а рукометни тим B је постигао 6 голова мање него што је примио. Користећи целе бројеве, запиши гол разлику екипе A и екипе B. (Прескочи овај задатак ако не знаш правила рукомета.)

8. Дат је скуп $A = \{-14, 5, -26, 0, 91\}$. Одреди који елементи скупа A припадају скупу Z^+, а који скупу Z^-.

9. Напиши 11 узастопних целих бројева тако да међу њима буде једнак број позитивних и негативних бројева.

10. Напиши 6 узастопних целих бројева од којих су тачно 3 негативна броја.

11. Израчунај следбеника: а) најмањег целог броја скупа Z^+; б) највећег целог броја који није природан.

12. Дат је скуп $B = \{-3, -25, -38, -1, -44\}$. Одреди скуп P кога чине претходници бројева из скупа B.

13. Одреди претходнике: а) најмањег целог броја скупа N_0; б) највећег целог броја скупа Z^-.

14. Нацртај бројевну праву и на њој означи тачке A, B, C и D које редом одговарају целим бројевима $-4, 3, 0, -1$.

15. Целим бројевима -3 и 2 на бројевној правој одговарају тачке C и D. Дуж CD има дужину 10 cm. а) Одреди дужину јединичне дужи. б) На бројевној правој, одреди тачке M и N којима одговарају цели бројеви -4 и 5.

16. Одреди скупове: а) $Z \cup N_0$; б) $Z \cap N_0$; в) $Z \setminus N_0$; г) $N_0 \setminus Z$.

17. Одреди скупове: а) $Z \cup N$; б) $Z \cap N$; в) $Z \setminus N$: г) $N \setminus Z$.

18. Одреди скупове: а) $Z^+ \cup Z^-$; б) $Z^+ \cap Z^-$; в) $Z^+ \setminus Z^-$; г) $Z^- \setminus Z^+$.

ИСТОРИЈА БРОЈА 0

У 5. разреду смо из историје сазнали како се рачуна (броји) време. Научили смо да се године пре Христовог рођења броје као „1. година пре н. е.", „2. година пре н. е." итд., а да се године након Христовог рођења броје као „1. година н. е.", „2. година н. е." итд. Ако годинама пре н. е. додамо предзнак минус „–" а године н. е. означимо без предзнака, јасно је да можемо обележити:

године пре н. е. негативним бројевима –1, –2, –3, –4, –5, –6..., а

године н. е. позитивним бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Подсетимо се ленте времена из Историје за 5. разред, али сада слику ленте времена допунимо бројевним полуправама и допишимо негативне и позитивне бројеве онако како смо их научили у претходној лекцији.

РАЧУНАЊЕ ВРЕМЕНА ПО ХРИШЋАНСКОЈ ЕРИ

Стари Римљани, а ни Европљани тог времена, нису знали за негативне бројеве. А зашто?

Одговор је врло једноставан... **Нису знали да број 0 постоји.**

Стари Римљани су, наравно, писали бројеве римским цифрама, на пример *I, IX, VII, DCI, MCX.*

У римском бројевном систему не постоји ознака за број 0. Чак ни стари Грци, који су одлично баратали геометријом и разломцима, нису знали за број 0. Иако су неки стари грчки астрономи користили нулу у својим прорачунима, број 0 ипак није био распрострањен у старој Грчкој. Суочени загонетком постојања „ничега", стари грчки филозофи су се мучили питањем: „Како обележити нешто што је ништа?" И нису налазили одговор на ово питање. По њиховом мишљењу, нула би представљала „ништа", а ништа се не би могло представити нечим, па ни бројем. Данас знамо да стари грчки филозофи нису били у праву, а број 0 је стигао до Европе са великим закашњењем, тек у 11. веку, а нашао ширу примену код европских математичара тек у 13. веку.

Број 0 је заправо један од највећих изума човечанства. Први извори кажу да су нешто слично цифри 0 користили Месопотамци још 4000 година пре н. е., Вавилонци око 300. године пре н. е., као и древне Маје (култура на данашњој територији Мексика, на потпуно другом крају света) већ око 400. године н. е. Али цифра 0 није исто што и број 0. Познавањем цифре 0, Вавилонци и Маје су могли да напишу бројеве од више цифара и да рачунају потписивањем цифара, слично ономе што данас учимо из математике од 1. до 4. разреда. Али то још увек није значило да су Маје и Вавилонци разумели пун значај броја 0 као претходника броја 1 и следбеника броја –1. Генијални изум броја 0 човечанство дугује средњовековним индијским математичарима.

Цифра 0 се појављује у Индији и Кини већ око 1. века н. е. али се не зна да ли се цифра 0 ту појавила независно, или је доспела из Вавилона. Зна се да је већ у 4. и 5. веку пре н. е. декадни систем цифара 1, 2, 3..., 9 уз цифру 0, био у употреби у Индији и Кини, а око 500. године н. е. познати индијски математичар Арјабата показује како да се користи декадни систем цифара за рачунање вредности математичких израза. Историчари нису сагласни да ли је Арјабата изумитељ броја 0 јер није сасвим јасно да ли је Арјабата разумео све математичке особине броја 0, за разлику од цифре 0.

Ипак, коначно тек 628. године н. е. индијски математичар Брамагупта показује да 0 није само цифра, већ да је без икакве сумње број који је претходник броја 1 и уводи правила модерног рачунања уз помоћ броја 0.

Арапи су, тргујући између Индије и Европе, пренели у 11. веку нулу до Европе, а бројеви који се данас користе у математици пишу се арапским цифрама, или још тачније индо-арапским цифрама. Први европски математичар који је, по узору на индијске и арапске научнике, почео да користи број 0 у својим писаним радовима крајем 12. века био је чувени италијански математичар Фибоначи.

Вежите појасеве. Узбудљива вожња кроз историју математике тек почиње. Разумевањем броја 0, као броја који се налази између бројева –1 и 1, тек крећемо у узбудљиву вожњу кроз теорију бројева. Теорија бројева је и дан-данас једна од најзанимљивијих грана високе математике. На путу до тих висина, већ смо направили основне кораке усвајања негативних и позитивних бројева, као и броја 0 који није ни негативан а ни позитиван. Без нуле данас не би било модерне математике, али ни напретка модерних наука као што су физика, хемија, биологија, медицина, а посебно информатика и дигитална електроника у којима се све заснива на само две цифре: 0 и 1.

Арјабата, индијски математичар и астроном, рођен је око 476. године н. е. Аутор је дела *Арјабатија* и *Арја-сиданта*. Бавио се геометријским фигурама и њиховим својствима, једначинама и другим областима математике.

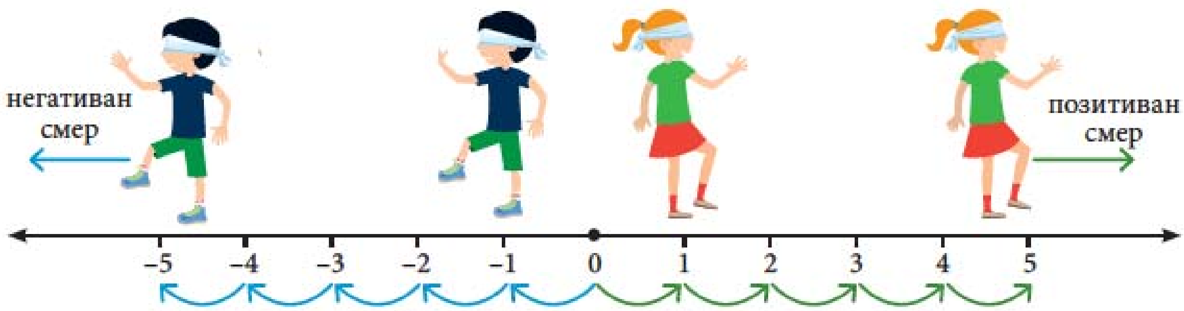
Његова дела су утицала на Брамагупту, другог индијског математичара, на Ал Хорезмија (којег ћемо поменути у теми Рационални бројеви) и на бројне математичаре.

Брамагупта, индијски математичар и астроном, рођен 598. године н. е. Брамагупта је био први математичар који је изнео правила рачунања с нулом. Његов научни наследник Баскара II описао га је као „драгуљ круга математичара". Његово дело *Брамагуптасиданта* је најстарији познати текст који нулу разматра као број по себи, а не само као цифру у представљању другог броја. Он чак наводи правила за аритметику са негативним бројевима и нулом.

Леонардо Фибоначи (1170–1250), италијански математичар, познат и као **Леонардо из Пизе**, био је познати западни математичар средњег века. У својим делима је величао индо-арапски систем бројева, бавио се теоријом бројева, а остао је запамћен тзв. Фибоначијев низ (низ бројева у коме збир претходна два броја у низу дају вредност наредног члана низа). Своја запажања о применама индо-арапских цифара у аритметици записао је у делу *Књига о абакусу* (или *Књига рачуна*).

1.2. Супротни бројеви и апсолутна вредност броја

Погледај слику. Да ли знаш за игру „Ћораве баке"? Једна верзија те игре почиње овако. Два играча су окренута један другом леђима. На знак почињу да одбројавају кораке и да се крећу истовремено, сваки по корак, истим правцем, али у супротним смеровима. За сваки корак који један играч крене у једном смеру, други крене у супротном смеру. Замислимо да се играчи крећу по бројевној правој. За сваки корак који један играч начини у позитивном смеру, други начини у негативном. То значи да за сваки одбројан број у позитивном смеру, постоји један број одбројан у супротном, негативном смеру.



Пошто је негативан смер **супротан** позитивном смеру, кажемо да у скупу целих бројева Z, сваки позитиван број n има **супротан број** који обележавамо изразом $-n$. Ово правило је врло лако применити, што ћемо илустровати следећим примером.

ПРИМЕР 1. Одреди супротне бројеве следећим позитивним бројевима:

а) 4; б) 19; в) 231.

РЕШЕЊЕ
а) Супротан број позитивном броју 4 је негативан број –4.
б) Супротан број позитивном броју 19 је негативан број –19.
в) Супротан број позитивном броју 231 је негативан број –231.

Дакле, лако је одредити број који је супротан позитивном броју. Добијамо га тако што напишемо предзнак минус „–" испред позитивног броја и „претворимо" га у негативан број.

Али како да одредимо бројеве супротне негативним бројевима? Ни то није тешко. Већ знамо да, ако је n позитиван број, онда је наравно негативан број $-n$ супротан број позитивном броју n. Али важи и обрнуто, позитиван број n је супротан број негативном броју $-n$.

ПРИМЕР 2. Одреди супротне бројеве следећим негативним бројевима:

а) –7; б) –21; в) –421.

РЕШЕЊЕ
а) Супротан број негативном броју –7 је позитиван број 7.
б) Супротан број негативном броју –21 је позитиван број 21.
в) Супротан број негативном броју –421 је позитиван број 421.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Сада већ можемо да напишемо правило:

супротан број позитивном броју n је негативан број $-n$, и

супротан број негативном броју $-n$ је позитиван број n.

Можемо рећи да су бројеви n и $-n$ **супротни** један другом, или другим речима, бројеви n и $-n$ **чине пар супротних бројева**.

Видимо да супротан број позитивном броју налазимо врло лако тако што напишемо предзнак минус „–" испред позитивног броја. А шта се дешава ако желимо предзнаком минус да обележимо супротан број неког негативног броја? Да бисмо то уопште успели да урадимо, потребно је да прво негативан број ставимо међу заграде, па да онда испред заграде ставимо предзнак минус. На пример, ако желимо да напишемо „супротан број негативном броју –7", то математички пишемо овако $-(-7)$. Али пошто из Примера 2а) већ знамо да је број 7 тражени „супротан број негативном броју –7", следи да можемо да напишемо:

$$-(-7) = 7.$$

Ово што смо примером показали, можемо уопштити и за све целе бројеве.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За било који цели број n, важи једнакост

$$-(-n) = n.$$

Коначно, позабавимо се и бројем 0. Број 0 није ни позитиван ни негативан, те број 0 морамо посебно тумачити. То чинимо тако што кажемо да је број 0 сам себи супротан.

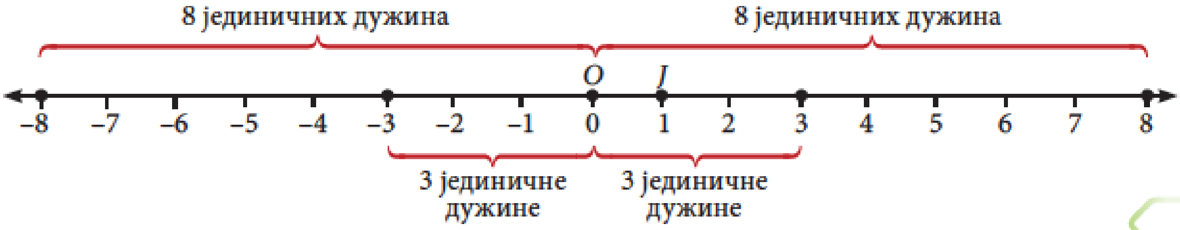
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Број 0 је сам себи супротан, и за њега важе једнакости

$$-0 = 0 \quad \text{и} \quad -(-0) = 0.$$

ПРИМЕР 3. На бројевној правој уцртај тачке које одговарају бројевима 3 и –8, као и њиховим супротним бројевима. Одреди колико јединичних дужина је свака од тих тачака удаљена од координатног почетка O.

РЕШЕЊЕ Број супротан броју 3 је број –3. Број супротан броју –8 је број 8, тј. $-(-8) = 8$. Уцртајмо тачке које одговарају овим бројевима, и одредимо растојање од координатног почетка O до сваке тачке једноставним бројањем јединичних дужина између сваке тачке и координатног почетка O.



Са слике из претходног примера се јасно види да су две тачке које представљају два супротна броја, на пример 8 и -8, налазе на супротним странама у односу на координатни почетак *O*, али да су једнако удаљене од координатног почетка *O*. Дакле:

– тачка придружена броју 8 се налази 8 јединичних дужина десно од тачке *O*, а
– тачка придружена броју -8 се налази 8 јединичних дужина лево од тачке *O*.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Тачке придружене супротним бројевима n и $-n$ се налазе на истом одстојању од координатног почетка, али на супротним странама у односу на координатни почетак.

Дужина између било које тачке на бројевној правој и координатног почетка *O* је од посебног значаја и тој дужини, мерено бројем јединичних дужина, дајемо посебно име, **апсолутна вредност**, следећом дефиницијом.

Број јединичних дужина између координатног почетка *O* и тачке придружене неком целом броју n, назива се **апсолутна вредност броја** n и обележава се изразом $|n|$.

Апсолутна вредност броја $|n|$ је заправо мера одстојања броја n од нуле, и често математичари за апсолутну вредност броја кажу да је то „удаљеност од нуле".

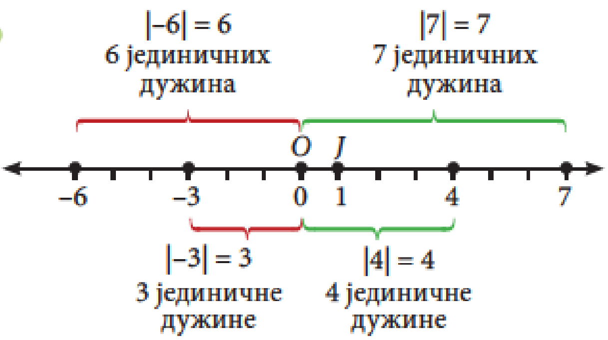
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Пошто се тачке придружене супротним бројевима n и $-n$ налазе на истом одстојању од координатног почетка, јасно је да бројеви n и $-n$ имају исту апсолутну вредност, дакле:

$$|n| = |-n|.$$

ПРИМЕР 4. На бројевној правој уцртај тачке које одговарају задатим бројевима $-3, 4, -6, 7$. Одреди број јединичних дужина између сваке уцртане тачке и координатног почетка *O* и на тај начин одреди апсолутну вредност сваког од задатих бројева.

РЕШЕЊЕ



Очитавањем растојања у јединичним дужинама, долазимо до решења:

$|-3| = 3$,
$|4| = 4$,
$|-6| = 6$ и
$|7| = 7$.

Из овог примера примећујемо да апсолутна вредност неког броја не може бити негативан број, јер одстојање од координатног почетка не може бити негативно. Ако број није негативан, онда је апсолутна вредност тог броја једнака самом броју. А ако је број негативан, онда је апсолутна вредност тог броја једнака супротном броју, јер је супротан број позитиван.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако n није негативан број, онда је $|n| = n$.

Ако је n негативан број, онда је $|n| = -n$.

ПРИМЕР 5. Одреди апсолутне вредности бројева –268, 0, 58.

РЕШЕЊЕ –268, је негативан број, дакле $|-268| = -(-268) = 268$.

0 није негативан, а ни позитиван број, дакле $|0| = 0$.

58 није негативан број, дакле $|58| = 58$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Апсолутну вредност неког броја добијамо кад **отклонимо** знаке „|" и предзнаке „–" и „+" а **сачувамо** само цифарни део броја.

/ отклони ◯ сачувај

$\lvert 23\rvert \to \cancel{\lvert}\,23\,\cancel{\lvert}$	$\to$	23 ...дакле	$\lvert 23\rvert = 23$
$\lvert -10\rvert \to \cancel{\lvert}\cancel{-}10\cancel{\lvert}$	$\to$	10 ...дакле	$\lvert -10\rvert = 10$
$\lvert 0\rvert \to \cancel{\lvert}\,0\,\cancel{\lvert}$	$\to$	0 ...дакле	$\lvert 0\rvert = 0$
$\lvert +110\rvert \to \cancel{\lvert}\cancel{+}110\cancel{\lvert}$	$\to$	110 ...дакле	$\lvert +110\rvert = 110$
$\lvert -6\rvert \to \cancel{\lvert}\cancel{-}6\cancel{\lvert}$	$\to$	6 ...дакле	$\lvert -6\rvert = 6$

ЗАДАЦИ

19. Одреди бројеве супротне бројевима: 6, 2, 9.

20. Одреди бројеве супротне бројевима: –4, –1, –8, 0.

21. Одреди бројеве x, ако $-x \in \{11, -12, 24, -32, -100\}$.

22. Који од записа су тачне једнакости?

а) $-(-3) = 3$; б) $-(-10) = 10$; в) $-(-0) = 0$.

23. Одреди апсолутне вредности бројева: –9, 5, –2, 0 и 13.

24. Допуни табелу:

x	5	–2						–4
$-x$			7	–5		11	–17	
$\lvert x \rvert$					0			

25. Запиши без заграда бројеве:

а) $-(+24)$; б) $-(-17)$; в) $+(-8)$; г) $-(-(-4)))$; д) $-(+(-22)$.

26. Ако је $|a| = 5$, колико је $|-a|$?

27. Који бројеви имају апсолутну вредност једнаку:

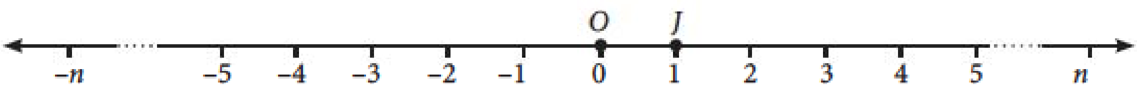
а) 0; б) 2; в) 7; г) –10?

28. Одреди вредност изараза $|-5| + |6| - |-7|$.

1.3. Поређење целих бројева

Када се лифтом са 3. спрата одвеземо на 1. спрат, кажемо да смо се „спустили” јер је број 3 већи од броја 1, и то пишемо: 3 > 1. Дакле, спуштање означава вожњу са спрата који је обележен већим бројем на спрат обележен мањим бројем. Погледај сада слику командне табле у лифту. Ако се са нивоа –1 одвезеш на ниво –2, јасно је да се спушташ, а то онда значи да је број –1 већи од броја –2, и то пишемо: –1 > –2. Из овог примера са лифтом, јасно је да све целе бројеве можемо поредити тако да за било која два различита броја можемо утврдити који је већи.

Упоређивање целих бројева је најлакше утврдити на бројевној правој. Ако се на бројевној правој први број налази **десно** од другог броја, онда кажемо да је први број **већи** од другог. Једнако тако, пошто се други број налази **лево** од првог, кажемо да је други број **мањи** од првог.

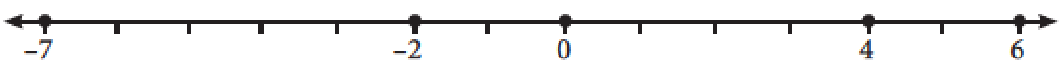


Из овог једноставног правила, погледом на бројевну праву, закључујемо:

$$\ldots < -n < \ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots < n < \ldots$$

ПРИМЕР 1. На бројевној правој уцртај тачке које одговарају бројевима –7, 4, –2, 0 и 6, па затим те бројеве поређај редом од најмањег до највећег.

РЕШЕЊЕ



Читањем бројева са бројевне праве слева надесно поређајмо бројеве по величини.

$$-7 < -2 < 0 < 4 < 6$$

Погледај на бројевној правој уцртане тачке које одговарају бројевима k, n, и m.

Пошто је број n **десно** од бројева k и m, можемо одмах написати $n > m$ и $n > k$. Слично томе, број k се налази **лево** од броја m, што значи да можемо написати $k < m$. Или једноставније, поређење сва три броја можемо представити записом $k < m < n$, или $n > m > k$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Сваки позитиван број је већи од сваког негативног броја.
Сваки позитиван број је већи од броја 0.
Сваки негативан број је мањи од броја 0.

Ако упоређујемо два **позитивна броја**, већи је онај који је удаљенији од нуле. Другим речима, **већи је онај који има већу апсолутну вредност.**

Ако упоређујемо два **негативна броја**, мањи је онај који је удаљенији од нуле. Другим речима, **мањи је онај који има већу апсолутну вредност.**

ПРИМЕР 2. Без уцртавања и означавања бројева на бројевној правој, поређај бројеве $-100, 56, 17, 0, -17, 80, -45$ од најмањег ка највећем.

РЕШЕЊЕ а) Погледајмо прво понуђене негативне бројеве. Најмањи међу њима је -100 јер је најудаљенији од нуле, тј. има највећу апсолутну вредност: 100. Следећи најмањи је -45, па затим -17. И стога можемо написати $-100 < -45 < -17$.

б) Пошто знамо да су сви негативни бројеви мањи од нуле, користећи решење а) можемо одмах написати $-100 < -45 < -17 < 0$.

в) Понуђене позитивне бројеве већ знамо да упоредимо: $17 < 56 < 58$. Пошто су сви позитивни бројеви већи од 0, имамо $0 < 17 < 56 < 80$.

г) Обједињавањем решења б) и в) добијамо:
$-100 < -45 < -17 < 0 < 17 < 56 < 80$.

ЗАДАЦИ

29. Тренутна температура је: Ваљево -5 °C; Ниш 3 °C; Београд -2 °C; Сјеница -10 °C; Чачак 0 °C. У ком граду је тренутно: а) најхладније; б) најтоплије?

30. Одреди апсолутне вредности бројева $-12, 6, -3, 9$. Који од бројева $-12, 6, -3, 9$ је најближи тачки 0 на бројевној правој?

31. Упореди бројеве:
а) 0 и 32; б) -26 и 0; в) -13 и 12; г) 17 и 45.

32. Уместо кружића стави један од знакова > или <, тако да исказ буде тачан:
а) $-12 \bigcirc -25$; б) $-4 \bigcirc 4$; в) $11 \bigcirc -6$; г) $17 \bigcirc 4$.

33. За које вредности целог броја a је тачна, а када није тачна неједнакост: $a > -a$?

34. Колико има целих бројева чија је апсолутна вредност мања од 5.

35. Шта је веће: а) $|-1|$ или -3; б) 2 или $-|-4|$; в) $-(-7)$ или $|-5|$?

36. Поређај у растући низ целе бројеве a, b и c, ако је: $-1 < a < 1$, $-4 < b < 0$ и $0 < c < 9$.

37. Покажи да за сваки цео врој a важи неједнакост $-|a| \leq |a|$. Када важи једнакост?

38. Одреди скуп C кога чине цели бројеви чија је апсолутна вредност већа од 2 и мања од 7.

1.4. Сабирање целих бројева

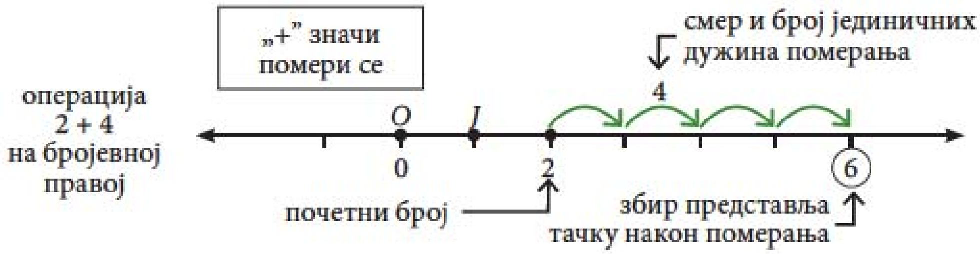
Подсетимо се: Ако желимо да саберемо два позитивна **сабирка** 2 и 4, то означавамо као операцију 2 + 4, а заправо на бројевној правој означавамо следеће.

а) Први сабирак 2 означавамо као почетну тачку, дакле: **„Крени од броја 2"**.

б) Знак плус „+" читамо као **„и помери се"**.

в) Други сабирак 4 означава смер и вредност померања, дакле **„у позитивном смеру за 4 јединичне дужине"**.

Тако операцију 2 + 4 читамо „Крени од броја 2 и помери се у позитивном смеру за 4 јединичне дужине". На бројевној правој, то обележавамо следећим дијаграмом.



Након померања, завршавамо у тачки придруженој броју 6, који називамо **збир**.

Готово на исти начин сабирамо и негативне бројеве. Објаснићемо то на примеру сабирања два броја. Први сабирак нека буде број 1, а други сабирак нека буде негативан број –5. У овом случају други сабирак морамо ставити међу заграде, и написати збир на следећи начин.

1 + (–5)

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Када је други сабирак негативан број, онда други сабирак стављамо у заграде.

први сабирак	други сабирак	погрешно	правилно
1	–5	~~1 + –5~~	1 + (–5)
3	–2	~~3 + –2~~	3 + (–2)
–5	–11	~~–5 + –11~~	–5 + (–11)

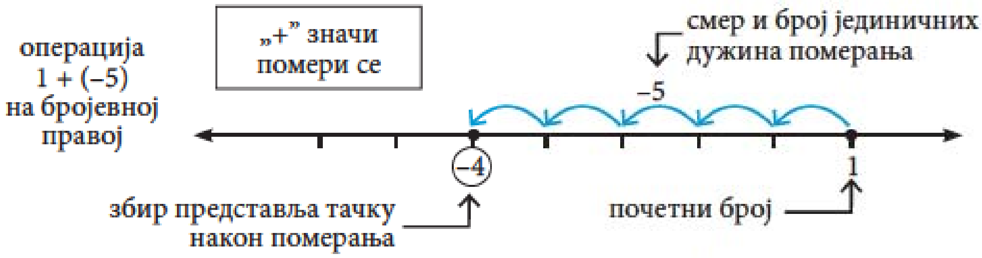
Прикажимо сада операцију 1 + (–5) на бројевној правој:

а) Први **сабирак** 1 означавамо као почетну тачку, дакле: **„Крени од броја 1"**.

б) Знак плус „+" читамо као **„и помери се"**.

в) Други **сабирак** (–5) означава смер и вредност померања, дакле: **„у негативном смеру за 5 јединичних дужина"**.

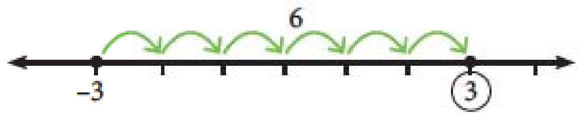
Тако, операцију 1 + (–5) читамо: **„Крени од броја 1 и помери се у негативном смеру за 5 јединичних дужина"**, а на бројевној правој то обележавамо овако:



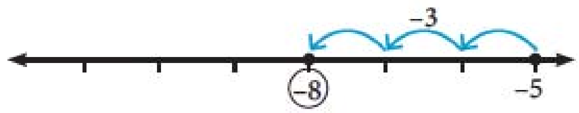
Након померања, завршавамо у тачки придруженој броју –4, који називамо **збир**.

ПРИМЕР 1. Израчунај следеће: а) $-3 + 6$; б) $-5 + (-3)$; в) $5 + (-4)$.

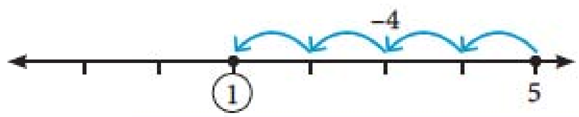
РЕШЕЊЕ а) $-3 + 6 = 3$



б) $-5 + (-3) = -8$



в) $5 + (-4) = 1$



Подсетимо се сада особине **комутативности**, која како за природне, важи и за целе бројеве.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

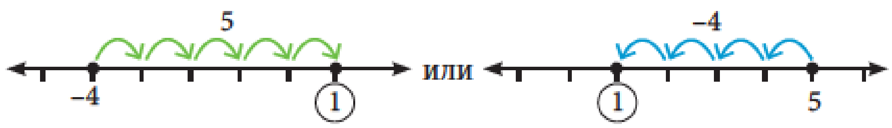
За било која два цела броја a и b, важи особина **комутативности (промена места сабирака)**, коју ћемо написати у четири различита облика да би било сасвим јасно да важи и за негативне бројеве.

$$a + b = b + a$$
$$-a + b = b + (-a)$$
$$a + (-b) = -b + a$$
$$-a + (-b) = -b + (-a)$$

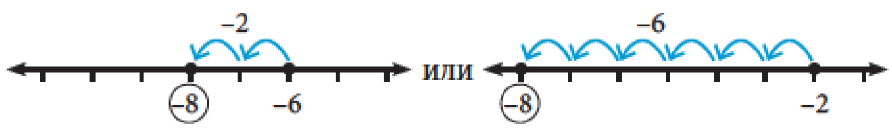
ПРИМЕР 2. Увери се да закон комутативности важи за два примера сабирања:

а) сабирање бројева –4 и 5, и б) сабирање бројева –6 и –2.

РЕШЕЊЕ а) $-4 + 5 = 5 + (-4) = 1$



б) $-6 + (-2) = -2 + (-6) = -8$



Сада знамо како да бројањем корака по бројевној правој саберемо све целе бројеве, укључујући и негативне бројеве. Али одмах уочавамо да бројање није лако ако треба да саберемо два велика броја, на пример $328 + (-407)$, јер би претерано дуго трајало бројати 407 корака улево по бројевној правој. Зато ћемо сада, уз помоћ **апсолутне вредности сабирака**, обелоданити правило сабирања које ће нам помоћи да лакше сабирамо велике бројеве.

Пре него што установимо правило, погледајмо неколико примера са малим бројевима.

$5 + 4 = 9,$	али то можемо написати и овако:	$+5 + 4 = +(5 + 4) = +9;$
$4 + (-5) = -1,$	али то можемо написати и овако:	$4 + (-5) = -(5 - 4) = -1;$
$-5 + (-4) = -9,$	али то можемо написати и овако:	$-5 + (-4) = -(5 + 4) = -9;$
$(-4) + 5 = 1,$	али то можемо написати и овако:	$(-4) + 5 = +(5 - 4) = +1.$

Приметимо да сабирци имају апсолутне вредности $|4| = |-4| = 4$ или $|5| = |-5| = 5$, и да је, наравно, $5 \geq 4$. Такође, приметимо и да апсолутна вредност збира може да буде једнака збиру $5 + 4 = 9$, или разлици $5 - 4 = 1$. И сада уочимо следећа правила А) и Б).

А) Предзнак збира је једнак предзнаку сабирка са већом апсолутном вредношћу 5.

Б) Апсолутна вредност збира једнака је:

1) збиру апсолутних вредности $5 + 4 = 9$ ако су сабирци истог знака, нпр. -5 и -4, или

2) разлици апсолутних вредности $5 - 4 = 1$ ако су сабирци супротног знака, нпр. 4 и -5.

Применимо сада ово опште **правило сабирања помоћу апсолутних вредности.**

ПРИМЕР 3. Израчунај збирове следећих парова сабирака: а) -47 и 12; б) -123 и -92.

РЕШЕЊЕ а) А: Предзнак збира је „–” јер -47 има већу апсолутну вредност од 12.

В: Сабирци су супротног знака, па одузимамо апсолутне вредности.

$$-47 + 12 = -(|47| - |-12|) = -35$$

б) А: Предзнак збира је „–” јер -123 има већу апсолутну вредност од -92.

В: Сабирци су истог знака, па сабирамо апсолутне вредности.

$$-123 + (-92) = -(|123| + |92|) = -215$$

За крај ове лекције, подсетимо се и три закона сабирања који важе за бројеве скупа N_0: закон **комутативности**, закон **асоцијативности** и закон **неутралног елемента**. Исти ти закони важе и за целе бројеве, и овде ћемо их сажето изложити.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су a, b и c три цела броја, тада важи:

$a + b = b + a$	**Комутативност.** Редослед сабирака се може променити.
$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$	**Асоцијативност.** Сабирци се могу произвољно груписати.
$a + 0 = 0 + a = a$	**Неутрални елемент.** Број 0 је неутрални елемент сабирања.

Урадимо пример који илустурује могућност сабирања целих бројева.

ПРИМЕР 4. Милан планира да направи забаву за своје другове. Зна да ће од родитеља добити 1 750 динара, од баке 920 динара, а од стрица 400 динара. На забави ће морати да плати 2 100 динара за храну и 1 800 динара за пиће. Да ли ће Милан имати довољно новца за забаву? Ако неће, колико ће му новца недостајати?

РЕШЕЊЕ Да бисмо урадили овај задатак, направимо табелу прихода и расхода као на слици, у којој смо расходе представили као негативне приходе.

Назив	Приход
родитељи	1 750
бака	920
стриц	400
храна	−2 100
пиће	− 1 800

Саберимо сада све приходе:

$$[(1\,750 + 920 + 400)] + [(-2\,100) + (-1\,800)].$$

Сређивањем добијамо

$$3\,070 + (-3\,900) = -830.$$

Миланов збир је −830. Дакле, збир је негативан, што значи да ће Милан бити у минусу и неће имати довољно новца за забаву. Пошто је апсолутна вредност збира једнака $|-830| = 830$, то значи да Милану недостаје 830 динара да би могао да направи забаву.

ЗАДАЦИ

39. У рачуноводству, важни појмови су приход, расход и салдо. Приход се најчешће обележава са „+", расход са „−". Салдо је збир прихода и расхода. Салдо може бити позитиван и негативан. Негативан салдо се у неким ситуацијама назива и дуг. Попуни следећу таблицу.

Приход	2 000	3 400	5 700	7 300
Расход	1 200	4 000	5 700	10 000
Салдо	800			

40. Лаза је за рођендан добио 3 000 динара од деде, 5 000 динара од бабе и 7 000 динара од тетке. Рођенданска журка је кошта 20 000 динара. Какав исход ће имати прослава Лазиног рођендана, тј. да ли ће Лази остати нешто новца или ће мама и тата морати да покрију неки и колики дуг?

41. Упореди вредности израза:

$A = (-1) + (-2) + (-3) + (-4)$; $B = (-5) + (-6)$ и $C = (-7) + (-8)$.

42. На колико начина се број −8 може приказати као збир два негативна цела броја?

43. Уместо x напиши одговарајуће бројеве тако да су тачни искази.

а) $7 + x = 2$; б) $x + (-12) = 0$; в) $6 + x + (-9) = 5$; г) $-3 + x + 8 = -1$.

44. Израчунај $(-1) + 2 + (-3) + 4 + (-5) + 6$?

45. Израчунај $23 + (-22) + 21 + (-20) + \ldots + 3 + (-2) + 1$?

46. Дат је скуп $A = \{-11, 8, -3\}$. Израчунај збир бројева из скупа A са збиром њихових апсолутних вредности.

47. Колико износи збир 5 највећих различитих негативних целих бројева?

1.5. Одузимање целих бројева

Подсетимо се: Разлику природних бројева a и b за која важи $a \geq b$, пишемо изразом $a - b$.

Ако је $c = a - b$, тада:

број a називамо **умањеник**,

број b називамо **умањилац**, а

број c називамо **разлика**.

Приметимо да код одузимања у скупу природних бројева, умањилац не сме бити већи од умањеника, дакле $a \geq b$. Али приликом одузимања у скупу целих бројева, умањилац може бити и већи од умањеника. То постижемо тако што користимо **супротне бројеве** да помоћу њих искажемо операцију одузимања на следећи начин.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

НОВА ДЕФИНИЦИЈА ОДУЗИМАЊА:

Одузимање броја n је исто што и сабирање супротног броја $-n$.

Другим речима, ако од умањеника a одузмемо умањилац n, то је исто као да број a саберемо са супротним бројем $-n$.

Истоветно, ако од умањеника a одузмемо умањилац $-n$, то је исто као да број a саберемо са супротним бројем n.

Математички, то исказујемо овако:

$$a - n = a + (-n) \quad \text{или} \quad a - (-n) = a + n$$

И то је све. Уз помоћ негативних, или тачније супротних бројева, поједноставили смо одузимање. Заправо, током учења математике, у старијим разредима ћемо уводити сложеније појмове да бисмо поједностављивали рачунање. Тако смо овде увели негативне бројеве, који изгледају сложено, а поједноставили смо значење операције одузимања.

ПРИМЕР 1. Користећи нову дефиницију одузимања, израчунај следеће разлике:

а) $12 - 14$; б) $-56 - 78$;

в) $-17 - (-19)$; г) $-67 - (-337)$.

РЕШЕЊЕ а) Супротан број умањиоцу 14 је број –14. Стога је одузимање броја 14 исто што и сабирање броја –14:

$12 - 14 = 12 + (-14) = -2.$

б) Супротан број умањиоцу 78 је број –78. Стога је одузимање броја 78 исто што и сабирање броја –78:

$-56 - 78 = -56 + (-78) = -134.$

в) Супротан број умањиоцу –19 је број 19. Стога је одузимање броја –19 исто што и сабирање броја 19:

$-17 - (-19) = -17 + 19 = 2.$

г) Супротан број умањиоцу –337 је број 337. Стога је одузимање броја –337 исто што и сабирање броја 337:

$-67 - (-337) = -67 + 337 = 270.$

ЗАДАЦИ

48. Одреди вредност израза:

а) $7 - 15$; б) $(-6) - 10$; в) $(-11) - (-4)$; г) $(-12) - (-21)$.

49. Користећи чињеницу да је одузимање сабирање супротног броја, израчунај:

а) $7 - (-5)$; б) $(-6) - 8$; в) $(-10) - (-4)$; г) $3 - 11$.

50. Упореди вредности израза: $A = (-1) - (-2) - (-3) - (-4)$, $B = (-5) - (-6)$ и $C = (-7) - (-8)$.

51. Користећи закон комутативности за сабирање упрости изразе и израчунај вредност следећих израза:

а) $5 - 14 + 9$; б) $(-13) - (-7) + 13$; в) $24 - 16 + (-24)$.

52. Допуни табелу:

x	3	4	5	6	(–1)	(–2)	(–3)	(–4)
y	(–11)	(–10)	(–9)	(–8)	(–7)·	(–8)	(–10)	11
$x - y$								

53. Израчунај: а) $8 - (-7) - 6$; б) $(-4) - 3 - (-2)$; в) $(-10) - (-9) - (-8)$; г) $5 - 4 - 3$.

54. Збир два цела броја је 6, а њихова разлика –8. О којим бројевима је реч?

55. Збир два цела броја је 6, а апсолутна вредност њихове разлике је 2. Одреди те бројеве.

56. Може ли збир два броја бити 8, а разлика њихових апсолутних вредности 10?

1.6. Изрази са заградама

Подсетимо се: Заграде користимо да групишемо операције и променимо редослед рачунања. На пример, ако збир три сабирка 2, 7 и 3 напишемо као 2 + 7 + 3 онда рачунамо редом слева надесно, дакле прво саберемо 2 и 7, па тек онда саберемо број 3. Али ако збир напишемо као 2 + (7 + 3), онда прво саберемо 7 и 3, па тек онда 2. Резултат је исти, али је редослед рачунања другачији.

$$\underbrace{2+7}_{9}+3=2+\underbrace{(7+3)}_{10}$$

$$9+3=2+10$$

$$12=12$$

Обично заградама групишемо збирове или разлике тако да олакшамо рачун, на пример 7 + 3 даје 10, а број 10 се даље лако сабира.

ПРИМЕР 1. Групиши операције тако да себи олакшаш рачун.

а) $37-41+63-19$; б) $24-14-7-6+313$.

РЕШЕЊЕ а) $37-41+63-19=\underbrace{(37+63)}_{100}+\underbrace{(-41)+(-19)}_{-60}=100+(-60)=40$

б) $24-14-7-6+313=313-\underbrace{(7+6)}_{13}+\underbrace{(24-14)}_{10}=\underbrace{313-13}_{300}+10=300+10=310$

Подсетимо се: **Врсте заграда** – у математици се користе три врсте заграда:

обичне ( ), угласте [ ] и витичасте { }.

Када једну врсту заграда стављамо у другу, онда обичне стављамо у угласте, а угласте стављамо у витичасте, као на пример {129 + [125 – (14 + 6) – 5]}, а кад рачунамо, рачунамо изразе редом:

1) прво у обичним ( ), 2) затим у угластим [ ], 3) на крају у витичастим { }, дакле, овако.

$$\{129+[125-\underbrace{(14+6)}_{20}-5]\}=\{129+\underbrace{[125-20-5]}_{100}\}=\underbrace{\{129+100\}}_{229}=229$$

ПРИМЕР 2. Израчунај $17 - \{(9 - 15) - [3 - (-17 + 9)] + 19\} - 32$

РЕШЕЊЕ $17 - \{\underbrace{(9 - 15)}_{-6} - [3 - \underbrace{(-17 + 9)}_{-8}] + 19\} - 32 = 17 - \{-6 - \underbrace{[3 - (-8)]}_{11} + 19\} - 32 =$

$= 17 - \underbrace{\{-6 - 11 + 19\}}_{2} - 32 = 17 - 2 - 32 = -17$

У неким ситуацијама, циљ нам неће бити да групишемо изразе у заграде, нити да постепено рачунамо изразе у заградама, већ да заграде уклонимо, или другим речима да заграде елиминишемо. Још из 5. разреда знамо за два основна правила **елиминисања** заграда:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

А) Сабирање броја c са збиром бројева a и b:

$$c + (a + b) = c + a + b.$$

Б) Одузимање збира бројева a и b од броја c:

$$c - (a + b) = c - a - b.$$

Сетимо се да је разлика $(a - b)$ једнака збиру $[a + (-b)]$, па можемо применити правила сабирања и одузимања А) и Б), да нађемо нова правила.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

В) Сабирање броја c са разликом бројева a и b:

$$c + (a - b) = c + [a + (-b)] = c + a + (-b) = c + a - b.$$

Г) Одузимање разлике бројева a и b од броја c:

$$c - (a - b) = c - [a + (-b)] = c - a - (-b) = c - a + b.$$

Кад у правила А) и В) заменимо $c = 0$, добијмо **прво правило елиминисања заграда** које се лако памти:

$$+(a + b) = +a + b$$

$$+(a - b) = +a - b$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Кад је испред заграде +, заграду обриши, а предзнаке упиши.

А кад у правила Б) и Г) заменимо $c = 0$, добијмо **друго правило елиминисања заграда** које се лако памти:

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Кад је испред заграде –, заграду обриши, а предзнаке супротнима замени.

ПРИМЕР 3. Елиминиши заграде из следећих израза:

а) $231 + (19 - 92)$; б) $432 - (-15 + 4)$;

в) $2 - (1 - 4 + 9)$; г) $8 + (-7 - 6 + 4)$;

д) $2 + [-a - (-4 + b)]$; ђ) $5 - \{-4 - a + [-(7 + b) + (8 - c]\}$.

РЕШЕЊЕ а) $231 + (19 - 92)$ испред заграде је „+", па заграде бришемо, а бројеве у загради 19 и −92 уписујемо непромењеног предзнака +19 и −92, дакле:

$$231 \underbrace{+ (19 - 92)}_{+19 - 92} = 231 + 19 - 92.$$

б) $432 - (-15 + 4)$ испред заграде је „−", па заграде бришемо, а бројеве у загради −15 и 4 мењамо супротнима +15 и −4, дакле:

$$432 \underbrace{- (-15 + 4)}_{+15 - 4} = 432 + 15 - 4.$$

в) $2 - (1 - 4 + 9)$ испред заграде је „−", па заграде бришемо, а бројеве у загради 1, −4 и +9 мењамо супротнима −1, +4 и −9, дакле:

$$2 \underbrace{- (1 - 4 + 9)}_{-1 + 4 - 9} = 2 - 1 + 4 - 9.$$

г) $8 + (-7 - 6 + 4)$ испред заграде је „+", па заграде бришемо, а бројеве у загради −7, −6 и +4 уписујемо непромењеног предзнака −7, −6 и +4, дакле:

$$8 \underbrace{+ (-7 - 6 + 4)}_{-7 - 6 + 4} = 8 - 7 - 6 + 4.$$

д) $2 + [-a - (-4 + b)]$ Прво елиминишимо обичне заграде. Испред обичне заграде „(" је −, па обичне заграде бришемо, а величине у обичним заградама −4 и $+b$ мењамо супротнима +4 и $-b$, дакле:

$$2 + [-a \underbrace{- (-4 + b)}_{+ 4 - b}] = 2 + [-a + 4 - b].$$

Сада елиминишимо угласте заграде. Испред угласте заграде [је +, па угласте заграде бришемо, а величине у угластим заградама $-a$, +4 и $-b$ уписујемо непромењеног знака, дакле:

$$2 \underbrace{+ [-a + 4 - b]}_{-a + 4 - b} = 2 - a + 4 - b.$$

ђ) Применимо сада мало бржи поступак, без образлагања:

$$5 - \{-4 - a + [\underbrace{-(7 + b)}_{-7 - b} \underbrace{+ (8 - c)}_{+8 - c}]\} = 5 - \{-4 - a \underbrace{+ [-7 - b + 8 - c]}_{-7 - b + 8 - c}\}$$

$$= 5 - \{-4 - a - 7 - b + 8 - c\} = 5 + 4 + a + 7 + b - 8 + c.$$

ЗАДАЦИ

57. Користећи особине рачунских операција на најбржи начин израчунај:
а) $33 + 28 + 67$; б) $156 + 29 - 56$; в) $43 \cdot 79 + 79 \cdot 57$; г) $145 - 37 + 55 - 63$.

58. Израчунај: а) $(-75) + (-28) + 75 + 28$; б) $123 + 456 - 323 - 256$.

59. Израчунај вредност израза $(28 - 60 + 32) \cdot (1234 - 5678 + 9012 - 3456 + 7890)$.

60. Одреди вредност израза: а) $-(-2)$; б) $-[-3 - (-3)]$; в) $-\{4 - [-4 - (-4)]\}$.

61. Израчунај вредности израза:
а) $1 - [2 \cdot 3 + (-4)]$; б) $(-10) + 5 - [(4 - 3) \cdot 13]$.

62. Израчунај вредности израза:
а) $\{10 - [9 - (-8)] - 7\}$; б) $\{1 + 2 \cdot [(3 + 4) - 5]\}$;

63. Колико је: а) $\{-1 - [-2 - (-3)]\}$; б) $\{[(-5) - 6] - 7\}$?

64. Поступним ослобађањем од заграда, одреди вредност израза:
а) $\{11 + [12 + (13 - 14) - 15] - 16\}$; б) $\{8 + [7 \cdot (6 : 2) - 3] - 4\}$.

65. Израчунај:
а) $\{5 - [6 - (-7)]\}$; б) $\{-8 + [(-7) - (6 - 5)]\}$.

66. Израчунај:
а) $|-3 - |-2||$; б) $|5 + |6 - 7| + |8 - 9| + 10|$.

67. Одреди вредност израза $|5 - \{4 + [3 \cdot (2 + 1)]\}|$.

68. Постави један пар заграда „( )", тако да буде тачан запис $1 - 3 - 2 = 0$.

69. Одреди вредност израза $30 - 29 + 28 - 27 + ... + 4 - 3 + 2 - 1$. Помоћ: користи заграде.

70. Израчунај $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$.

71. Постави један пар заграда „( )", тако да буде тачан запис
$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = 1$.

72. Постави један пар заграда „( )", тако да буде тачан запис
$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -1$.

73. Од збира најмањих десет природних бројева одузми збир највећих пет негативних целих бројева.

74. Који број се добија када се од збира првих 100 непарних природних бројева одузме збир првих 100 парних природних бројева.

75. Израчунај вредност израза $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8$. Помоћ: користи заграде.

76. Израчунај вредност израза $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12$.

77. Израчунај вредност израза $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 \ldots + 96 + 97 - 98 - 99 + 100$.

78. Ако је $a = 5$, $b = -3$ и $c = 2$, израчунај:
а) $a - (b + c)$; б) $a - [b - (c + b) + a]$; в) $a - \{a - [b - (b - c)]\}$.

1.7. Множење целих бројева

Подсетимо се: Производ бројева a и b обележавамо изразом $a \cdot b$. Ако је $c = a \cdot b$, тада
број a називамо **чинилац**,
број b називамо такође **чинилац**, а
број c називамо **производ**.

При множењу целих бројева, уверићемо се да важе сва правила која важе и при множењу природних бројева, а онда ћемо том списку додати само још: **правило множења бројем –1**. Подсетимо се, дакле, прво правила која важе за природне, али и за целе бројеве.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су a, b и c три цела броја, тада важи:

$a \cdot b = b \cdot a$	**Комутативност.** Редослед чинилаца се може променити.
$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Асоцијативност.** Чиниоци се могу произвољно груписати.
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	Број 1 је неутрални елемент множења.
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	Множење нулом. Можење бројем 0 даје 0.

Подсетимо се: Применимо неке од наведених закона да бисмо лако израчунали производе следећих целих бројева:

а) $14 \cdot 35 \cdot 1$; б) $12 \cdot 15 \cdot 35$; в) $7 \cdot 11 \cdot 0 \cdot 408$.

Ево предлога решења (или има и других могућности):

а) $14 \cdot 35 \cdot 1 = (2 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 5) \cdot 1$	разложили смо сваки од чинилаца
$= [(7 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 2)] \cdot 1$	прегруписање: комутативност и асоцијативност
$= [(7 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 2)]$	множење бројем 1 не мења број
$= [49 \cdot 10] = 490$	помножили смо делимичне производе

б) $12 \cdot 15 \cdot 35 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5)$	разложили смо сваки од чинилаца
$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7)$	прегруписање: комутативност и асоцијативност
$= 10 \cdot 10 \cdot (9 \cdot 7)$	израчунали смо делимичне производе
$= (9 \cdot 7) \cdot (10 \cdot 10)$	прегруписање: комутативност и асоцијативност
$= 63 \cdot 100 = 6300$	помножили смо делимичне производе

в) $7 \cdot 11 \cdot 0 \cdot 408 = 0 \cdot (7 \cdot 408 \cdot 11)$	Прегруписање: комутативност и асоцијативност
$= 0$	множење бројем 0 даје 0.

Све што нам је сада потребно да бисмо рачунали производе целих бројева је особина множења бројем –1.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За сваки цели број a, важи следеће правило:
Множење бројем –1 претвра сваки број у њему супротан број.

$$-1 \cdot a = a \cdot (-1) = -a \qquad \text{или} \qquad -1 \cdot (-a) = -a \cdot (-1) = a$$

Познавање правила множења бројем -1 је довољно да се помноже било која два цела броја.

ПРИМЕР 1. Користећи правило множења бројем -1, израчунајмо следеће производе:

а) $-1 \cdot (-1)$; б) $21 \cdot (-10)$; в) $(-15) \cdot (-14)$; г) $-16 \cdot 25$.

РЕШЕЊЕ

а) $-1 \cdot (-1) = -(-1)$ применили смо правило множења бројем -1 на број (-1)

$= 1$ знак „–” испред броја претвара број у себи супротан број

б) $21 \cdot (-10) = 21 \cdot (-1 \cdot 10)$ правилом множења бројем -1 имамо $-10 = -1 \cdot 10$

$= -1 \cdot (21 \cdot 10)$ прегруписање: комутативност и асоцијативност

$= -1 \cdot 210$ израчунали смо делимичан производ

$= -210$ правилом множења бројем -1 добијамо $-210 = -1 \cdot 210$

в) $(-15) \cdot (-14) = (-1 \cdot 15) \cdot (-1 \cdot 14)$ правилом множења бројем -1 имамо $-15 = -1 \cdot 15$ и $-14 = -1 \cdot 14$

$= -1 \cdot (-1) \cdot (15 \cdot 14)$ прегруписање: комутативност и асоцијативност

$= 1 \cdot (15 \cdot 14)$ $(-1) \cdot (-1) = 1$ из тачке а) овог примера

$= (15 \cdot 14) = 210$ множење бројем 1

г) $(-16) \cdot 25 = (-1 \cdot 16) \cdot 25$ правилом множења бројем -1 имамо $-16 = -1 \cdot 16$

$= -1 \cdot (16 \cdot 25)$ прегруписање: комутативност и асоцијативност

$= -1 \cdot 400$ израчунали смо делимичан производ

$= -400$ правило множења бројем -1

Из предходног примера примећујемо да је производ негативног и позитивног броја једнак негативном броју. Примећујемо и да је производ два негативна броја, или два позитивна броја, једнак позитивном броју. Укратко, можемо да изведемо и следећу таблицу множења целих бројева.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

а) Производ два чиниоца је позитиван када су чиниоци истог предзнака.

б) Производ два чиниоца је негативан када су чиниоци супротног предзнака

или укратко:

$$a \cdot b = -a \cdot (-b)$$

$$-a \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Чинилац	a	a	$-a$	$-a$
Чинилац	b	$-b$	b	$-b$
Производ	$a \cdot b$	$-(a \cdot b)$	$-(a \cdot b)$	$a \cdot b$

(таблица множења)

ПРИМЕР 2. Израчунај:

а) $(-15) \cdot 18$; б) $-14 \cdot (-10)$; в) $8 \cdot (-15) \cdot (-25)$.

РЕШЕЊЕ а) $(-15) \cdot 18 = -(15 \cdot 18)$ применили смо $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

$= -270$

б) $-14 \cdot (-10) = 14 \cdot 10$ применили смо $-a \cdot (-b) = a \cdot b$

$= 140$

в) $8 \cdot (-15) \cdot (-25) = 8 \cdot [(-15) \cdot (-25)]$ прегруписање: асоцијативност

$= 8 \cdot [15 \cdot 25]$ применили смо $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

$= (8 \cdot 25) \cdot 15$ комутативност и асоцијативност

$= 200 \cdot 15 = 3000$

ПРИМЕР 3. Ивана је замислила број. Када се супротан број Иванином замишљеном помножи са -3, добије се производ једнак 21. Који је број Ивана замислила?

РЕШЕЊЕ Означимо словом x број који је Ивана замислила. Супротан број том броју x је $-x$. Када $-x$ помножимо бројем -3 добијемо производ $(-x) \cdot (-3)$ који треба да буде једнак 21. Дакле добијамо једначину:

$$(-x) \cdot (-3) = 21,$$

коју треба да решимо. Применимо ли правило $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ на леву страну једначине, добијамо $(-x) \cdot (-3) = x \cdot 3$. Тако једначина добија нови облик:

$$x \cdot 3 = 21,$$

а решење је $x = 7$. Дакле, Ивана је замислила број 7.

Провери резултат. Супротан број броју 7 је -7. Када се -7 помножи бројем -3, добије се производ $(-7) \cdot (-3) = 7 \cdot 3 = 21$, дакле, добро смо одгонетнули да је Ивана замислила број 7.

Нађимо сада начин да једноставно одредимо предзнак производа много чинилаца. Увери се у тачност резултата следећих једнакости:

а) $1 \cdot (-1) = -1$;

б) $1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2$;

в) $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = 4$;

г) $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 = 12$;

д) $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-3) = -36$.

Уочимо следеће правило.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако нити један чинилац није једнак нули,

производ је **позитиван** када производ чини **паран** број негативних чинилаца, а производ је **негативан** када производ чини **непаран** број негативних чинилаца.

ПРИМЕР 4. Одреди да ли је производ негативан, позитиван или 0.

а) $(-6)\cdot 7\cdot(-12)$; б) $(-6)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 5$; в) $(-6)\cdot 7\cdot 0$.

РЕШЕЊЕ а) Нити један чинилац није 0, а имамо **паран** број (два) негативних чинилаца. Производ је **позитиван**.

б) Нити један чинилац није 0, а имамо **непаран** број (три) негативних чинилаца. Производ је **негативан**.

в) Бар један чинилац је 0. Производ је 0.

За сам крај лекције, подсетимо се особине дистрибутивности множења у односу на сабирање и одузимање. Како за природне бројеве, ова особина важи и за целе бројеве.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су a, b и c три цела броја, тада важи:
особина дистрибутивности множења према сабирању и одузимању.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad \text{и} \quad a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$

***ПРИМЕР 3.** Туристичка агенција води ђаке 1. и 2. разреда на екскурзију. Сваки ђак 1. разреда треба да уплати по 600, а сваки ђак 2. разреда по 800 динара туристичкој агенцији. Туристичку агенцију превоз сваког ђака кошта 500 динара по ђаку. Ђаци 1. разреда ће се вратити кући увече, а ђаци 2. разреда ће преноћити у кампу који кошта туристичку агенцију 400 динара по ђаку, и вратити се кући сутрадан. Ако туристичка агенција треба да одведе 67 ђака 1. разреда и 39 ђака 2. разреда на екскурзију, колики ће укупан приход имати туристичка агенција?

РЕШЕЊЕ

Приход	Ђак 1. разреда	Ђак 2. разреда
Уплата	600	800
Транспорт	−500	−500
Камп	0	−400

<u>I начин:</u> Приход туристичкој агенцији од једног ђака 1. разреда је $(600-500+0)$ динара, а од једног ђака 2. разреда је $(800-500-400)$ динара. Пошто на екскурзију иде 67 ђака 1. разеда, и 39 ђака 2. разреда, имамо да је укупан приход туристичке агенције:

$$[67\cdot(600-500+0)]+[39\cdot(800-500-400)]=$$
$$=[67\cdot(100)]+[39\cdot(-100)]=100\cdot 67-100\cdot 39=100\cdot(67-39)$$
$$=100\cdot(28)=28\cdot 100=\mathbf{2\,800}\text{ динара.}$$

<u>II начин:</u> Приход од уплате је $67\cdot 600+39\cdot 800$. Приход за транспорт је $(67+39)\cdot(-500)$ динара, а приход за камп је $67\cdot 0+39\cdot(-400)$ динара. Укупан приход туристичке агенције је:

$$[67\cdot 600+39\cdot 800]+[(67+39)\cdot(-500)]+[67\cdot 0+39\cdot(-400)]=$$
$$=[40\,200+31\,200]+[(106)\cdot(-500)]+[0+(-15\,600)]=$$
$$=[71\,400]+[-53\,000]+[-15\,600]=71\,400-53\,000-15\,600=\mathbf{2\,800}\text{ динара.}$$

ЗАДАЦИ

79. Колико је $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)$? Израчунај $5\cdot(-1)$.

80. Ако је x природан број, да ли су изрази $x\cdot(-1)$ и $1\cdot(-x)$ једнаки?

81. Користећи правило множења бројем -1, израчунај:

а) $4\cdot(-2)$; б) $7\cdot(-5)$; в) $(-13)\cdot 6$; г) $(-23)\cdot 10$.

82. Допуни табелу:

x	3	4	5	6	(-1)	(-2)	(-3)	(-4)
y	(-11)	(-10)	(-9)	(-8)	7	8	9	0
$x\cdot y$								

83. У празна поља табеле упиши производ одговарајућих бројева у табели:

$\cdot$	(-9)	(-8)	(-7)	(-6)	(-5)
(-2)					
(-4)					
(-6)					
(-8)					
(-10)					

84. Уместо x напиши одговарајући број, тако да се добије тачна једнакост:

а) $x\cdot(-1)=-14$; б) $x\cdot(-3)=24$; в) $(-6)\cdot x=30$; г) $(-12)\cdot x=(-72)$.

85. Производ два цела броја је 77. Колики је збир њихових апсолутних вредности?

86. Израчунај производ четири узастопна цела броја, од којих је највећи једнак:

а) -2; б) 0; в) 4; г) 7.

87. Ако је $|x|\cdot|y|=4$, колико различитих вредности израза $x+y$ можемо добити?

88. Израчунај производ свих целих бројева већих од (-17) и мањих од 11.

89. Да ли је $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ \dots\ \cdot(-99)\cdot(-100)$ позитиван или негативан број?

90. На колико начина се број 5 може приказати као производ 3 различита цела броја?

91. Израчунај $1+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\ \dots\ \cdot(-1)\cdot(-1)$ (производ садржи 2023 пута број -1).

92. Производ неколико узастопних целих бројева је 24. О којим бројевима је реч? Колико има решења?

93. Производ три различита цела броја је 0, а њихов збир је 1. О којим бројевима је реч, ако је један од њих једнак 11?

1.8. Дељење целих бројева

Подсетимо се: узајамног односа између операције множења и дељења.

Ако је $c = a \cdot b$, тада:

број a називамо **чинилац**,
број b називамо такође **чинилац**, а
број c називамо **производ**,

али ако је $b \neq 0$, уједно важи и да је $a = c : b$. Тада:

број c називамо **дељеник**,
број b називамо **делилац**, а
број a називамо **количник**.

Прекопирајмо сада таблицу множења из лекције 1.7, али тако да је преврнемо „наглавачке" и напишимо је на два различита начина, користећи једнакости $c = a \cdot b$ и $a = c : b$ наравно ако је $b \neq 0$. Дакле:

назив **чинилац** $\boldsymbol{a}$, преименуј у назив **количник** $\boldsymbol{c : b}$, уз услов $b \neq 0$,
назив **чинилац** $\boldsymbol{b}$, преименуј у назив **делилац** $\boldsymbol{b}$, уз услов $b \neq 0$ а,
назив **производ** $\boldsymbol{a \cdot b}$, преименуј у назив **дељеник** $\boldsymbol{c}$,

и направимо две истоветне таблице. Леву ћемо назвати **таблица множења**, а доњу десну **таблица дељења**.

Чинилац	a	a	$-a$	$-a$
Чинилац	b	$-b$	b	$-b$
Производ	$a \cdot b$	$-(a \cdot b)$	$-(a \cdot b)$	$a \cdot b$

(таблица множења)

Производ	$a \cdot b$	$-(a \cdot b)$	$-(a \cdot b)$	$a \cdot b$
Чинилац	b	$-b$	b	$-b$
Чинилац	a	a	$-a$	$-a$

↓ **преименуј**

Дељеник	c	c	$-c$	$-c$
Делилац	b	$-b$	b	$-b$
Количник	$c : b$	$-(c : b)$	$-(c : b)$	$c : b$

(таблица дељења $b \neq 0$)

Јасно је да од таблице множења увек можемо направити таблицу дељења и обрнуто. То је зато што су множење и дељење операције које су повезане, као што смо у примеру видели. И као што смо могли да изкажемо правила за множење бројева истог или супротног предзнака, тако и за дељење можемо исказати слично правило.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

А) Количник је позитиван када су дељеник и делилац истог предзнака.
Б) Количник је негативан када су дељеник и делилац супротног предзнака.
Или укратко за $b \neq 0$:

$$c : b = (-c) : (-b)$$
$$-c : b = c : (-b) = -(c : b),$$

што је истоветно ономе што је исказано таблицом дељења у горњој табели.

ПРИМЕР 1. Докажи: дељење бројем –1 је исто што и множење бројем –1, тј. $c : (-1) = c \cdot (-1)$.

РЕШЕЊЕ Кренимо од израза $c : (-1)$ и применимо познате особине.

$c : (-1) = -(c : 1)$ применили смо $c : (-b) = -(c : b)$ за $b = 1$

$= -c$ применили смо $c : 1 = c$

$= -(c \cdot 1)$ применили смо $c \cdot 1 = c$

$= c \cdot (-1)$ применили смо $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ за $a = c$ и $b = 1$

Уз помоћ овог примера, напишимо сада правила дељења за једноставне бројеве 0, 1 и –1.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

$c : 1 = c$	дељење бројем 1 је исто што и множење бројем 1
$c : (-1) = c \cdot (-1) = -c$	дељење бројем –1 је исто што и множење бројем –1
$c : c = 1$	дељење броја самим собом даје 1 (услов $c \neq 0$)
$c : (-c) = (-c) : c = -1$	дељење броја себи супротним бројем даје –1 (услов $c \neq 0$)
$0 : b = 0$	дељење нуле делиоцем $b \neq 0$, даје 0
$\cancel{c : 0}$ ← НЕ!	НИКАКО! Број 0 не може бити делилац.

ПРИМЕР 2. Израчунај:

а) $(-115) : 5$; б) $-144 : (-12)$; в) $5 \cdot (-15) : (-25)$.

РЕШЕЊЕ а) $(-115) : 5 = -(115 : 5)$ применили смо $(-c) : b = -(c : b)$

$= -(23)$

$= -23$

б) $-144 : (-12) = 144 : 12$ применили смо $(-c) : (-b) = c : b$

$= 12$

в) $5 \cdot (-15) : (-25) = [5 \cdot (-15)] : (-25)$ рачунамо слева надесно, дакле прво множење

$= [-(5 \cdot 15)] : (-25)$ применили смо $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

$= [-75] : (-25)$

$= 75 : 25$ применили смо $(-c) : (-b) = c : b$

$= 3$

ПРИМЕР 3. Здравко има 6 000 динара, а жели да купи таблет рачунар за 10 000 динара и електронску оловку за 2 000 динара. У продавници су му рекли да 6000 динара може да плати одмах, а да остатак може да плаћа током целе следеће године у једнаким месечним ратама. Колики ће бити Здравков месечни дуг?

РЕШЕЊЕ Здравков збир прихода и расхода је 6 000 – 10 000 – 2 000 динара, и треба да га подели у 12 месечних рата. Месечна рата се добија када збир прихода и расхода поделимо на 12 месеци.

Дакле, Здравкова месеча рата је негативна, тачно –500 динара, што значи да Здравко треба месечно да исплаћује дуг од 500 динара продавници.

ЗАДАЦИ

94. Израчунај:

а) $(-7) : 1$; б) $7 : (-1)$; в) $(-7) : 7$,

95. Ако је n природан број, колико је:

а) $n : (-1)$; б) $(-n) : 1$; в) $(-n) : (-1)$?

96. Користећи чињеницу да је дељење са (-1) исто што и множење са (-1), израчунај:

а) $23 : (-1)$; б) $(-14) : (-1)$; в) $(9 - 15) : (-1)$; г) $(-13) - (-5) : (-1)$.

97. Израчунај: а) $4 : (-2)$; б) $27 : (-3)$; в) $(-16) : 4$; г) $(-24) : 6$.

98. Користећи таблицу дељења целих бројева, допуни табелу:

x	12	14	(–16)	(–18)	(–20)	(–22)	(–24)	(–26)
y	(–3)	(–2)	(–8)	(–6)	5	11	12	13
$x : y$								

99. Да ли је $(-1) : 1 = 1 : (-1) = -1 : 1 = -1$?

100. Израчунај: а) $(-14) : (-7)$; б) $(-36) : (-9)$; в) $(-51) : (-3)$; г) $(-35) : (-7)$.

101. Шта је веће: $(-100) : 50$ или $25 : (-5)$?

102. Уместо x напиши одговарајући број, тако да се добије тачна једнакост:

а) $x : (-1) = -14$; б) $x : (-3) = 8$; в) $(-6) : x = 3$; г) $(-12) : x = (-4)$.

103. У празна поља табеле упиши количник одговарајућих бројева у табели ако је дељеник у првом хоризонталном реду, а делилац у првој вертикалној колони:

:	(–12)	8	(–14)	28	(–50)
1	–12				
(–1)					
2				14	
(–2)		–4			

104. Анка је на табли написала један цео број различит од нуле. Бранка је тај цео број поделила са њему супротним бројем и на табли написала резултат. Који број је записала Бранка?

105. Колико пута је је производ четири највећа негативна цела броја већи од збира три најмања природна броја?

106. Израчунај вредност израза: $[(-12) : (-4)] \cdot [(-18) : 6]$.

107. Колико је: $(-1) : (-1) : (-1) : (-1) : (-1) : (-1) : (-1)$?

108. Израчунај: $[(-7) \cdot (-8) \cdot (-9)] : [(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)]$.

109. Израчунај: вредност израза $a : 3 + (-4)$, ако је: а) $a = 6$; б) $a = 0$; в) $a = -18$.

САЖЕТАК
ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

ЦЕЛИ БРОЈЕВИ:

$Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ Скуп целих бројева Z чине негативни бројеви, нула, и позитивни бројеви. Негативни бројеви се пишу са предзнаком минус „–".

СУПРОТНИ БРОЈЕВИ:

n и $-n$	Супротни бројеви имају различите предзнаке.
$0 = -0$	Број 0 је сам себи супротан.
$\lvert n\rvert = \lvert -n\rvert$	Супротни бројеви имају исту апсолутну вредност, тј. једнако су удаљени од броја 0.

ПРАВИЛА САБИРАЊА:

$a + b = b + a$	Комутативност сабирања. Сабирци могу мењати места.
$a + (b + c) = (a+b) + c$	Асоцијативност сабирања. Сабирци се могу произвољно груписати.
$a + 0 = 0 + a = a$	Нула је неутрални елемент сабирања.

ОДУЗИМАЊЕ НЕГАТИВНИХ БРОЈЕВА:

$a + (-b) = a - b$
$-b + a = a - b$

Сабирање броја $-b$ је исто што и одузимање броја b.

ОСЛОБАЂАЊЕ ЗАГРАДА:

$+(a + b) = +a + b$
$+(a - b) = +a - b$

Кад је испред заграде „+", заграду обриши, а предзнаке упиши.

$-(a + b) = -a - b$
$-(a - b) = -a + b$

Кад је испред заграде „–", заграду обриши, а предзнаке супротнима замени.

ПРАВИЛА МНОЖЕЊА И ДЕЉЕЊА:

$a \cdot b = b \cdot a$	Комутативност множења. Чиниоци могу мењати места.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Асоцијативност множења. Чиниоци се могу произвољно груписати.
$a \cdot 1 = a : 1 = a$	Број 1 је неутрални елемент множења.
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	Множење нулом.
$a \cdot (-1) = a : (-1) = -a$	Множење или дељење бројем -1.
$\cancel{c:0} \leftarrow$ НЕ	Никако! Број 0 не може бити делилац.

ДИСТРИБУТИВНОСТ МНОЖЕЊА ПРЕМА САБИРАЊУ И ОДУЗИМАЊУ:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

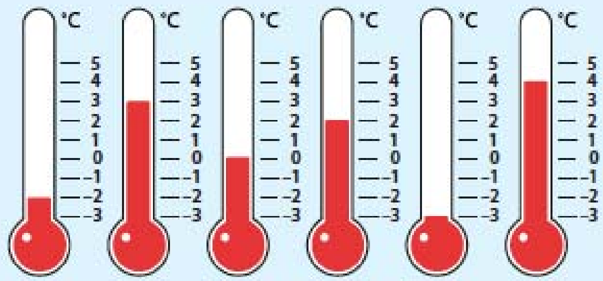
110. Одреди тројку природних бројева (p, n, s) коју чине број p – претходник природног броја n, природан број n и број s – следбеник природног броја n, ако је:

а) $p = 13$; б) $n = 55$; в) $s = 222$;
г) $p + n = 999$; д) $n + s = 2023$.

111. Збир претходника природног броја n, природног броја n и следбеника природног броја n је 333. Израчунај број n.

112. Прочитај температуру на датим термометрима:

А Б В Г Д Ђ



113. Који цео број не припада ни скупу Z^-, ни скупу Z^+?

114. Допуни наредну табелу знацима $\in$ или $\notin$, ако се зна да скупу A припадају негативни цели бројеви, скупу B ненегативни цели бројеви, а скупу C позитивни цели бројеви.

	–7	3	–2	4	0	–9	5	–6	10
A	$\in$				$\notin$				
B		$\in$							
C							$\in$		

115. Дат је скуп $A = \{-12, -7, -26, 0, -73\}$. Одреди скуп S кога чине следбеници бројева из скупа A.

116. Јединична дуж бројевне праве је 0,5 cm. Колико је растојање између тачака C и D којима су одређени цели бројеви –17 и 13.

117. На бројевној правој су дате тачке A и B којима одговарају цели бројеви –2 и 2. Одреди тачке које одговарају целим бројевима 0, –3, 4, –6.

118. На бројевној правој су дате тачке A и B, којима одговарају цели бројеви –4 и 1. Тачке A_1 и B_1 су централносиметричне са тачкама A и B у односу на тачку O којој одговара цео број 0. Одреди целе бројеве који одговарају тачкама A_1 и B_1.

119. Дат је скуп $A = \{-7, 8, -13, -26, 35\}$. Одреди елементе скупа B, ако скуп B чине бројеви супротни елементима скупа A.

120. На бројевној правој одреди бројеве (тачке) које представљају бројеве супротне бројевима: 3, 4, –6 и 2.

121. Који је број сам себи супротан?

122. Одреди скуп A кога чини 7 узастопних целих бројева од којих су 4 негативна и скуп B кога чини 8 узастопних парних целих бројева од којих су 5 позитивни.

123. Дат је скуп $S = \{-11, 12, -5, 28, 11, -41, -12, 5\}$. Одреди елементе скупа T кога чине асолутне вредности бројева из скупа S.

124. Израчунај: $|-1| + |-2| + |-3| + \ldots + |-9| + |-10|$.

125. Одреди вредност израза:
$|-12| - |-11| + |-10| - |-9| + \ldots + |-2| - |-1|$.

126. Покажи да за сваки цео број a важи неједнакост: $|a| + |-a| \geq 0$. Када важи једнакост?

127. Да ли за сваки цео број a, важи једнакост $|a| - |-a| = 0$?

128. Одреди све целе бројеве a такве да број $|a|$ није природан број.

129. На бројевној правој, означи тачке које одговарају бројевима –5, 6, –1, 0 и 3, па затим дате бројеве поређај редом од најмањег до највећег.

130. Без означавања бројева на бројевној правој, поређај бројеве –9, 56, –24, 0, 13, –17, 26 и –45 од најмањег ка највећем.

131. Дат је скуп $S = \{-11, 12, -5, 28, 34, -41, -100, 3\}$. Одреди подскуп A скупа S кога чине позитивни бројеви из S и подскуп B скупа S кога чине негативни бројеви из S. Одреди скупове $A \cup B$ и $A \cap B$.

132. Колико има негативних целих бројева који су већи од –5?

133. Уместо * напиши једну од могућих цифара тако да буду тачне неједнакости:

а) –56* > –563; б) –47 < –4*;
в) –32* > –321; г) –25* < –258.

134. Дата је неједнакост (–2023) ≤ (–202*) где је * непозната цифра. Колико вредности може узети * тако да дата неједнакост буде тачна?

135. Упореди целе бројеве x и y, ако је $3 \leq x < 8$ и $-11 < y \leq 1$.

136. Да ли је тачно тврђење: Сваки позитиван број већи је од ма ког негативног броја?

137. Користећи правила сабирања изврши следеће рачунске операције:

а) 7 + (–3); б) (–5) + 11;
в) (–10) + (–7); г) (–17) + 17.

138. Допуни табелу:

x	3	4	5	6	(–1)	(–2)	(–3)	(–4)
y	(–11)	(–10)	(–9)	(–8)	7	8	9	0
$x + y$								

139. Користећи бројевну праву, тј. кретање у позитивном и негативном смеру израчунај:

а) 7 + (–9) + 5; б) (–4) + 12 + (–15);
в) (–2) + (–4) + (–6); г) (–6) + (–8) + 10.

140. Дати су изрази: $a = 1 + (-2) + 3$; $b = (-4) + 5 + (-6)$; $c = (-16) + 7$ и $d = 8 + (-5)$. Израчунај вредност сваког од датих израза, упореди их и поређај у растући низ.

141. Користећи законе који важе за сабирање упрости изразе и израчунај вредност следећих израза:

а) (–13) + (–7) + 13; б) 24 + 16 + (–24);
в) 5 + (–14) + 9.

142. Јутарња температура је била –3 °C, а у току дана је порасла 7 °C. Колика је температура била увече?

143. Водостај реке Саве је у септембру био –56 cm. У октобру су пале кише и водостај је порастао за 220 cm. Колики је у октобру био водостај реке Саве?

144. Сабери све целе бројеве веће од –4 и мање од 3.

145. Колики је збир 17 узастопних целих бројева, међу којима је једнак број позитивних и негативних бројева?

146. Колико узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 3?

147. Користећи бројевну праву израчунај:
а) 17 – (–12); б) (–16) – 5;
в) (–14) – (–9); г) 6 – 13.

148. Колико је: а) (–1) – 2 – (–3) – 4 – (–5) – 6;
б) 10 – (–9) – 8 – (–7) – 6 – (–5)?

149. Дати су изрази: $a = 1 - (-2) + 3$; $b = (-4) - 5 - (-6)$; $c = (-16) - 7$ и $d = 8 - (-5)$. Израчунај вредност сваког од датих израза, упореди их и поређај у растући низ.

150. Уместо * напиши одговарајуће бројеве тако да су тачне једнакости:

а) 7 – * = 2; б) * – (–12) = 0;
в) 6 – * = (–11); г) * – (–3) = (–10).

151. Разлика два супротна броја је –14. О којим бројевима је реч?

152. Израчунај збир и разлику највећег негативног и најмањег позитивног целог броја?

153. Дати су цели бројеви (–13) и (–7). Израчунај:
а) њихов збир; б) њихову разлику;
в) збир њиховог збира и разлике;
г) разлику њиховог збира и разлике;
д) разлику њихове разлике и збира.

***154.** Разлика умањеника и разлике два цела броја је 17. Колики је умањилац?

***155.** Збир разлике и умањиоца два цела броја је –14. Колики је умањеник?

***156.** Збир умањеника, умањиоца и разлике је 10, а збир умањеника и разлике је (–2). Одреди умањеник, умањилац и разлику.

157. Збир два цела броја је (–5), а њихова разлика 9. О којим бројевима је реч?

158. На колико начина се број (–4) може приказати као производ два цела броја?

159. Користећи таблицу множења целих бројева, израчунај:
а) $(-4)\cdot(-7)$; б) $(-3)\cdot(-8)$;
в) $(-11)\cdot(-6)$; г) $(-5)\cdot(-9)$.

160. Ранко је написао један цео број. Смиљка је написани број помножила са њему супротним бројем и као производ добила број -36. Који број је записао Ранко?

161. Производ два цела броја је -39. Колики је збир та два броја? Колико има решења?

162. Израчунај производ целих бројева:
а) $(-1)\cdot(-2)\cdot 7$; б) $8\cdot(-3)\cdot(-2)$;
в) $4\cdot 5\cdot(-6)$; г) $(-3)\cdot 2\cdot(-10)$.

163. Допуни таблицу:

x	2	3	(–1)	(–2)	(–3)	(–4)	(–5)
y	(–10)	(–9)	(–8)	7	8	9	0
z	(–1)	(–2)	(–3)	1	2	3	4
$x\cdot y\cdot z$							

164. Израчунај производ три узастопна цела броја, ако је најмањи од њих једнак:
а) -5; б) -2; в) 0; г) 4.

165. У току једног месеца кафић је 18 дана пословао са приходом од по 12 000 динара по дану, а 13 дана са губитком од 7 000 динара по дану. Колики је салдо кафића у току тог месеца?

166. Уместо звездице напиши одговарајући цео број тако да су тачни искази:
а) $(-1)\cdot 7\cdot * = 14$; б) $*\cdot(-2)\cdot 3 = (-12)$;
в) $(-3)\cdot * \cdot(-5) = 30$.

167. Збир 7 узастопних бројева је 0. Колики је њихов производ?

168. Користећи законе за сабирање и множење целих бројева на најједноставнији начин израчунај:
а) $(-2)\cdot 2023\cdot(-5)$; б) $(-1)\cdot 27 + 99\cdot(-27)$;
в) $67 + (-3)\cdot 67 + (-2)\cdot(-67)$.

169. Производ $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \ldots \cdot(-1)\cdot(-1)$ садржи 11 чинилаца. Да ли је тај производ позитиван или негативан?

170. Израчунај бројевну вредност следећих израза:
а) $(-1)\cdot(-6):3$; б) $8:(-4)\cdot(-2)$;
в) $4\cdot 5:(-10)$; г) $(-15):3\cdot(-4)$.

171. Израчунај вредност израза:
$120:(-4):(-3):(-2):(-1)$.

172. Одреди $x:y$, ако је $x = 7 + 8 + 9$, а
$y = (-1) + (-2) + (-3)$.

173. Одреди вредност израза: $[(-8)\cdot(-5)]:[(-10):2]$.

174. Израчунај вредност израза: $|a| - |-a|$.

175. Може ли збир три узастопна цела броја бити 2?

176. Колико најмање узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 101?

177. Може ли цео број бити већи од своје апсолутне вредности?

178. За $x = -1$ и $y = -5$ израчунај вредност израза:
$|x - y| + 2|y| - |x + y|$.

179. Израчунај: $|1 - 2| + |3 - 4| + |5 - 6| + \ldots$
$\ldots + |2\,021 - 2\,022| + |2\,023 - 2\,024|$.

180. Ако је $x = 5$, израчунај:
$|x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 100|$.

181. Израчунај збир десет узастопних целих бројева ако су:
а) само четири броја позитивна;
б) само три броја негативна.

***182.** Могу ли се у следећим једнакостима звездице заменити знацима „+” или „–” тако да се добију тачне једнакости:
а) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0$;
б) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0$?

***183.** Колико је:
а) $(-25) + (-24) + \ldots + 28 + 29$;
б) $(-85) + (-84) + \ldots + 87 + 88$?

***184.** Упореди целе бројеве a и b ако је:
$a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 + 101$ и
$b = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + 97 - 99 + 101 - 103$.

***185.** Реши по x следеће једначине:
а) $(-10) + (-9) + \ldots + (x-1) + x = -45 \quad (x \in Z)$;
б) $x + (x+1) + \ldots + 17 + 18 = 51 \quad (x \in Z)$.

186. Збир 2 023 узастопна цела броја једнак је 0. О којим бројевима је реч ?

***187.** Збир неколико узастопних целих бројева је 25. О којим бројевима је реч?

188. Збир 10 узастопних целих бројева је 15. Који су то бројеви?

***189.** Постоје ли 2 022 узастопа цела броја таква да је њихов збир једнак: а) 2 021; б) 2 022; в) 2 023.

***190.** На табли су написани бројеви −6, −5, −4, −3, −2, −1. Дозвољено је у једном кораку било која два броја увећати за по 1. Да ли се, после извесног броја корака, могу добити сви једнаки бројеви?

191. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x + y = -17$ и $x - y = 6$?

***192.** Упореди целе бројеве a и b ако је:
$a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$
$\ldots + 2019 - 2020 + 2021 - 2022$ и
$b = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 2018 - 2020 + 2022$.

193. Одреди све узастопне целе бројеве тако да је њихов збир −35.

194. На кружници је записано шест целих бројева. Сваки од њих је једнак апсолутној вредности разлике два броја који су на кружници његови претходници. Одреди записане бројеве и њихов распоред на кружници, ако је збир свих шест бројева једнак 4.

***195.** Може ли збир 2 023 узастопна цела броја бити 2 023?

196. Колико пута број (−2) треба помножити самим собом да би добијени производ био: а) (−32); б) 256.

197. Одреди пет различитих целих бројева чији је производ једнак 12.

198. Дат је скуп $A = \{-17, -16, \ldots 19, 20\}$ који је подскуп скупа целих бројева. Израчунај:
а) збир елемената скупа A;
б) производ елемената скупа A.

***199.** Колико решења има једначина $x \cdot y = 6$, ако су x и y:
а) природни бројеви;
б) цели бројеви?

200. Може ли производ три узастопна цела броја бити: а) (−1); б) 0? Наброј могуће примере.

201. Може ли производ 4 узастопна цела броја бити 120? О којим бројевима је реч?

202. Одреди све целе бројеве x и y такве да је: $x \cdot x \cdot |y| = 96$.

***203.** У изразу $(-1) * (-2) * (-3) * (-4) * (-5)$ замени симбол * симболима операција +, −, · и : тако да вредност добијеног израза буде:
а) 19; б) 14; в) −4.

***204.** Да ли је могућа једнакост:
$(-19) \cdot (-18) \cdot \ldots \cdot (-12) \cdot (-11) = 1234567890$?

***205.** Да ли је могућа једнакост:
$(-19) \cdot (-18) \cdot \ldots \cdot (-11) \cdot (-10) = 12345678900$?

206. Количник два цела броја је −6. Може ли њихов производ бити −345?

207. На кружници је написано девет целих бројева тако да је њихов производ 1. Одреди о којим се бројевима ради и какав је њихов распоред ако је сваки број на кружници једнак количнику два претходна броја. Колико различитих решења има дати задатак?

***208.** Одреди цео број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 даје остатак 1 и који има најмању могућу апсолутну вредност.

209. Може ли се из скупа $\{-8, -7, -6, \ldots, 7, 8, 9\}$ изоставити један елеменат тако да се елементи новог скупа могу поделити на два дисјунктна подскупа, при чему је производ бројева у сваком од дисјунктних подскупова једнак?

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Вредност израза $7-9$ је 2.	тачно	нетачно
2. Збир три највећа негативна цела броја је -6.	тачно	нетачно
3. Апсолутна вредност броја -5 је 5.	тачно	нетачно
4. Разлика следбеника и претходника сваког целог броја је 2.	тачно	нетачно
5. Вредност израза $7\cdot(-2)$ је 14.	тачно	нетачно
6. Производ три негативна цела броја је позитиван број.	тачно	нетачно
7. Количник $(-36):(-4)$ је 9.	тачно	нетачно
8. Збир целог броја и њему супротног броја је 7.	тачно	нетачно
9. Производ броја и њему супротног целог броја је природан број.	тачно	нетачно
10. Ако цео број x није 0, онда је $x:(-x)=-1$.	тачно	нетачно
11. Збир решења једначине $\|x\|=5$ је -5.	тачно	нетачно
12. Производ решења неједначине $\|y\|<6$ је 0.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. Збир претходника и следбеника броја (-7) је:

А) 0; Б) 12; В) -13; Г) 14; Д) -14.

2. Вредност израза $(-7)+3-(-5)$ је:

А) 1; Б) -1; В) -15; Г) 15; Д) -9.

3. Производ бројева (-2), 5 и (-8) је:

А) 56; Б) -60; В) 80; Г) -56; Д) -80.

4. Вредност израза $(-72):4+6\cdot(-3)$ је:

А) 20; Б) 36; В) 0; Г) -36; Д) -20.

5. Дати су цели бројеви (-2), (-1), 0, 1, 2, 3, 4. Разлика производа и збира датих бројева је:

А) 7; Б) -7; В) -6; Г) 6; Д) -5.

6. Збир 5 највећих негативних целих бројева је:

А) 10; Б) -12; В) -15; Г) -21; Д) -10.

7. На колико начина се број 6 може написати као производ два цела броја?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4; Д) 5.

8. Вредност израза $128:(-2):(-4):(-8)$ је:

А) 2; Б) -2; В) -4; Г) 4; Д) -1.

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

Негативни бројеви
Цели бројеви
Скуп целих бројева
Бројевна права
Супротни бројеви
Апсолутна вредност
Комутативност
Асоцијативност
Неутрални елемент
Множење бројем „–1”
Дистрибутивност

ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

1.1.	Напиши 10 узастопних целих бројева, од којих су само три позитива.	15
1.2.	Одреди скуп A кога чине сви цели бројеви a, такви да је $3 \leq \lvert a \rvert < 7$. Колики је збир елемената скупа A?	20
1.3.	Скуп X чине сви бројеви x такви да је $\lvert x \rvert < 8$. Скуп Y чине сви бројеви y такви да је $\lvert y \rvert \leq 3$. Одреди: а) Збир најмањег елемента скупа X и највећег елемента скупа Y; б) Разлику најмањег елемента скупа Y и највећег елемента скупа X.	25
2.1.	Израчунај вредност израза: $(-4) + 5 - 6 + (-7)$.	15
2.2.	Збир пет највећих негативних целих бројева је број x, а збир 4 најмања природна броја је број y. Израчунај вредност израза: $x + y$, $x - y$ и $y - x$.	20
2.3.	Одреди вредност израза: $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + ... + 2021 - 2023$.	25
3.1.	Одреди вредност израза: а) $(-8) \cdot [4 : (-2)]$; б) $[(-8) : 4] \cdot [(-2) : (-1)]$.	15
3.2.	Израчунај: а) $(-6) \cdot [7 - (-8) : 4]$; б) $(-2) \cdot \{3 - [-4 \cdot 5 + (-6)]\}$.	20
3.3.	Збир два или више узастопних целих бројева је (-4). а) Израчунај производ тих целих бројева, б) Колики је збир апсолутних вредности тих целих бројева?	25
4.1.	Температура ваздуха увече је била 5 °C. У току ноћи температура се смањила за 8 °C. Колика је ујутру била температура ваздуха?	15
4.2.	Дати су изрази: $A = [(-8) : 2 + 3 \cdot (-5) - (-9)]$ и $B = [(-8) : (-2)] \cdot (-6) + 3 - (-4)$. Поређај у растући низ бројеве: $\lvert A \rvert - B$, $A + \lvert B \rvert$, $\lvert A + B \rvert$ и $\lvert A - B \rvert$.	20
4.3.	На колико начина се број 15 може приказати као збир неколико узастопних целих бројева? Напиши све такве збирове.	25

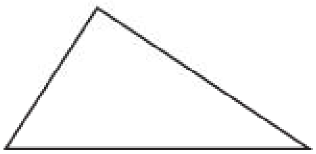
2 ТРОУГАО – *први део*

Геометрија је саставни део нашег живота. Геометријска тела и фигуре су свуда око нас. Колико пута сте само прошли поред саобраћајних знакова различитих облика и запитали се шта они значе? Они који су облика троугла представљају знакове упозорења.

У овој области упознаћемо се са особинама троугла и схватити да нема никакве опасности по нас. Напротив, то ће нам помоћи да много боље разумемо простор у коме живимо.

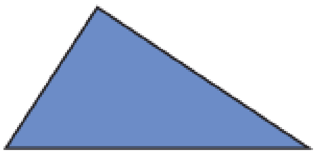
2.1. Основни елементи троугла

Подсетимо се: У 5. разреду смо се упознали са појмом многоугао (унија многоугаоне линије и њене унутрашње области).

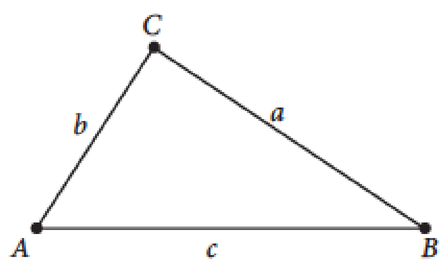


Троугаона линија

Троугао је унија троугаоне линије и њене унутрашње области.



Троугао



На слици је троугао ABC (обележава се ΔABC). Тачке A, B и C су темена троугла. За обележавање темена користе се велика штампана латинична слова. Обично редослед темена иде у позитивном смеру (супротно кретању казаљке на часовнику).

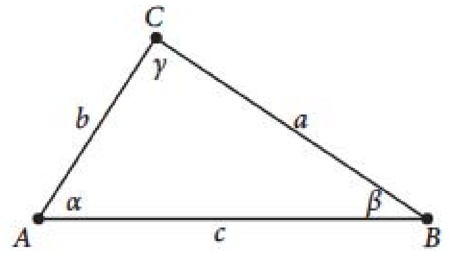
Дужи AB, BC и CA су **странице** троугла. Могу се користити и мала писана латинична слова да бисмо обележили страницу која се налази наспрам („преко пута”) одговарајућег темена. Дакле $\boldsymbol{AB = c}$, $\boldsymbol{BC = a}$, $\boldsymbol{CA = b}$.

Унутрашњи углови троугла су $\measuredangle CAB$, затим $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$. Уобичајено је да се за њихово обележавање користе мала слова грчког алфабета, па је $\measuredangle CAB = \alpha$, затим $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$. Такође, углове можемо означавати и користећи темена $\measuredangle A = \alpha$, затим $\measuredangle B = \beta$ и $\measuredangle C = \gamma$.

Сада имамо потпуну слику ΔABC.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Основни елементи сваког троугла су **странице и унутрашњи углови.**



Обим троугла

Подсетимо се: Обим многоугла је збир дужина страница тог многоугла.

Обим троугла је збир дужина страница тог троугла.

$$O = a + b + c$$

ПРИМЕР 1. Израчунај обим ΔABC, ако су дужине његових страница a = 3,4 cm, затим b = 2,8 cm и c = 4,5 cm.

РЕШЕЊЕ $O = a + b + c$ = 3,4 cm + 2,8 cm + 4,5 cm =10,7 cm

ПРИМЕР 2. Обим ΔABC је 39,3 cm. Страница a је најкраћа, а свака следећа страница је за 3,2 cm дужа од претходне. Одреди странице тог троугла.

РЕШЕЊЕ Страница b је дужа од a за 3,2 cm , па је $b = a$ + 3,2 cm. Страница c је дужа од b за 3,2 cm. Идеја нам је да све странице изразимо помоћу a, па можемо закључити да је c дуже од a за 6,4 cm, то јест: $c = a$ + 6,4 cm.

Сада имамо $a + b + c$ = 39,3 cm

a + (a + 3,2 cm) + (a + 6,4 cm) = 39,3 cm

$3 \cdot a$ + 9,6 cm = 39,3 cm

$3 \cdot a$ = 39,3 cm – 9,6 cm

$3 \cdot a$ = 29,7 cm

a = 29,7 cm : 3

a = **9,9 cm.**

Коначно, b = 9,9 cm + 3,2 cm = **13,1 cm,**

c = 9,9 cm + 6,4 cm = **16,3 cm.**

На часовима музичке културе је било речи о различитим музичким интрументима, па знаш да постоје жичани, дувачки, ударачки инструменти.

Најстарији инструменти су ударачки, а међу ударачке инструменте спада и триангл. Назив инструмента потиче од италијанске речи triangolo, што значи троугао. Триангл нема одређену висину тона. Троугластог је облика, тачније – облика је једнакостраничног троугла. Иако странице немају одређену дужину, оне не прелазе 35 cm. Као што видиш на слици, један угао овог троугла је отворен, а крајеви шипке на том углу су закривљени. Да је затвореног облика, челична шипка, од које је састављен, отежано би треперила и не би стварала звук какав ствара.

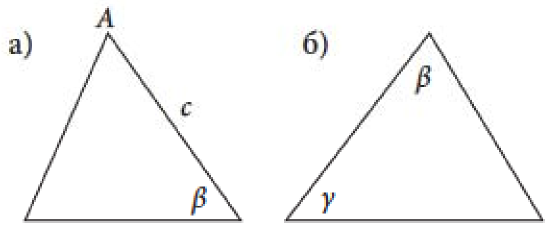

Триангл

Свира се ударањем челичним штапићем, а триангл је обешен канапом за један угао. Обично се оглашава у оркестру појединачним ударима. Ти су удари одвојени паузама.

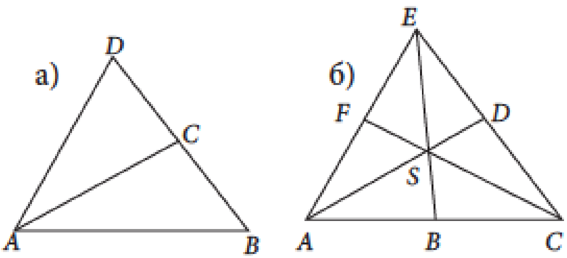
Овај музички инструмент је допуна оркестарском звуку, а нека солистичка музичка деоница за триангл је права реткост. Међутим, препоручујемо ти да преслушаш концерт за клавир у ес-дуру Франца Листа. Овај се концерт не би могао замислити без триангла.

ЗАДАЦИ

1. Обележи темена, странице и углове троуглова на наредним сликама:



2. Напиши све троуглове које уочаваш на наредној слици (десно):



3. На кружници k уочене су тачке M, N, P, Q и R. Колико има троуглова чија темена су дате тачке?

4. У троуглу KLM странице троугла су $KL = 11$ cm, $LM = 12$ cm и $MK = 13$ cm. Израчунај обим троугла KLM.

5. У троуглу DEF је страница $e = 24$ cm. Страница d је за 5 cm мања, а страница f је за 6 cm већа од странице e. Колики је обим троугла DEF?

6. На правој a дате су две, а на њој паралелној правој b дате су три тачке. Нацртај одговарајућу слику и преброј колико има троуглова чија темена су дате тачке?

7. У троуглу ABC, дужине страница су: $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm и $CA = 9$ cm. На страници AB одреди тачку M која обим троугла ABC дели на два једнака дела.

8. Обим троугла ABC је 75 cm, а мерни бројеви његових страница су:
а) три узастопна природна броја;
б) три узастопна непарна природна броја. Одреди странице троугла.

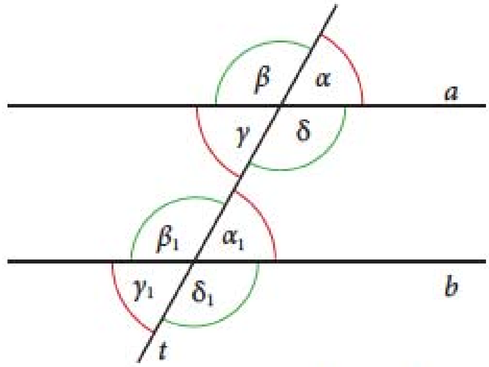
2.2. Унутрашњи углови троугла

Подсетимо се: На слици су паралелне праве a и b. Права t која их сече је њихова **трансверзала**. Углове на слици зваћемо **трансверзални углови** (**углови на трансверзали**).

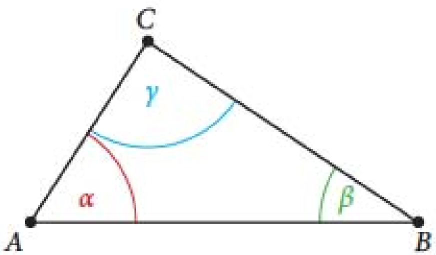
Унакрсни углови су једнаки (нпр. $\alpha = \gamma$)

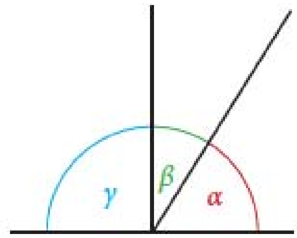
Сагласни углови су једнаки (нпр. $\alpha = \alpha_1$)

Наизменични углови су једнаки (нпр. $\gamma = \alpha_1$)



У 5. разреду смо учили сабирање и одузимање углова конструктивно. Нацртаћемо произвољан троугао и проверити колико износи збир његових унутрашњих углова.

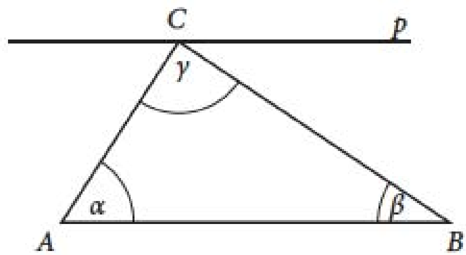




Видимо да је збир унутрашњих углова овог троугла 180°.

Да ли за сваки троугао важи да је збир унутрашњих углова једнак 180°? Уверићемо се да важи.

На слици је ΔABC. Конструишемо праву p која садржи тачку C и паралелна је са страницом AB. Продужимо странице AC и BC преко темена C и обележимо добијене углове са δ, ε и θ.



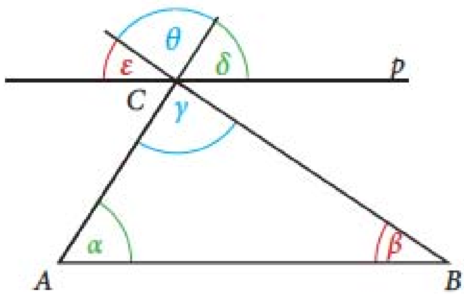
Праве AC и BC су трансверзале правих p и AB, то јест пресецају праве p и AB. Зато можемо приметити следеће:

$\alpha = \delta$ (углови на трансверзали, тј. сагласни углови),

$\beta = \varepsilon$ (углови на трансверзали, тј. сагласни углови),

$\gamma = \theta$ (унакрсни углови).

Пошто је $\delta + \theta + \varepsilon = 180°$, значи да је и $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Збир унутрашњих углова сваког троугла је 180°.

ПРИМЕР 1. У ΔABC дати су унутрашњи углови $\alpha = 86°$ и $\beta = 44°$. Одреди величину трећег унутрашњег угла тог троугла.

РЕШЕЊЕ Пошто је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то значи да је $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, то јест:

$\gamma = 180° - (86° + 44°)$

$\gamma = 180° - 130° = 50°$

Врсте троуглова према унутрашњим угловима

Подсетимо се: Знамо да је оштар угао мањи од 90°, прав угао једнак 90°, а туп угао већи од 90°, а мањи од 180°.

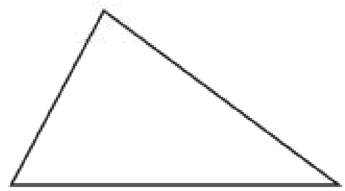
Да ли сва три унутрашња угла троугла могу бити оштра? А могу ли у троуглу бити два права угла? Или један прав и један туп угао?

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Сваки троугао мора имати бар два оштра унутрашња угла.

Према врсти највећег унутрашњег угла, разликујемо следеће троуглове:

Оштроугли троугао је троугао чија су сва три унутрашња угла оштра.



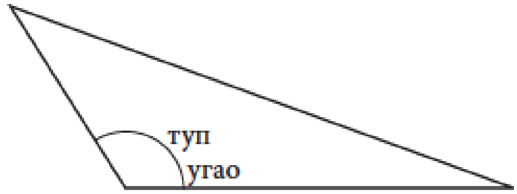
Правоугли троугао је троугао чија су два унутрашња угла оштра, а један угао је прав.

Странице које граде прав угао зову се **катете**, а трећа страница која је наспрам правог угла је **хипотенуза**. Пошто је $\gamma = 90°$, јасно је да је $\alpha + \beta = 90°$, што може поједноставити рачунање непознатог оштрог угла.

Напомена: Сигурно сте чули за Питагорину теорему која ће вам знатно помоћи у изучавању геометријских објеката. Она се односи на правоугли троугао, али имајте стрпљења до 7. разреда.

Грчка реч катета (katetos – καθετοξ) означава вертикално спуштен висак.
Грчка реч хипотенуза (ipoteino – υποτεινω) значи „затезати", то јест „затегнута". Овај назив заправо потиче од египатског начина конструкције правоугаоних троуглова помоћу затезања канапа.

Тупоугли троугао је троугао чија два унутрашња угла су оштра, а један туп.



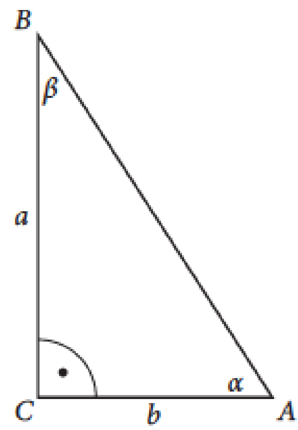
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Да бисмо, према унутрашњим угловима, одредили којој врсти припада троугао, довољно је проверити величину највећег унутрашњег угла.

У Примеру 1 највећи угао је био $\alpha = 86°$, дакле оштар, па је троугао у Примеру 1 оштроугли.

ПРИМЕР 2. Одреди унутрашње углове правоуглог троугла, ако је један оштар угао мањи од другог за 23°.

РЕШЕЊЕ Знамо да је $\gamma = 90°$, а β је мањи од α за 23°. Згодније је рећи да је α већи од β за 23°, тј. $\alpha = \beta + 23°$.



Сада имамо $\alpha + \beta = 90°$,

$$(\beta + 23°) + \beta = 90°$$
$$2 \cdot \beta + 23° = 90°$$
$$2 \cdot \beta = 67°$$
$$\beta = 67° : 2$$

Примећујемо да 67 није дељиво са 2, па је потребно 1° претворити у минуте. Настављамо:

$$\beta = 66°60' : 2 = 33°30'$$

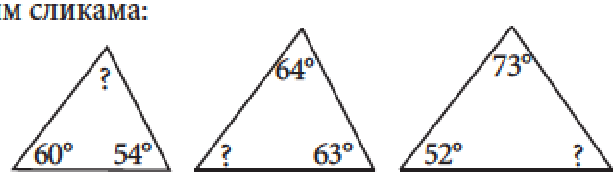
$$\alpha = 33°30' + 23° = 56°30'.$$

ЗАДАЦИ

9. Да ли постоје троуглови чији су унутрашњи углови: а) 55°, 66° и 59°; б) 71°, 61° и 51°?

10. У троуглу ABC, унутрашњи углови троугла су $\measuredangle ABC = 66°$ и $\measuredangle BCA = 77°$. Колики је $\measuredangle CAB$?

11. Израчунај непознате углове на следећим сликама:



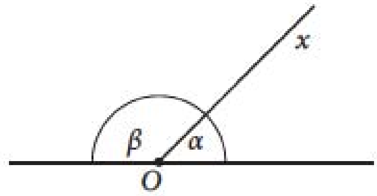
12. Одреди да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли, ако су два његова унутрашња угла једнака: а) 62° и 73°; б) 47° и 43°; в) 77° и 47°; г) 36° и 55°.

13. Углови троугла су x, $4x$ и $7x$. Какав је тај троугао: оштроугли или тупоугли?

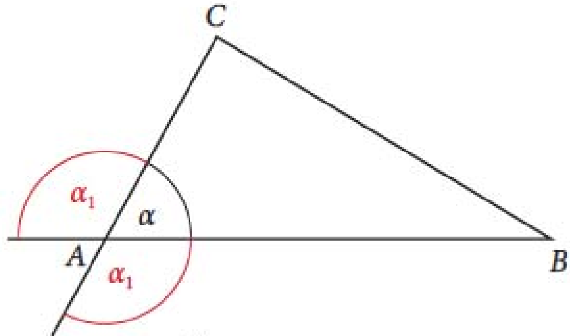
14. У троуглу ABC имамо $\alpha + \beta = \gamma$. Да ли је троугао правоугли? Зашто?

2.3. Спољашњи углови троугла

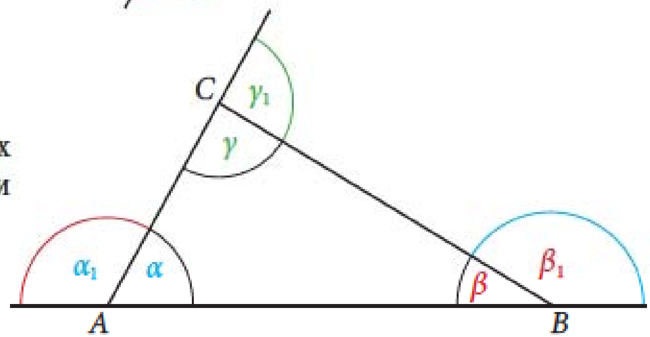
Подсетимо се: Два угла су **суплементна** ако им је збир 180°. Ако су уз то и суседни, за те углове кажемо да су **упоредни**. На слици су упоредни углови α и β.



Ако страницу AB троугла ABC продужимо преко темена A, посматраћемо угао који је допуна углу α до опруженог угла, то јест до 180°. Уобичајена ознака за тај угао је α_1. Угао α је унутрашњи угао троугла, а α_1 је одговарајући **спољашњи** угао. Приметимо да би потпуно исто било и да смо страницу CA продужили преко темена A.



Исто можемо урадити и код преосталих темена ΔABC и на тај начин добити **спољашње** углове β_1 и γ_1.



Спољашњи угао троугла је угао који је упоредан одговарајућем унутрашњем углу.

Унутрашњи углови су основни елементи троугла, али и спољашњи углови имају своју улогу у даљем изучавању троугла. Издвојићемо неколико битних особина.

Према ознакама на претходној слици, важе следеће једнакости:

$\alpha + \alpha_1 = 180°$; $\beta + \beta_1 = 180°$; $\gamma + \gamma_1 = 180°$.

Знамо да је збир унутрашњих углова троугла 180°. Да ли је и збир спољашњих углова увек исти?

Очигледно је: $(\alpha + \alpha_1) + (\beta + \beta_1) + (\gamma + \gamma_1) = 180° + 180° + 180°$

$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 = 540°.$$

Груписаћемо унутрашње и спољашње углове троугла.

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 540°$$
$$180° + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540°$$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540° - 180°$$
$$\mathbf{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°}$$

Збир спољашњих углова троугла је 360°.

Постоји још једна занимљива особина спољашњих углова.

Знамо да је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

а такође и $\alpha + \alpha_1 = 180°$.

Из ових једнакости закључујемо да је $\alpha_1 = \beta + \gamma$. Слично се може показати и за преостале спољашње углове троугла.

Дакле: $\alpha_1 = \beta + \gamma$

$\beta_1 = \alpha + \gamma$

$\gamma_1 = \alpha + \beta$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Сваки спољашњи угао троугла једнак је збиру два, њему несуседна, унутрашња угла.

Из ових једнакости следи да је спољашњи угао троугла већи од несуседног унутрашњег угла.

Да бисмо могли да одредимо свих шест углова троугла, треба да нам буду позната два унутрашња угла, или два спољашња угла или један унутрашњи и његов несуседни спољашњи угао.

ПРИМЕР 1. Одреди све углове ΔABC, ако је $\alpha = 56°$ и $\gamma_1 = 162°$.

РЕШЕЊЕ

$\alpha_1 = 180° - 56° = 124°$

$\gamma = 180° - 162° = 18°$

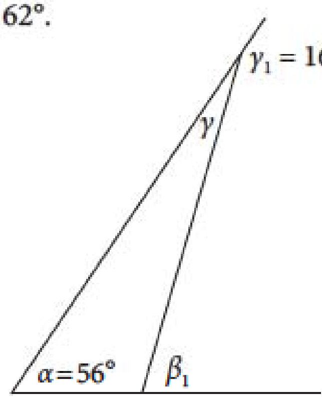
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$

$\beta = 180° - 74° = 106°$,

или: $\beta = \alpha_1 - \gamma$

$\beta = 124° - 18 = 106°$.

На крају: $\beta_1 = 180° - 106° = 74°$.



ПРИМЕР 2. У ΔABC спољашњи угао $\gamma_1 = 138°$, а унутрашњи угао β износи $\frac{2}{7}$ суседног спољашњег угла β_1. Којој врсти, према угловима, припада овај троугао?

РЕШЕЊЕ $\gamma = 180° - 138° = 42°$

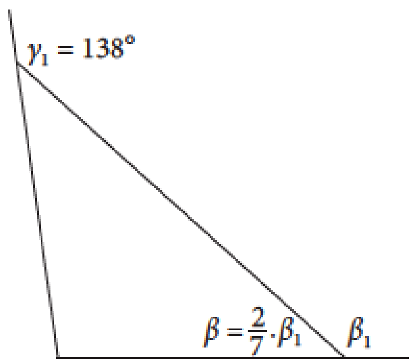
$$\beta + \beta_1 = 180°$$

$$\frac{2}{7} \cdot \beta_1 + \frac{7}{7} \cdot \beta_1 = 180°$$

$$\frac{9}{7} \cdot \beta_1 = 180°$$

$$\frac{1}{7} \cdot \beta_1 = 180° : 9 = 20°$$

$$\beta_1 = 7 \cdot 20° = 140°.$$



Следи $\beta = 180° - 140° = 40°$

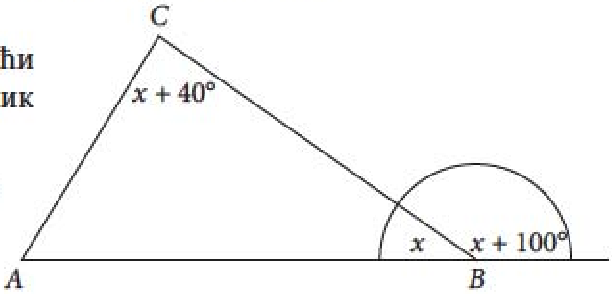
и $\alpha = 180° - (40° + 42°)$

$\alpha = 180° - 82°$

$\alpha = 98°$.

Пошто је највећи унутрашњи угао $\alpha = 98°$, закључујемо да је наш троугао тупоугли.

ПРИМЕР 3. Одреди унутрашње и спољашње углове троугла на слици.



РЕШЕЊЕ Знамо да је $\beta + \beta_1 = 180°$. Гледајући слику, ова једнакост добија облик $x + x + 100° = 180°$.

Даље решавамо на познат начин:

$$2 \cdot x + 100° = 180°$$
$$2 \cdot x = 80°$$
$$x = 40°.$$

Ово је био кључни део задатка, сада ћемо лако одредити тражене углове.

Унутрашњи углови су:

$\alpha = 60°$

$\beta = 40°$

$\gamma = 40° + 40° = 80°.$

Спољашњи углови су:

$\alpha_1 = 120°$

$\beta_1 = 140°$

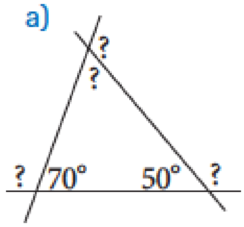
$\gamma_1 = 100°.$

ЗАДАЦИ

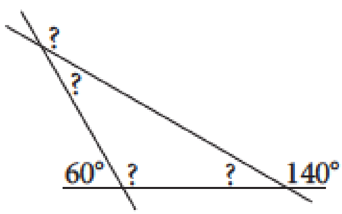
15. Да ли постоје троуглови чији су спољашњи углови:
а) 130°, 120° и 110°; б) 100°, 121° и 141°; в) 105°, 115° и 140° ?

16. Израчунај све непознате унутрашње и спољашње углове троуглова датих на следећим сликама:

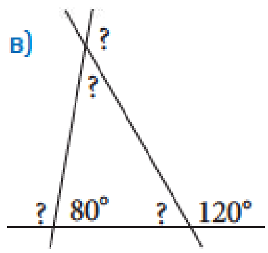
а)



б)



в)



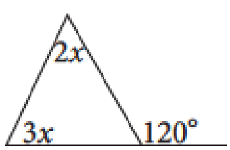
17. Израчунај трећи спољашњи и све унутрашње углове троугла, ако су два спољашња угла троугла једнака: а) 132° и 123°; б) 77° и 127°; в) 90° и 107°; г) 130° и 70°.

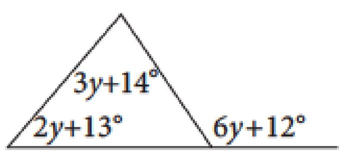
18. Израчунај спољашње и унутрашње углове троугла, ако су унутрашњи углови троугла једнаки $3y$, $4y$ и $5y$.

19. Спољашњи углови троугла су $4x$, $5x$ и $6x$. Да ли је троугао правоугли? Зашто?

20. Постоји ли троугао чији су спољашњи углови x, $4x$ и $7x$?

21. Користећи тврђење да је збир два унутрашња угла троугла једнак спољашњем несуседном углу одреди унутрашње и спољашње углове на следећим сликама:





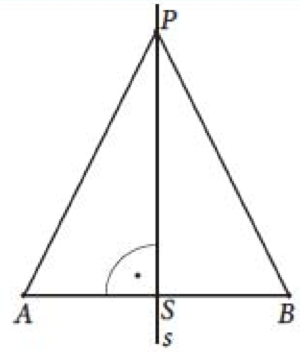
22. У троуглу ABC симетрала спољашњег угла α_1 и симетрала спољашњег угла β_1 секу се под углом од 50°. Одреди угао γ.

23. Постоји ли троугао чија су два спољашња угла оштра?

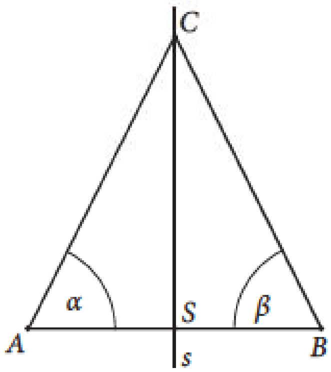
2.4. Однос страница и углова у троуглу

Издвојили смо странице и унутрашње углове као основне елементе троугла. Какви су њихови међусобни односи? Да ли дужине страница на неки начин утичу на величину унутрашњих углова, и обрнуто? Одговоре на та питања добићемо ускоро.

Подсетимо се: У 5. разреду смо се упознали са осном симетријом, а посебну пажњу смо посветили симетрали дужи. Знамо да је то права која садржи средиште дужи и нормална је на њу (сече је под правим углом). Такође, знамо да је свака тачка на симетрали дужи једнако удаљена од крајева те дужи.



На слици је права s симетрала дужи AB. Осном симетријом у односу на праву s тачка A се пресликава у тачку B, дуж AP у дуж BP, дуж AS у дуж BS, а $\measuredangle SAP$ у $\measuredangle SBP$. Пошто се угао осном симетријом пресликава у угао који му је једнак, закључујемо да је $\measuredangle SAP = \measuredangle SBP$.



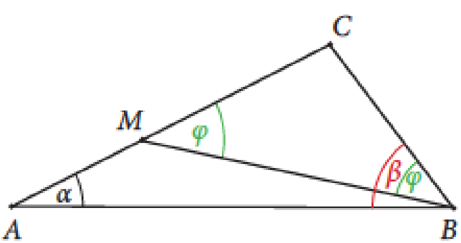
Ово нам помаже да дођемо до битне особине која важи за сваки троугао који има бар две једнаке странице.

У ΔABC на слици, странице AC и BC су једнаке, а права s је симетрала странице AB. Пошто знамо да све тачке које су једнако удаљене од A и B припадају симетрали s, значи да тачка C припада симетрали s. На основу закључка $\measuredangle SAC = \measuredangle SBC$ следи да је $\alpha = \beta$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Наспрам једнаких страница троугла налазе се једнаки унутрашњи углови.

Шта ако странице нису једнаке?



У ΔABC на слици је $AC > BC$. Тада постоји тачка M на страници AC, тако да је $CM = CB$. У ΔMBC су једнаки углови код темена M и B (угао φ на слици). Посматрајући теме B у ΔABC, јасно је да је $\beta > \varphi$. Угао φ (код тачке M) је спољашњи угао ΔABM, па је већи од несуседног унутрашњег угла, тј.

$$\varphi > \alpha.$$

Из две неједнакости ($\beta > \varphi$ и $\varphi > \alpha$) следи да је:

$$\beta > \alpha.$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

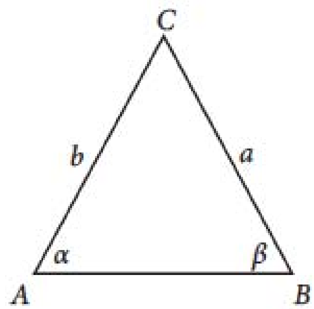
Наспрам веће странице троугла налази се већи унутрашњи угао.

Показаћемо да важе и обрнута тврђења.

Нека је у ΔABC на слици дато $\alpha = \beta$.

Није могуће да је $a > b$, зато што би онда морало бити $\alpha > \beta$. Такође, не може бити ни $a < b$, зато што то подразумева да је $\alpha < \beta$, а претпоставка је да је $\alpha = \beta$.

Дакле, ако је $\boldsymbol{\alpha = \beta}$, **мора бити** $\boldsymbol{a = b}$.



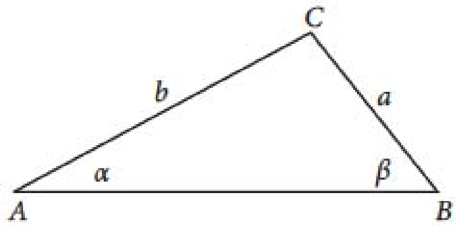
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Наспрам једнаких унутрашњих углова троугла налазе се једнаке странице.

Нека је у ΔABC на слици дато $\beta > \alpha$.

Није могуће да је $b = a$, зато што би онда морало бити $\beta = \alpha$. Такође, не може бити ни $b < a$, зато што то подразумева да је $\beta < a$, а претпоставка је да је $\beta > \alpha$.

Дакле, ако је $\boldsymbol{\beta > \alpha}$, **мора бити** $\boldsymbol{b > a}$.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Наспрам већег унутрашњег угла троугла налази се већа страница.

Ово нам помаже да сазнамо још нешто о правоуглом троуглу. Пошто је прав угао највећи угао правоуглог троугла, следи да је страница наспрам њега најдужа.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Хипотенуза је најдужа страница правоуглог троугла.

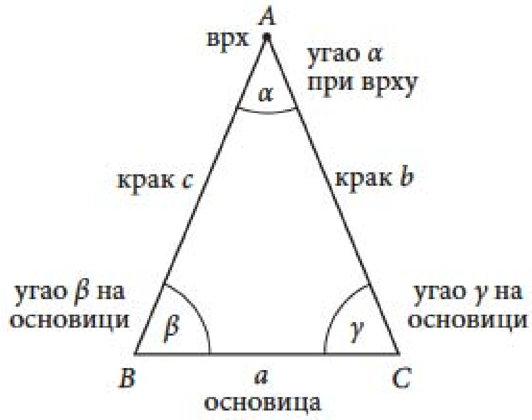
ПРИМЕР 1. У ΔABC је $\alpha = 68°$, $\beta = 50°$. Поређај странице овог троугла по величини.

РЕШЕЊЕ Прво морамо израчунати трећи унутрашњи угао.

$\gamma = 180° - (68° + 50°)$
$\gamma = 180° - 118°$
$\gamma = 62°$

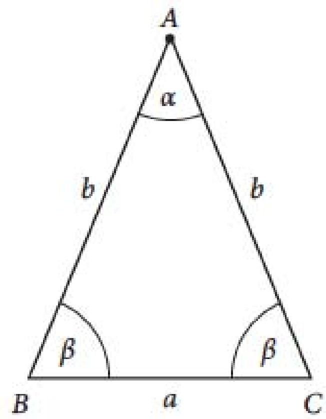
Пошто је $\alpha > \gamma > \beta$, то значи да је $a > c > b$.

Једнакокраки троугао



Једнакокраки троугао је троугао који има две једнаке странице.

На слици је једнакокраки ΔABC где је $AB = AC$. Једнаке странице су **краци**, а трећа страница је **основица**. Теме наспрам основице је **врх једнакокраког троугла**, а унутрашњи угао код тог темена зове се **угао при врху**.



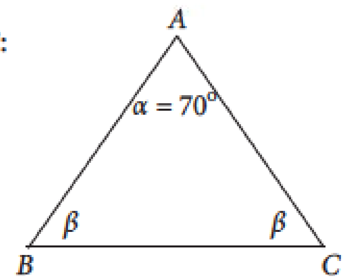
На основу закључка да се **наспрам једнаких унутрашњих углова троугла налазе једнаке странице, кажемо да су углови на основици једнакокраког троугла једнаки** (на слици $\beta = \gamma$).

Уобичајено је да једнаке елементе троугла обележимо истим словом, па бисмо једнакокраки троугао могли да представимо као на слици.

ПРИМЕР 2. У једнакокраком троуглу угао при врху је 70°. Одреди величину угла на основици.

РЕШЕЊЕ Користећи ознаке са претходне слике, $\alpha = 70°$:

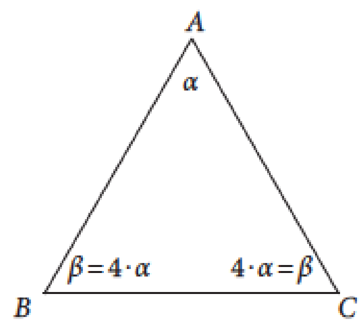
$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180°$$
$$2 \cdot \beta = 180° - 70°$$
$$2 \cdot \beta = 110°$$
$$\beta = 110° : 2$$
$$\beta = 55°.$$



ПРИМЕР 3. Унутрашњи угао на основици једнакокраког троугла је четири пута већи од угла при врху. Одреди унутрашње углове тог троугла.

РЕШЕЊЕ Користећи ознаке на слици, $\beta = 4 \cdot \alpha$:

$$\alpha + \beta + \beta = 180°$$
$$\alpha + 4 \cdot \alpha + 4 \cdot \alpha = 180°$$
$$9 \cdot \alpha = 180°$$
$$\alpha = 180° : 9$$
$$\alpha = 20°$$
$$\beta = 4 \cdot 20°$$
$$\beta = 80°.$$

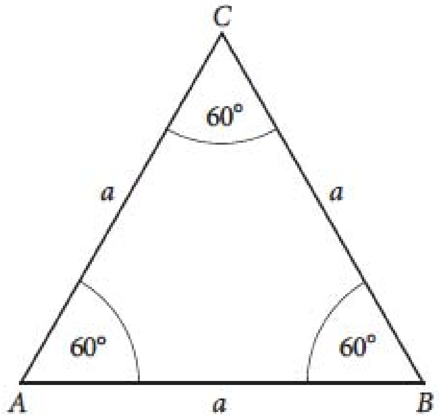


УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Довољно је да знамо колики је један угао једнакокраког троугла да бисмо сазнали колики су остали углови тог троугла.

Једнакостранични троугао

Једнакостранични троугао је троугао који има све три једнаке странице.



Пошто је $3 \cdot \alpha = 180°$, тада је $\alpha = 180 : 3$, тј. $\alpha = 60°$, Јасно је да спољашњи угао једнакостраничног троугла износи 120°.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Унутрашњи угао једнакостраничног троугла износи 60°, а спољашњи 120°.

Можемо направити поделу троуглова и према дужини страница на:

А. Једнакостраничне (три странице једнаких дужина);

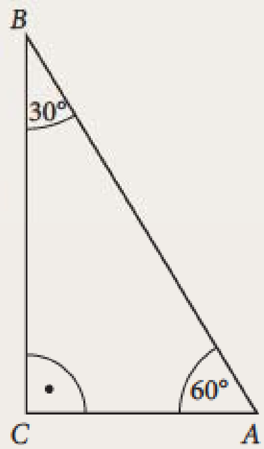
Б. Једнакокраке (две странице једнаких дужина);

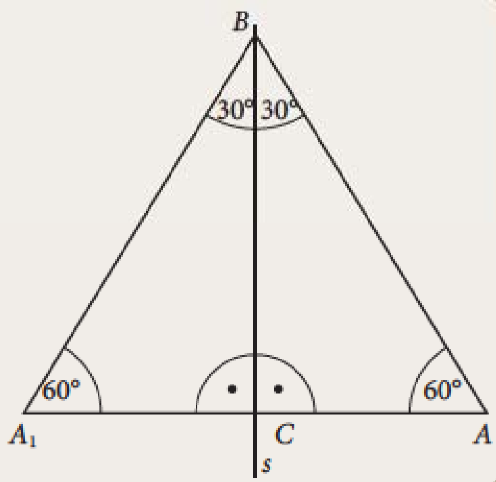
В. Разностраничне или неједнакостраничне (три странице различитих дужина).

У задацима може бити занимљив правоугли троугао чији су унутрашњи углови 60° и 30°.

Карактеристичан је по томе што представља половину једнакостраничног троугла.

Тачку A пресликамо симетрично у односу на праву s која садржи катету BC и њену слику означимо са A_1. Добијени ΔABA_1 је једнакостранични.





УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

У правоуглом троуглу чији су углови 30°, 60° и 90°, хипотенуза је два пута дужа од катете која се налази наспрам угла од 30 степени.

Нпр. ако је $AB = 10$ cm, одмах закључујемо да је $AC = 5$ cm.

ЗАДАЦИ

24. У ΔABC, унутрашњи углови су $\alpha = 65°$ и $\beta = 45°$. Поређај странице a, b и c по величини.

25. У једнакокраком троуглу углови су 72° и 36°. Шта је веће основица или крак?

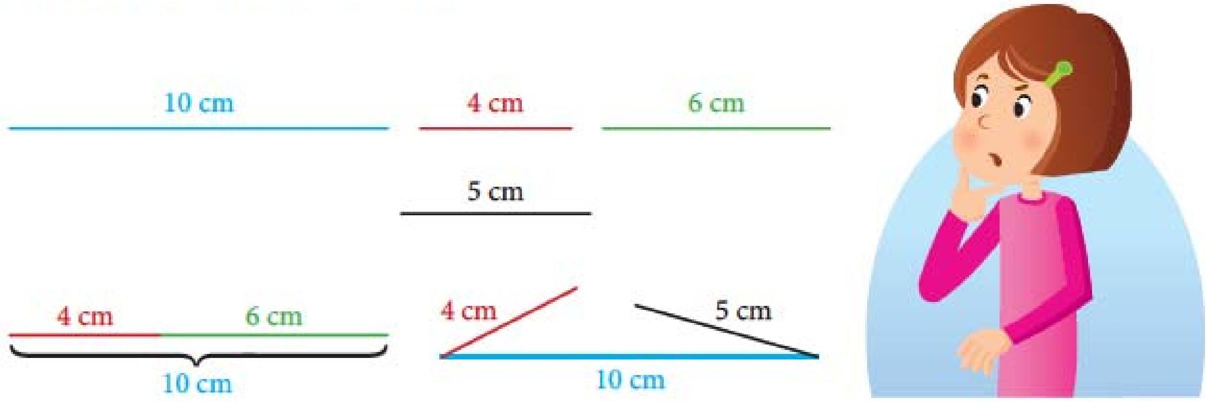
26. Може ли угао на основици једнакокраког троугла да буде:
а) 55°; б) 95°?

27. У једнакокраком троуглу ABC, $\measuredangle ABC = 54°$ и $AC = BC$. Шта је веће основица или крак?

28. У једнакокраком троуглу један угао је 58°. Шта је веће основица или крак?

2.5. Неједнакости троугла

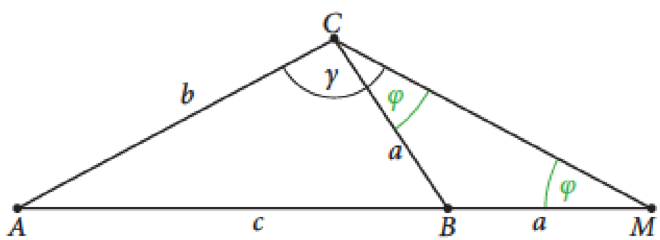
Кристина је имала четири штапића чије дужине су 4 cm, 5 cm, 6 cm и 10 cm. Покушала је, узимајући по три штапића, да направи троугао. Користећи штапиће од 10 cm, 6 cm и 5 cm успела је да направи троугао, као и са 4 cm, 5 cm и 6 cm. Када је на ред дошла комбинација 10 cm, 4 cm и 6 cm – девојчица је била збуњена. Као и у случају када су странице биле 10 cm, 4 cm и 5 cm.



Размишљала је зашто у прва два случаја може да направи троугао, а у друга два не. Очигледно има неке везе са дужинама страница. У прва два случаја краће странице имају довољну дужину да „прескоче” најдужу. У првом случају $6 + 5 > 10$, а у другом $4 + 5 > 6$. У трећем случају је $6 + 4 = 10$, па бисмо добили дуж, а не троугао. У последњем случају је $4 + 5 < 10$, па очигледно штапићи дужина 4 cm и 5 cm никако не могу да се споје. Ух, од обичне дечје игре дођосмо до тога да нас боли глава.

Користећи Кристинино размишљање покажимо под којим условима три дужи могу бити странице троугла.

Дат је ΔABC као на слици. Продужимо страницу AB и означимо тачку M тако да је редослед тачака A, B, M и да важи $BM = BC$. Пошто је ΔBMC једнакокраки, углови на основици MC су једнаки.



Очигледно је $\measuredangle MCA > \measuredangle MCB$, тј. $\gamma > \varphi$. У ΔAMC, γ и φ су унутрашњи углови код темена C и M . Пошто је $\gamma > \varphi$, тада за њихове наспрамне странице важи $AM > AC$, то јест $\boldsymbol{c + a > b}$.

Слично се може показати и да је $\boldsymbol{a + b > c}$, као и $\boldsymbol{b + c > a}$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Збир две странице троугла је већи од треће странице.

Или другачије: Свака страница троугла је мања од збира друге две странице.

Пођимо од неједнакости $c < a + b$. Нека је страница c најдужа у датом троуглу ΔABC. Из претходне неједнакости следи: $c - a < b$ и $c - b < a$.

Слично показујемо и у случају када је нека друга страница најдужа.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Разлика две странице троугла мања је од треће странице.
Свака страница троугла већа је од разлике друге две странице.

Све ове неједнакости можемо записати на следећи начин:

$$|a - b| < c < a + b$$
$$|b - c| < a < b + c$$
$$|c - a| < b < c + a$$

У општем случају не знамо колике су дужине страница, па је апсолутна вредност ту због тога да разлика не буде негативан број. У конкретној ситуацији, свакако мању страницу одузимамо од веће.

ПРИМЕР 1. Да ли постоји троугао чије су странице:

а) 8 cm, 5 cm, 6 cm; б) 9 cm, 13 cm, 2 cm?

РЕШЕЊЕ а) Пошто је $6 + 5 > 8$, постоји такав троугао.

б) Пошто је $9 + 2 < 13$, такав троугао не постоји.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Довољно је проверити да ли је збир две краће странице већи од најдуже.

ПРИМЕР 2. Две странице троугла су $a = 5{,}7$ cm и $b = 3{,}8$ cm. Колика може да буде дужина треће странице?

РЕШЕЊЕ Овде се не очекује да одредите тачну дужину треће странице, него да одредите границе у којима она мора бити.

Пођимо од неједнакости $a - b < c < a + b$, па израчунајмо $a - b$ и $a + b$:

$$5{,}7 \text{ cm} - 3{,}8 \text{ cm} < c < 5{,}7 \text{ cm} + 3{,}8 \text{ cm}$$
$$1{,}9 \text{ cm} < c < 9{,}5 \text{ cm}.$$

Дакле, дужина странице c мора бити већа од 1,9 cm, а мања од 9,5 cm.

ПРИМЕР 3. Дужине странице троугла, изражене у „cm” су природни бројеви, а обим троугла је 18 cm. Одреди све такве троуглове.

РЕШЕЊЕ Збир две странице је већи од треће, па прво треба одредити половину обима троугла. У нашем случају то је 9 cm. Странице троугла морају бити мање од 9 cm. Пошто је $a + b + c = 18$ cm, можемо правити следеће комбинације: (8 cm, 8 cm, 2 cm), (8 cm, 7 cm, 3 cm), (8 cm, 6 cm, 4 cm), (8 cm, 5 cm, 5 cm), (7 cm, 7 cm, 4 cm), (7 cm, 6 cm, 5 cm), (6 cm, 6 cm, 6 cm).

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Максимална дужина странице мора бити мања од половине обима.

ПРИМЕР 4. Странице једнакокраког троугла су 4 cm и 9 cm. Колика је дужина крака?

РЕШЕЊЕ Ако би крак био 4 cm, такав троугао не би постојао зато што је $4 + 4 < 9$. Значи, дужина крака мора бити 9 cm, а основица је 4 cm.

ЗАДАЦИ

29. Постоје ли троуглови чије су странице:
а) 5 cm, 6 cm, 7 cm; б) 4,1 cm, 5,1 cm, 6,1 cm; в) 1 cm, 2 cm, 3 cm?

30. Странице троугла ABC су: $AB = 14{,}2$ cm и $BC = 10{,}7$ cm. У којим границама може бити страница AC?

31. Имамо четири штапића чије су дужине 1 dm, 2 dm, 3 dm и 4 dm. Колико троуглова се може саставити ако за сваку страницу користиш само један штапић?

32. Имамо пет штапића чије су дужине 1 dm, 2 dm, 3 dm, 4 dm и 5 dm. Колико троуглова се може саставити ако за сваку страницу користиш само један штапић?

33. Постоји ли троугао чије се странице разликују за: а) 1 cm; б) 2 cm; в) 5 cm?

34. Одреди странице једнакостраничног троугла, ако је његов обим 9,6 cm.

35. Одреди странице једнакокраког троугла чији је обим 15 cm, ако је:
а) основица за 3 cm мања од крака; б) основица за 3 cm већа од крака.

36. Странице једнакокраког троугла су 10 cm и 21 cm. Одреди дужину крака и дужину основице тог троугла.

37. Странице једнакокраког троугла су 8 cm и 14 cm. Колики је његов обим? Колико има решења?

38. Обим троугла MNP је 12 cm, а мерни бројеви страница су природни бројеви. Колико има таквих троуглова? Колико од уочених троуглова су једнакокраки? Постоји ли једнакостраничан троугао који има обим 12 cm?

39. Да ли је тачно тврђење: Ако је највећа страница троугла мања од збира две мање странице, онда троугао постоји?

40. Колико има једнакокраких троуглова чије су дужине страница природни бројеви и чији је обим једнак 15 cm?

41. Да ли је свака страница троугла мања од половине његовог обима? Зашто?

***42.** Село A и село B се налазе са разних страна пута p. Где на путу p треба направити бензинску пумпу тако да је збир растојања од села A и села B до бензинске пумпе најмањи?

***43.** Село A и село B се налазе са исте стране пута p. Где на путу p треба направити бензинску пумпу тако да је збир растојања од села A и села B до бензинске пумпе најмањи?

САЖЕТАК
ТРОУГАО – *први део*

УГЛОВИ ТРОУГЛА:

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Збир унутрашњих углова троугла је 180°.

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$ Збир спољашњих углова троугла је 360°.

$$\left.\begin{aligned}\alpha + \alpha_1 &= 180^\circ\\ \beta + \beta_1 &= 180^\circ\\ \gamma + \gamma_1 &= 180^\circ\end{aligned}\right\}$$ Збир унутрашњег и спољашњег угла троугла је 180°.

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta + \gamma\\ \beta_1 &= \alpha + \gamma\\ \gamma_1 &= \alpha + \beta\end{aligned}\right\}$$ Сваки спољашњи угао троугла једнак је збиру два, њему несуседна, унутрашња угла.

ПОДЕЛА ТРОУГЛОВА ПРЕМА УНУТРАШЊИМ УГЛОВИМА:

Оштроугли троугао	сва три угла су оштра
Правоугли троугао	два оштра и један прав угао, странице које граде прав угао су катете, а трећа је хипотенуза
Тупоугли троугао	два оштра и један туп угао

ОДНОС СТРАНИЦА И УГЛОВА У ТРОУГЛУ:

Наспрам:

једнаких страница троугла, налазе се једнаки унутрашњи углови;
већe странице троугла, налази се већи унутрашњи угао.

Важе и обрнута тврђења.

Једнакокраки троугао	два једнака крака; углови на основици су једнаки.
Једнакостранични троугао	три једнаке странице, унутрашњи углови су по 60°.

НЕЈЕДНАКОСТ ТРОУГЛА

$$\left.\begin{aligned}|a-b| &< c < a+b\\ |b-c| &< a < b+c\\ |c-a| &< b < c+a\end{aligned}\right\}$$ Свака страница троугла је мања од збира друге две странице, а већа од апсолутне вредности њихове разлике.

ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

44. На следећој слици дат је троугао ΔABC.

Допуни следећу табелу тако што ћеш траженим страницама и угловима доделити ознаке које им по датим сликама припадају.

Троугао	ΔABC		
Страница	$AB =$	$a =$	$CA =$
Угао	$\gamma = \measuredangle$	$\measuredangle CAB =$	$\beta =$

45. У троуглу KLM збирови дужина суседних страница троугла су: $KL + LM = 17$ cm, $LM + MK = 23$ cm и $MK + KL = 26$ cm. Одреди обим и дужине страница троугла KLM.

46. У троуглу ABC, тачка M је средиште странице AC, а дужине страница су: $AB = 17$ cm, $BC = 39$ cm и $AC = 28$ cm. На страници AB одреди тачку K и на страници BC тачку L, тако да тачке K, L и M обим троугла ABC деле на три једнака дела.

47. Може ли пресек два троугла бити троугао?

48. У колико највише тачака се могу сећи једна троугаона и једна кружна линија?

49. Нацртај одговарајуће слике и израчунај трећи унутрашњи угао троугла, ако су два унутрашња угла једнака:

а) $52°$ и $65°$;

б) $47°$ и $74°$;

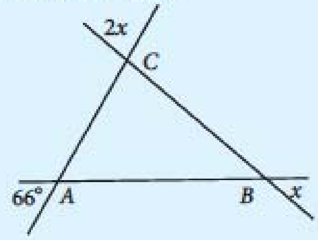
в) $17°$ и $27°$;

г) $100°$ и $30°$.

50. У троуглу MNP на страници MN дата је тачка Q, таква да је MN нормална на PQ. Нацртај слику и одреди углове троугла MNP, ако је $\measuredangle MPQ = 25°$ и $\measuredangle NPQ = 35°$.

51. У троуглу ABC, симетрала $\measuredangle ABC$ сече страницу AC у тачки D. Нацртај слику и одреди углове троугла ABC, ако је $\measuredangle ABD = 35°$ и $\measuredangle CDB = 95°$.

52. На основу података на следећој слици одреди углове троугла ABC.



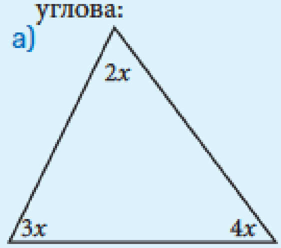
53. На основу података са слике одреди угао γ.

54. Израчунај унутрашње углове троугла ако су они једнаки α, 3α и 5α.

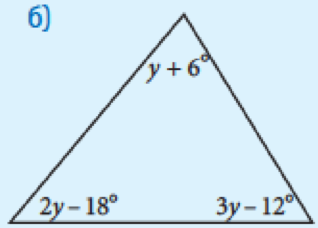
55. У троуглу ABC, унутрашњи угао α је за $15°$ степени већи од унутрашњег угла β, а угао β је за $9°$ већи од унутрашњег угла γ. Одреди углове троугла ABC.

56. На следећој слици дата су два троугла. Одреди x и y, а затим и углове у сваком од троуглова:

а)



б)



57. У правоуглом троуглу, један оштар угао је $36°$. Колики је други оштар угао?

58. Унутрашњи углови троугла су α, 2α и 3α. Да ли је тај троугао правоугли?

59. У троуглу ABC угао α је за $31°$ већи од угла β, а угао γ је за $32°$ већи од угла α. Докажи да је тај троугао тупоугли.

60. У троуглу ABC, углови α и β су једнаки. Одреди углове троугла ABC, ако се симетрале углова α и β секу под углом од $128°$.

61. У правоуглом троуглу симетрала правог угла и симетрала једног оштрог угла секу се под углом од $115°$. Израчунај оштре углове тог правоуглог троугла.

62. У правоуглом троуглу ABC, симетрале оштрих углова секу се у тачки S. Израчунај $\measuredangle ASB$.

63. Постоји ли троугао који има два:
а) оштра угла; б) права угла;
в) тупа угла?

64. Унутрашњи углови α и β у троуглу ABC су комплементни. Да ли је тај троугао правоугли?

65. Два унутрашња угла у троуглу су већа од $45°$. Да ли је тај троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

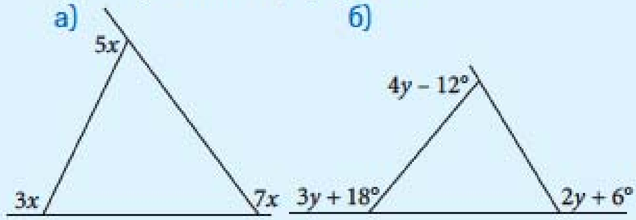
66. У троуглу ABC, спољашњи углови су $\alpha_1 = 116°$ и $\beta_1 = 127°$. Колики су унутрашњи углови троугла?

67. У троуглу ABC, унутрашњи углови троугла су $\measuredangle ABC = 76°$ и $\measuredangle BCA = 67°$. Израчунај спољашње углове троугла ABC.

68. Израчунај спољашње и унутрашње углове троугла, ако су спољашњи углови троугла једнаки 5α, 6α и 7α.

69. У троуглу ABC, унутрашњи угао α је два пута мањи од свог спољашњег угла, а унутрашњи угао β је три пута мањи од свог спољашњег угла. Одреди унутрашње и спољашње углове троугла ABC.

70. На следећој слици дата су два троугла. Одреди x и y, а затим и унутрашње и спољашње углове у сваком од троуглова:



71. Одреди да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли, ако су два његова спољашња угла једнака:
а) $110°$ и $130°$;
б) $80°$ и $120°$;
в) $125°$ и $145°$;
г) $111°$ и $122°$.

72. Спољашњи угао правоуглог троугла је $130°$. Одреди унутрашње и спољашње углове тог правоуглог троугла.

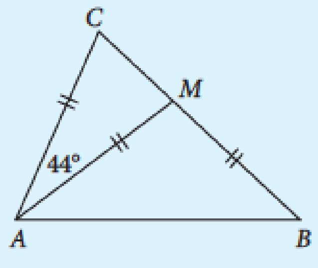
73. Ако се спољашњи углови троугла разликују за $30°$, да ли је тај троугао правоугли?

74. Ако се спољашњи углови троугла разликују за $50°$, да ли је тај троугао оштроугли?

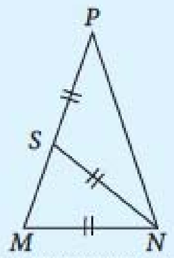
75. У троуглу ABC, углови α и β су једнаки. Одреди углове троугла ABC, ако се симетрале углова α_1 и β_1 секу под углом од $58°$.

76. У троуглу ABC симетрала спољашњег угла α_1 и симетрала спољашњег угла β_1 секу се под углом од $45°$. Докажи да је тај троугао правоугли.

77. Одреди углове троугла ABC, ако је (види слику) $AC = AM = MB$.



*78. У једнакокраком троуглу MNP ($MP = NP$) на краку MP дата је тачка S, таква да је $MN = NS = SP$ (види слику). Одреди углове троугла MNP.



79. Два спољашња угла у троуглу су већа од 135°. Да ли је тај троугао тупоугли?

80. У троуглу MNP, странице троугла су $m = 12$ cm, $n = 10$ cm, $p = 14$ cm. Поређај углове троугла по величини.

81. У троуглу ABC, дужине страница троугла су: $AB = 5x$, $BC = 4x$ и $CA = 6x$. Одреди најмањи и највећи угао троугла ABC.

82. Углови троугла DEF су: $\measuredangle DEF = 5\varphi$, $\measuredangle EFD = 6\varphi$ и $\measuredangle FDE = 7\varphi$. Не израчунавајући углове троугла, одреди најмању и највећу страницу троугла DEF.

83. У троуглу ABC угао α је за 5° већи од угла β и за 6° мањи од угла γ. Поређај по величини дужи AB, BC и CA не рачунајући углове троугла.

84. У троуглу MNP однос страница троугла је $m < p < n$, а углови троугла се разликују за 12°. Одреди углове датог троугла.

85. У троуглу ABC, $\measuredangle ABC = 62°$, $\measuredangle ACB = 70°$. Тачка D је на страници AB и дуж CD је симетрала $\measuredangle ACB$. Упореди дужи AB, BC, CA и CD. Шта је веће AD или CD? Шта је веће BD или CD?

86. Постоји ли једнакокраки троугао чији су углови:
а) 66° и 57°; б) 66° и 48°; в) 92° и 43°?

87. У правоуглом троуглу ABC, са правим углом код темена C, оштар угао је $\measuredangle CAB = 43°$. Која страница је хипотенуза правоуглог троугла? Поређај у растући низ странице AB, BC и CA датог троугла.

88. Ако је угао при врху једнакокраког троугла оштар угао, онда је тај једнакокраки троугао оштроугли. Докажи.

89. За странице троугла ABC важи једнакост $AB = BC = CA = 13$ cm. Одреди углове троугла ABC.

90. У правоуглом ΔDEF је $FD = DE = 6$ cm. Нацртај одговарајућу слику и одреди углове троугла DEF.

*91. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$), на страници BC дата је тачка D, таква да су троуглови ABD и ACD једнакокраки. Одреди углове троугла ABC.

92. Постоји ли троугао чији је обим 1 m, а две његове странице имају дужину:
а) 35 cm и 45 cm;
б) 23 cm и 24 cm;
в) 33 cm и 44 cm;
г) 20 cm и 30 cm?

93. У троуглу ABC, страница $AB = 7$ cm, а страница $AC = 4$ cm. Одреди колико различитих троуглова ABC постоји, ако је мерни број странице BC природан број?

94. Колики су углови троугла, ако је први угао три пута мањи од другог, а трећи пет пута већи од првог?

95. Израчунај збир спољашњих углова троугла.

96. Да ли је спољашњи угао у троуглу једнак збиру два унутрашња несуседна угла троугла?

97. Одредити углове троугла ABC ако је унутрашњи угао $\alpha = 58°$ и спољашњи угао $\beta_1 = 110°$.

98. Спољашњи углови троугла су 80°, 120° и 160°. Какав је тај троугао: оштроугли, правоугли или тупоугли?

99. Одредити углове:
а) једнакостраничног троугла;
б) једнакокрако правоуглог троугла.

100. Може ли збир једног унутрашњег и једног спољашњег угла троугла бити 330°?

101. Спољашњи угао једнакокраког троугла је $100°$. Израчунај унутрашње углове троугла.

***102.** Када се спољашњи угао код темена A повећа за $20°$, а спољашњи угао код темена B смањи за $35°$, тада се унутрашњи угао код темена C смањи за своју четвртину. Израчунај унутрашњи угао код темена C.

***103.** У троуглу ABC симетрала $\measuredangle ACB$ образује са страницом AB угао од $128°$. Израчунај оштар угао између праве AB и симетрале спољашњег угла код темена C.

104. Израчунај углове једнакокраког троугла, ако се симетрале углова на основици секу под углом од $114°$.

***105.** У троуглу ABC, дуж BK је симетрала $\measuredangle ABC$ ($K \in AC$). Ако је $\measuredangle BKC = 70°$, колика је разлика углова: $\measuredangle ACB - \measuredangle CAB$?

***106.** Хипотенуза AB правоуглог троугла ABC продужена је преко темена A до тачке M тако да је $AC = AM$ и преко темена B до тачке P тако да је $BP = BC$. Израчунај угао MCP .

***107.** Један унутрашњи угао троугла је $75°$. Одредити остале углове троугла, ако се зна да права која садржи теме датог угла дели дати троугао на два једнакокрака троугла.

***108.** У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) крак AC је продужен преко темена C до тачке M, тако да је $CM = CA$. Израчунај $\measuredangle ABM$.

***109.** Дат је троугао ABC. Ако симетрала угла код темена C, са симетралом странице AB образује угао једнак половини угла код темена C, да ли је троугао ABC правоугли?

***110.** Угао β једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) је $72°$. На продужетку крака AC преко темена A, изабрана је тачка D, таква да је $AD = AB$. Колики је $\measuredangle CBD$? Да ли је ΔCBD једнакокрак.

111. У правоуглом троуглу хипотенуза је два пута већа од краће катете. Одреди оштре углове тог троугла.

112. Дат је троугао ABC и на страници AC тачка M, тако да је $AM = MB = BC$. Израчунај углове троугла ABC, ако је угао $\beta_1 = 60°$.

113. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$), $\measuredangle ACB$ је већи од $50°$. На страници AB дата је тачка D тако да је $\measuredangle ACD = 50°$, а на страници BC тачка E тако да је $CE = CD$. Израчунај $\measuredangle BDE$.

***114.** У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) на краку AC дата је тачка D, а на краку BC тачка E, такве да је $AB = BD = DE = EC$. Одреди углове троугла ABC.

***115.** У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) на краку AC дата је тачка M таква да је $AB = BM = MC$. Одреди углове троугла ABC.

***116.** Дата је кружница чији је центар O и на кружници тачке A, B и C, такве да је $\measuredangle ACO = 30°$ и $\measuredangle BCO = 40°$. Израчунај $\measuredangle AOB$.

***117.** У једнакокраком троуглу ABF ($AF = BF$) на краку AF дате су тачке C и E, а на краку BF тачка D, тако да је $AB = BC = CD = DE = EF$. Одреди углове троугла ABF.

***118.** У троуглу ABC угао $\measuredangle ACB = 40°$. Симетрала спољашњег и симетрала унутрашњег угла код темена C секу страницу AB и њен продужетак у тачкама M и P и одређују једнакокраки троугао CMP. Израчунај $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle CAB$.

119. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$). Симетрале углова на основици AB једнакокраког троугла ABC секу се у тачки S.
а) У којим границама је дефинисан угао ASB?
б) Ако је угао ASB једнак $118°$, шта је веће: основица AB или крак AC троугла ABC?

120. Мерни бројеви дужина страница троугла су узастопни природни бројеви. Да ли је то увек могуће?

121. Постоји ли троугао чије су мерни бројеви дужина страница 100, 100 и 199?

122. Ако је $AB = 7$ и $BC = 11$, у којим границама се креће страница CA?

***123.** Симетрала угла на основици и угла у врху једнакокраког троугла секу се и граде угао од 61°. Шта је веће основица или крак датог троугла?

124. Дат је троугао са целобројним мерним бројевима дужина страница. Једна страница је дужине 100 cm, а друга 103 cm. Колики је најмањи, а колики највећи могући обим троугла?

125. Одредити све троуглове чији је обим 10 cm, а мерни бројеви страница су цели бројеви.

126. Дат је троугао ABC такав да је $AB = 7$ cm и $BC + CA = 15$ cm. У којим границама је одређена дужина дужи BC?

127. Дат је троугао ABC такав да је $AB = 7$ cm и $BC - CA = 5$ cm. У којим границама је одређена дужина дужи BC?

***128.** Симетрале углова троугла ABC секу се у тачки M. Доказати да је тачка M најближа темену највећег угла.

***129.** Симетрала унутрашњег угла троугла дели наспрамну страницу на два дела. Доказати да је сваки од тих делова мањи од суседне странице.

130. У једнакокраком троуглу ABC $(AC = AB)$ основица BC је продужена преко темена C до произвољне тачке D.
Доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ADC$.

131. У троуглу ABC симетрала спољашњег угла C и симетрала спољашњег угла B секу се у тачки M. Израчунај $\measuredangle BMC$, ако је $\measuredangle BAC = 58^\circ$.

***132.** У унутрашњој области троугла ABC дата је тачка M. Доказати да важе неједнакости: а) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$; б) $AM + MB < AC + BC$.

***133.** У унутрашњој области троугла ABC дата је тачка M. Доказати да је збир дужи $AM + BM + CM$ већи од полуобима, а мањи од обима троугла ABC.

***134.** Ако је D произвољна тачка странице AB троугла ABC, тада је $AC + BC - AB < 2 \cdot CD$. Доказати.

***135.** На симетрали спољашњег угла код темена C троугла ABC изабрана је произвољна тачка M. Доказати да је $MA + MB > AC + BC$.

136. У једнакокраком троуглу ABC $(AC = BC)$, тачке A_1 и C_1 су средишта страница BC и AB. Симетрале страница BC и AB секу се у тачки O, тако да је $\measuredangle A_1OC_1 = 121^\circ$. Шта је веће: основица AB или крак AC ?

***137.** Дат је једнакокраки троугао ABC $(AC = BC)$, а угао на основици је 50°. На продужетку крака BC (преко темена C) дата је тачка M, тако да је $BC = CM$. Доказати да је $AM \perp AB$ и $AM > AB$.

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Збир унутрашњих углова троугла је 180°.	тачно	нетачно
2. Унутрашњи углови троугла су 56°, 67°, 78°.	тачно	нетачно
3. Сви унутрашњи углови једнакостраничног троугла су једнаки 60°.	тачно	нетачно
4. Збир оштрих углова правоуглог троугла једнак је 100°.	тачно	нетачно
5. Ако су оштри углови у једнакокраком троуглу по 40°, онда је тај троугао тупоугли.	тачно	нетачно
6. Ако је спољашњи угао троугла једнак 110°, онда је одговарајући унутрашњи угао једнак 70°.	тачно	нетачно
7. Збир два спољашња угла троугла је 170°.	тачно	нетачно
8. Ако су два унутрашња угла троугла једнака 50° и 80°, онда је тај троугао једнакокрак.	тачно	нетачно
9. Наспрам једнаких углова у троуглу су једнаке странице.	тачно	нетачно
10. Странице троугла су 5 cm, 7 cm и 13 cm.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. Ако су два угла у троуглу 56° и 67°, онда је трећи угао троугла једнак:

А) 67°; Б) 57°; В) 47°; Г) 55°; Д) 65°.

2. Спољашњи угао троугла је 114°. Њему одговарајући унутрашњи угао троугла је:

А) 64°; Б) 65°; В) 66°; Г) 67°; Д) 68°.

3. Један угао у једнакокраком троуглу је 100°. Преостала два угла су по:

А) 30°; Б) 35°; В) 39°; Г) 40°; Д) 45°.

4. Ако су два унутрашња угла тргогла *ABC* једнаки 47° и 53°, онда је један спољашњи угао троугла једнак:

А) 123°; Б) 37°; В) 100°; Г) 43°; Д) 137°.

5. Унутрашњи углови троугла су 44° и 66°. Тај троугао је:

А) оштроугли; Б) правоугли; В) тупоугли; Г) једнакокрак; Д) једнакостранични.

6. Троугао *ABC* је једнакокрак и правоугли. Његови углови су:

А) 90°, 40°, 40°; Б) 60°, 60°, 60°; В) 90°, 45°, 45°; Г) 90°, 30°, 60°; Д) 90°, 55°, 55°.

7. Обим једнакокраког троугла *ABC* је 13 cm, а све странице имају дужину изражену природним бројем центиметара. Таквих једнакокраких троуглова има:

А) 2; Б) 3; В) 4; Г) 5; Д) 6.

8. Хипотенуза *AB* правоуглог троугла *ABC* има дужину 14 cm. Која од наведених дужина може бити дужина катете троугла *ABC*?

А) 30 cm; Б) 25 cm; В) 20 cm; Г) 15 cm; Д) 10 cm.

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

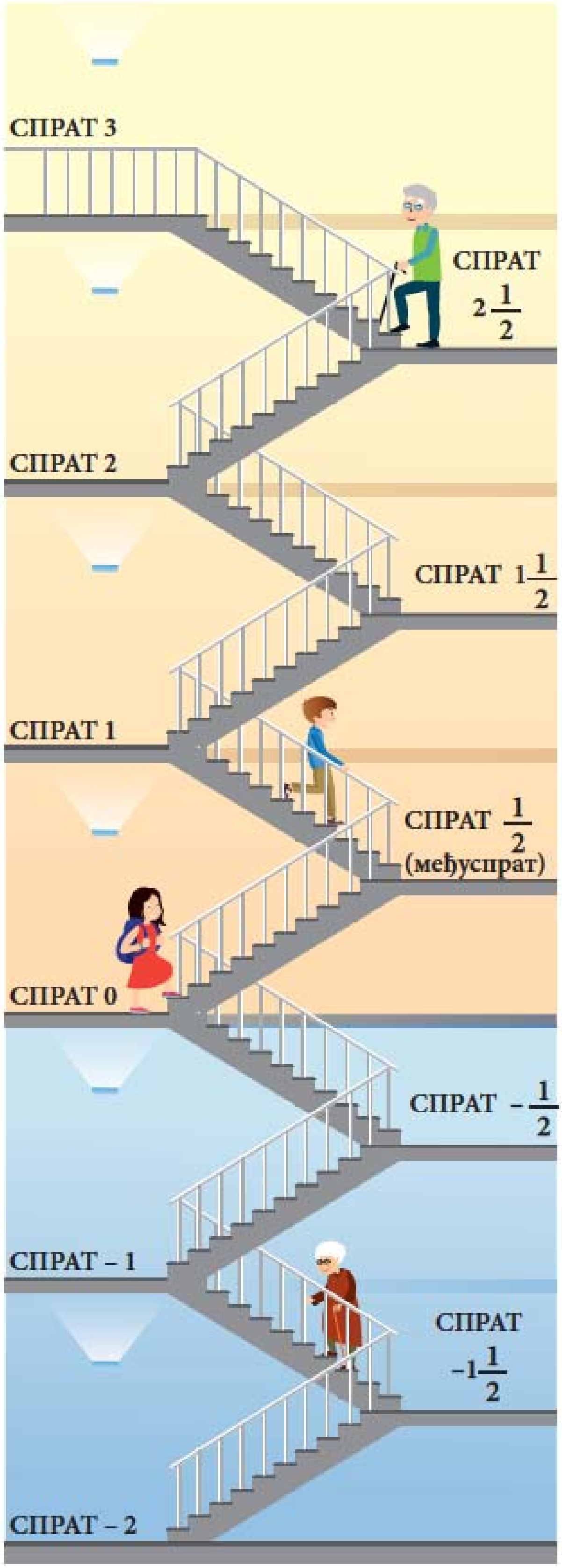
Странице троугла
Унутрашњи углови троугла
Обим троугла
Оштроугли троугао
Правоугли троугао
Катета
Хипотенуза
Тупоугли троугао
Спољашњи углови троугла
Једнакокраки троугао
Једнакостранични троугао

ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

1.1.	Унутрашњи углови троугла ABC су 56° и 32°. Да ли је дати троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?	**15**
1.2.	Унутрашњи угао једнакокраког троугла је 100°. Колики су остали углови тог троугла?	**20**
1.3.	Унутрашњи углови троугла разликују се за 12°. Одреди угао који граде симетрала најмањег и симетрала највећег угла у троуглу.	**25**
2.1.	Дат је троугао ABC. Унутрашњи $\measuredangle ABC = 70°$, а спољашњи угао код теменена C је 116°. Нацртај одговарајућу слику и израчунај остале унутрашње и спољашње углове троугла ABC.	**15**
2.2.	Спољашњи углови троугла ABC су α_1, β_1 и γ_1. Ако је $\alpha_1 + \beta_1 = 210°$ и $\beta_1 + \gamma_1 = 220°$. Да ли је троугао ABC оштроугли, правоугли или тупоугли?	**20**
2.3.	Дат је правоугли троугао ABC чији су оштри углови α и β. Одреди угао који граде симетрале спољашњих углова α_1 и β_1.	**25**
3.1.	Унутрашњи углови β и γ, троугла ABC, су редом једнаки 57° и 64°. Упореди странице троугла ABC.	**15**
3.2.	У троуглу ABC, $\measuredangle ABC = 36°$, а $\measuredangle ACB = 90°$. Симетрала правог угла сече страницу AB у тачки M. а) Упореди дужи AB, BC, CA. б) Упореди дужи AM, BM и CM.	**20**
3.3.	Углови α и β троугла ABC су 54° и 68°. Симетрале унутрашњих углова троугла ABC секу се у тачки S. Поређај од најмање до највеће дужи AB, BC, CA, AS, BS и CS.	**25**
4.1.	Постоје ли троуглови чије су странице: а) 7 cm, 9 cm и 11 cm; б) 6 cm, 10 cm и 18 cm? Објасни одговоре.	**15**
4.2.	У једнакокраком троуглу две странице су 7 cm и 15 cm. Одреди трећу страницу тог једнакокраког троугла. Образложи решење.	**20**
4.3.	У троуглу ABC чији је обим 17 cm, све странице имају дужину изражену природним бројевима у центиметрима. Колико има таквих једнакокраких троуглова и колике су њихове странице?	**25**

3 РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ – *први део*

Већ смо видели да приземље зграде можемо означавати бројем 0, а да нивое изнад приземља можемо озназачавати позитивним бројевима. Слично томе, нивое испод приземља можемо означавати негативним бројевима. Сигурно сте некад били у згради у којој између приземља и првог спрата постоји „међуспрат”.



По узору на градиво из 5. разреда, међуспрат можемо означити разломком $\frac{1}{2}$. Слично томе, међуспрат између спрата 1 и спрата 2, можемо назвати спрат $1\frac{1}{2}$. Дакле, позитивне међуспратове можемо обележити позитивним разломцима $\frac{1}{2}$, затим $1\frac{1}{2}$, затим $2\frac{1}{2}$, итд.

Слично пењању на међуспрат, можемо се спустити на међуспрат који се налази између приземља и подрума. Дакле, тај међуспрат се налази између спрата 0 и спрата –1. Пошто је тај међуспрат испод приземља, то је онда, наравно **негативан** међуспрат, и назовимо га „**негативан спрат** $\mathbf{\frac{1}{2}}$” или кратко спрат $-\frac{1}{2}$. Спуштајући се даље, следећи негативан међуспрат је спрат $-1\frac{1}{2}$ итд.

Посматрајући зграде са међуспратовима, јасно је да између позитивних целих бројева можемо убацити **позитивне разломке**, али и да између негативних целих бројева можемо убацити **негативне разломке**. Проширивањем скупа позитивних разломака негативним разломцима, добијамо **скуп рационалних бројева**, које ћемо изучавати у овој области.

3.1. Скуп рационалних бројева и бројевна права

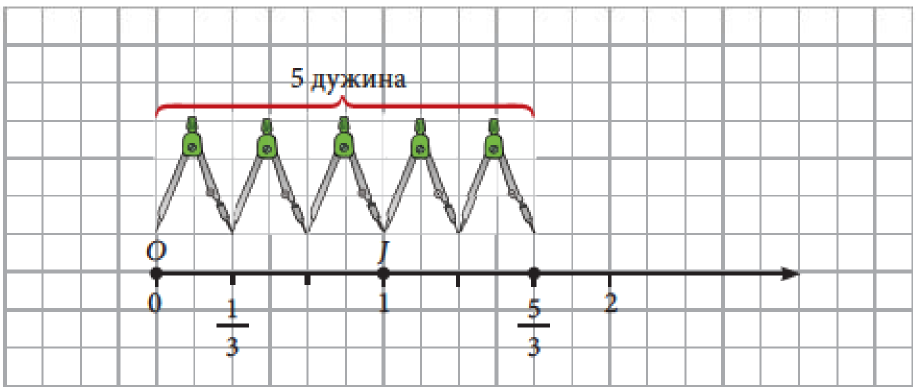
Подсетимо се разломака које смо научили у 5. разреду.

Подсетимо се: Разломак пишемо уз помоћ два броја $a \in N_0$ и $b \in N$:

$$r = \frac{a}{b},$$

при чему:
број a називамо **бројилац**, а
број b називамо **именилац**,
уз напомену да именилац не сме бити једнак нули; дакле, $b \neq 0$.

На бројевној полуправој, разломак $r = \frac{a}{b}$ уносимо тако што одредимо дужину која одговара разломку $\frac{1}{b}$ и ту дужину нанесемо a пута на бројевну полуправу. На пример, ако је $r = \frac{5}{3}$, одредимо прво дужину која одговара разломку $\frac{1}{3}$, а затим је нанесимо 5 пута на бројевну полуправу.



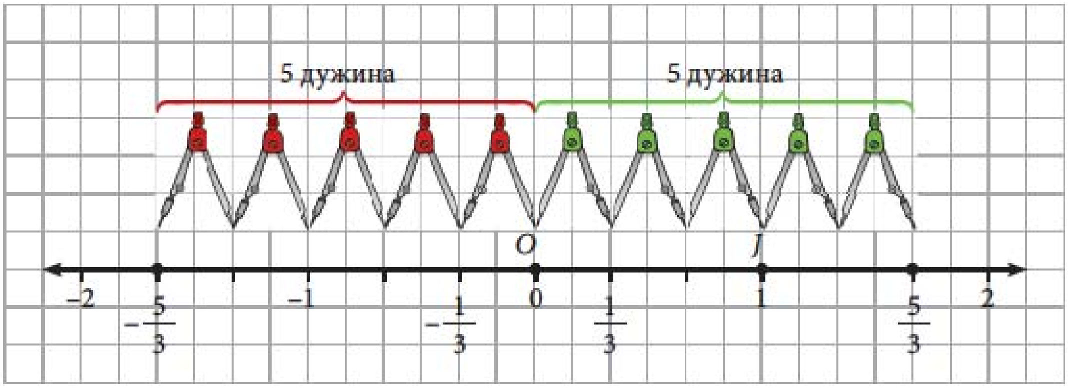
Означимо симболом Q^+ скуп позитивних разломака $r = \frac{a}{b}$, за које важи $a > 0$ и $b > 0$. Дакле:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

$$Q^+ = \left\{ r : r = \frac{a}{b},\ 0 < a \in Z^+,\ 0 < b \in Z^+ \right\}$$

Читамо: Q^+ је скуп разломака r код којих су и бројилац a и именилац b позитивни цели бројеви.

Проширимо сада скуп позитивних разломака. За сваки позитиван разломак $r \in Q^+$, означимо изразом $-r$ **супротан разломак**, тј. **негативан разломак**. На пример, разломку $r=\frac{5}{3}$ је **супротан** негативан разломак $-r=-\frac{5}{3}$. На бројевној правој, **негативан разломак** $-r=-\frac{5}{3}$ уносимо на истом одстојању од координатног почетка O као и разломак $r=\frac{5}{3}$, али на **супротној** страни праве у односу на координатни почетак O.



Означимо симболом Q^- скуп негативних разломака $-r=-\frac{a}{b}$, за које важи $a>0$ и $b>0$, дакле:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

$Q^- = \{-r : r \in Q^+\}$ **Читамо:** Q^- **је скуп разломака** $-r$ **који су супротни разломцима из скупа** Q^+.

ПРИМЕР 1. Одреди који од разломака $\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{5}, 4\frac{3}{4}, -\frac{11}{9}$, 3 и -2 припадају скуповима Q^+ и Q^-.

РЕШЕЊЕ Прво, подсетимо се из 5. разреда, да се бројеви 3 и 2 могу написати као разломци $\frac{3}{1}$ и $\frac{2}{1}$ па је негативан број -2 исто што и негативан разломак $-\frac{2}{1}$.

Тада имамо позитивне разломке $\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, 4\frac{3}{4}, \frac{3}{1} \in Q^+$,

и негативне разломке $-\frac{7}{5}, -\frac{11}{9}, -\frac{2}{1} \in Q^-$.

Позабавимо се сада бројем 0, за који знамо да није ни позитиван, ни негативан. Знамо још из 5. разреда да број 0 можемо написати као разломак:

$$0=\frac{0}{n},$$

за било који позитиван цео број $n>0$. Пошто знамо да је цео број 0 сам себи супротан, следи:

$$-\frac{0}{n}=-0=0=\frac{0}{n}.$$

Или другим речима, **број 0 је разломак који је сам себи супротан.**

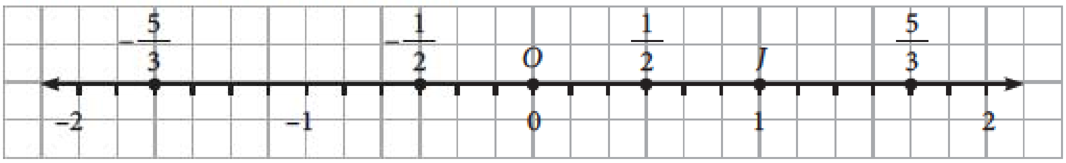
Коначно, сакупимо сада све позитивне разломке из скупа Q^+, све негативне разломке из скупа Q^-, и разломак 0, и убацимо их све у један скуп свих разломака Q, који називамо скуп **рационалних бројева**. Математички, то записујемо као унију три скупа Q^+, Q^-, и $\{0\}$, дакле:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

$Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$, а читамо: **скуп рационалних бројева Q** је **скуп свих позитивних разломака, негативних разломака и броја 0.**

ПРИМЕР 2. У скупу Q, одреди бројеве супротне бројевима $\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$ и 0, и придружи их одговарајућим тачкама на бројевној правој.

РЕШЕЊЕ Супротни бројеви бројевима $\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$ и 0 су бројеви $-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}$ и $-0 = 0$. Унесимо све ове бројеве на бројевну праву.

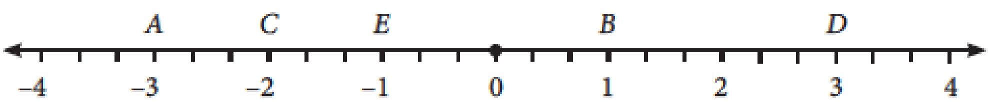


ЗАДАЦИ

1. Покажи да су следећи бројеви рационални: а) 5; б) –3; в) 0,75; г) 1,2.

2. Прикажи на бројевној правој бројеве: а) 4; б) –5; в) 1,75; г) $-\frac{12}{5}$; д) $\frac{1}{3}$.

3. Одреди рационалне бројеве који одговарају тачкама A, B, C, D и E на следећој бројевној правој.



4. Напиши бројеве супротне бројевима: а) –2; б) 4; в) $-\frac{1}{4}$; г) 3,4; д) $-\frac{3}{8}$.

5. Дат је скуп $S = \left\{7,\ 0,\ \frac{3}{5},\ -\frac{17}{4},\ 9,\ -6,\ \frac{0}{51},\ -2\right\}$. Подскуп A скупа S садржи негативне рационалне бројеве; подскуп B скупа S садржи бројеве једнаке 0, а подскуп C скупа S садржи позитивне рационалне бројеве. Одреди A, B и C.

6. Напиши све целе бројеве који се на бројевној правој налазе између рационалних бројева $-\frac{7}{2}$ и $\frac{13}{5}$.

7. Одреди све рационалне бројеве чији је именилац 4, који се налазе између целих бројева –6 и –5.

8. Колико рационалних бројева чији је именилац 7 се налази између целих бројева 3 и 4? Напиши све такве рационалне бројеве.

9. Одреди најмањи позитиван и највећи негативан рационалан број чији именилац је 11.

3.2. Различити записи рационалних бројева

Подсетимо се: Подсетимо се градива из 5. разреда.

Позитиван **разломак** r можемо написати на два начина.

Први је $r = \frac{a}{b}$, а други је $r = a : b$, уз услове $a \in N_0$ и $b \in N$.

Број a можемо назвати **бројилац**, али и **дељеник**,
број b можемо назвати **именилац**, али и **делилац**, а
број r можемо назвати **разломак**, али и **количник**.

Дакле, запис количника $a : b$ је истоветан запису разломка $\frac{a}{b}$, и оба записа можемо користити према потреби.

Пошто смо се подсетили да је запис количника $a : b$ истоветан запису разломка $\frac{a}{b}$, онда следи да:

бројилац a као и дељеник, **може бити било који цео број** и
именилац b као и делилац **може бити било који цео број различит од 0**.

А то значи да се разломци могу представити и као количници целих бројева, укључујући и негативне! Прекопирајмо сада таблицу дељења из поглавља 1.8, и применимо је на дељенике и делиоце различитих предзнака. Другим речима, применимо је на бројиоце и имениоце различитих предзнака и добијамо две истоветне таблице, али са другим записом. Таблицу дељења можемо назвати и таблица разломака.

Дељеник	a	a	$-a$	$-a$
Делилац	b	$-b$	b	$-b$
Количник	$a : b$	$-(a : b)$	$-(a : b)$	$a : b$

(таблица дељења)

↔

Бројилац	a	a	$-a$	$-a$
Именилац	b	$-b$	b	$-b$
Разломак	$\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$

(таблица разломака)

Тако добијамо и различите записе:

запис количника

$$a : b = (-a) : (-b)$$

$$-(a : b) = (-a) : b = a : (-b)$$

запис разломка

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

По узору на дељење целих бројева, можемо сада написати и правило за разломке (наравно, под условом да **именилац не сме бити 0**):

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Разломак је **позитиван** ако бројилац и именилац имају исти предзнак.
Разломак је **негативан** ако бројилац и именилац имају различите предзнаке.
Разломак је 0 ако је бројилац 0.
Разломак је **цео број** ако дељењем бројиоца имениоцем добијемо цео број.

ПРИМЕР 1. Запиши следеће разломке као позитивне разломке, негативне разломке или целе бројеве.

а) $\frac{-7}{4}$; б) $\frac{-3}{-5}$; в) $\frac{9}{3}$; г) $\frac{0}{10}$; д) $\frac{4}{-2}$.

РЕШЕЊЕ а) $\frac{-7}{4}=-\frac{7}{4}$; б) $\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$; в) $\frac{9}{3}=9:3=3$;

г) $\frac{0}{10}=0$; д) $\frac{4}{-2}=-\frac{4}{2}=-(4:2)=-2$.

У лекцији 3.1 смо видели да скуп целих бројева може да се дефинише као унија позитивних разломака Q^+, негативних разломака Q^- и броја 0. Али пошто сада знамо да све бројеве из скупова Q^+ и Q^-, као и број 0, можемо добити као разломке чији имениоци и бројиоци су цели бројеви, можемо **скуп рационалних бројева** Q и другачије да представимо.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

$$Q=\left\{r : r=\frac{a}{b}, a\in Z, 0\neq b\in Z\right\}$$

Читамо: Q је скуп разломака r код којих је бројилац a цео број, а именилац b цео број различит од 0.

Подсетимо се и децималног записа. Сваки позитиван разломак може да се напише и у децималном облику помоћу операције дељења. На пример, децимални запис разломка $\frac{1}{2}$ лако добијамо рачунањем количника 1 : 2 на следећи начин:

$$\frac{1}{2}=1:2=0{,}5$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -\underline{0} \\ 10 \\ -\underline{10} \\ 0 \end{array}$$

А како добијамо децимални запис негативног разломка? Није ни то тешко, јер важи просто правило:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Децимални запис негативног разломка је једнак негативном децималном запису позитивног разломка.

Дакле: $-\frac{1}{2}=-0{,}5$ јер је $\frac{1}{2}=0{,}5$.

Подсетимо се: Проширивање и скраћивање разломака.

Проширивање разломака. Сваки разломак $\frac{a}{b}$ се може проширити било којим целим бројем $n > 1$ тако што помножимо и бројилац и именилац истим бројем n.

Скраћивање разломака. Уколико бројилац a и именилац b имају заједнички делилац $n > 1$, разломак $\frac{a}{b}$ се може скратити тако што поделимо и бројилац и именилац истим бројем n.

проширивање:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$$

скраћивање

$$\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$$

Поступак проширивања и скраћивања негативних разломака се своди на поступак проширивања и скраћивања позитивних разломака, што ћемо показати кроз неколико примера.

ПРИМЕР 2. Запиши у децималном запису:

а) $\frac{3}{-8}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{-11}{5}$; г) $-3\frac{1}{4}$.

РЕШЕЊЕ Израчунајмо прво децималне записе позитивних разломака.

а) $\frac{3}{8}=3:8=0{,}375;$

$$\begin{array}{r} -\underline{0} \\ 30 \\ -\underline{24} \\ 60 \\ -\underline{56} \\ 40 \\ -\underline{40} \\ 0 \end{array}$$

б) $\frac{1}{3}=1:3=0{,}333...=0{,}\dot{3};$

$$\begin{array}{r} -\underline{0} \\ 10 \\ -\underline{9} \\ 10 \\ -\underline{9} \\ 10 \\ -\underline{9} \\ 1... \end{array}$$

в) $\frac{11}{5}=\frac{11\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{22}{10}=2{,}2;$ г) $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=0{,}25.$

Па имамо:

а) $\frac{3}{-8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375;$ б) $-\frac{1}{3}=-0{,}333...=-0{,}\dot{3};$

в) $\frac{-11}{5}=-\frac{11}{5}=-2{,}2;$ г) $-3\frac{1}{4}=-\left(3+\frac{1}{4}\right)=-(3+0{,}25)=-3{,}25.$

ПРИМЕР 3. Следеће бројеве представи записом разломка:

а) $-0,4$; б) $-0,45$; в) $-3,12$; *г) $-0,555\ldots=-0,\dot{5}$.

РЕШЕЊЕ Примере а), б) и в) решавамо тако што прво нађемо облик разломка за позитивне бројеве.

а) $0,4=\frac{4}{10}=\frac{4:2}{10:2}=\frac{2}{5}$, па онда имамо $-0,4=-\frac{2}{5}$.

б) $0,45=\frac{45}{100}=\frac{45:5}{100:5}=\frac{9}{20}$, па онда имамо $-0,45=-\frac{9}{20}$.

в) **<u>I начин:</u>** $3,12=\frac{312}{100}=\frac{312:2}{100:2}=\frac{156}{50}=\frac{78}{25}$, па онда имамо $-3,12=-\frac{78}{25}$.

<u>II начин:</u> $3,12=3+\frac{12}{100}=3+\frac{12:4}{100:4}=3+\frac{3}{25}=3\frac{3}{25}$ па имамо $-3,12=-3\frac{3}{25}$.

*г) Овај пример је мало теже решити. Присети се прво да тачка изнад цифре 5 означава да се цифра 5 у децималном запису понавља унедоглед. Дакле, означимо словом q позитиван разломак $0,555\ldots=0,\dot{5}$.

$$q=0,555\ldots=0,\dot{5}$$

Пошто се цифра 5, понавља, наслућујемо идеју да некако померимо децимални зарез за једно место удесно. Приметимо да ако помножимо број q са 10, децимални зарез се помера за **једно** место удесно.

$$10\cdot q=5,55\ldots=5,\dot{5}$$

Одузмимо сада q од $10\cdot q$, што је исто као да одузмемо $0,\dot{5}$ од $5,\dot{5}$.

Дакле, добијамо: $10\cdot q-q=5,\dot{5}\;-\;0,\dot{5}$

$$(10-1)\cdot q=\overbrace{5+0,\dot{5}}-0,\dot{5}$$

$$9\cdot q=5+(0,\dot{5}-0,\dot{5})$$

$$9\cdot q=5+0$$

$$9\cdot q=5$$

$$q=\frac{5}{9}.$$

Дакле, пошто је $0,\dot{5}=\frac{5}{9}$ добијамо $-0,\dot{5}=-\frac{5}{9}$.

Провера. Проверимо да ли је ово тачно.

$\frac{5}{9}=5:9=0,55\ldots$. Дакле: $\frac{5}{9}=0,555\ldots$, или $-\frac{5}{9}=-0,555\ldots$

```
-0
 50
-45
  50
 -45
   5...
```

На основу овог примера, покушај да покажеш да је $0,\dot{9}$ једнако 1. (Помоћ: Словом q означи број $0,\dot{9}$ па помери децимални зарез за једно место удесно да добијеш $10\cdot q$. Настави...)

ЗАДАЦИ

10. Дат је скуп $S=\left\{\frac{3}{5}, \frac{-17}{4}, 9, -6, \frac{5}{-8}, 0, -2, \frac{-9}{-11}\right\}$. Елементе скупа S запиши као позитивне, или негативне разломке или целе бројеве.

11. Рационалне бројеве $\frac{2}{5}, -\frac{7}{4}, \frac{11}{25}, -\frac{3}{8}$ напиши у децималном облику (запису).

12. Рационалне бројеве –1,75; 0,4; –2,125 и 3,16 напиши у облику позитивног или негативног разломка, тако да је НЗД за бројилац и именилац разломка једнак 1.

13. Скрати разломке и добијене рационалне бројеве напиши у децималном облику (запису):

а) $-\frac{91}{52}$; б) $-\frac{21}{56}$; в) $-\frac{34}{50}$.

14. Рационалне бројеве $\frac{3}{2}, -\frac{4}{5}, \frac{12}{25}, -\frac{7}{20}$ прошири и напиши у децималном облику (запису).

15. Рационалне бројеве $\frac{2}{3}, -\frac{23}{9}, \frac{19}{6}, -\frac{7}{12}$ напиши у децималном облику (запису).

16. Издвој парове једнаких бројева међу следећим записима бројева:

$-2,25; \frac{3}{5}; -0,875; -\frac{9}{4}; -\frac{7}{10}; -\frac{7}{8}; 0,6; -0,7.$

17. Уместо звездица напиши одговарајуће цифре тако да буду тачни искази:

$\frac{*}{20}=0,35; -\frac{*}{25}=-0,36; -\frac{7}{*}=-1,4; -\frac{3}{5}=-0,*; \frac{13}{4}=*,**.$

18. Рационалне бројеве –1,11111... , 2,22222... и –3,33333... запиши у облику позитивног или негативног разломка, чији бројилац и именилац имају НЗД једнак 1.

19. Покажи да је 4,44444... + 5,55555 ... = 10.

20. Дати су рационални бројеви $x = 77,77$ и $y = 77,77777...$ Да ли је $x = y$?

21. Следеће количнике напиши у децималном запису.

а) 3 : 5; б) 7 : (–6); в) –3 : 12.

22. Израчунај $0,\dot{3}-\frac{1}{3}$. (Помоћ: напиши $\frac{1}{3}$ у децималном запису или напиши $0,\dot{3}$ у запису разломка).

23. Бројеве $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$ напиши у децималном запису, а затим одреди који је већи.

3.3. Апсолутна вредност и упоређивање рационалних бројева

Код целих бројева смо констатовали да је апсолутна вредност мера растојања тачке придружене неком броју од координатног почетка 0. Већ смо увидели да и рационалне бројеве, исто као и целе бројеве, можемо представити на бројевној правој. Стога је јасно да и рационални бројеви, исто као и цели бројеви, могу имати своју апсолутну вредност.

Апсолутна вредност рационалног броја $r = \frac{a}{b}$,

означена изразом $|r| = \left|\frac{a}{b}\right|$,

је разломак који означава удаљеност између координатног почетка 0 и тачке придружене рационалном броју r, мерено у јединичним дужинама.

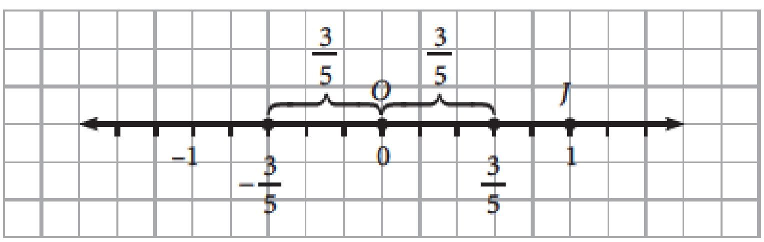
Пошто је апсолутна вредност $|r|$ мера удаљености, јасно је да апсолутна вредност не може бити негативна, тј. $|r| \geq 0$.

ПРИМЕР 1. На бројевној правој означи тачку придружену броју $r = \frac{3}{-5}$ и његовом супротном броју $-r$, и нађи апсолутне вредности оба броја. Дакле: $|r|$ и $|-r|$.

РЕШЕЊЕ Напишимо прво бројеве r и $-r$ на други начин:

$$r = -\frac{3}{5} \qquad \text{и} \qquad -r = \frac{3}{5}.$$

Јасно је да се број r налази на дужини $\frac{3}{5}$ лево од координатног почетка 0, а да се број $-r$ налази на дужини $\frac{3}{5}$ десно од координатног почетка 0. Унесимо их на бројевну праву.



Одстојање броја $-\frac{3}{5}$ од координатног почетка је $\frac{3}{5}$, стога пишемо:

$$|r| = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}.$$

Слично, одстојање броја $\frac{3}{5}$ од координатног почетка је $\frac{3}{5}$, па пишемо:

$$|-r| = \left|-\left(-\frac{3}{5}\right)\right| = \left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}.$$

Из овог примера можемо извући неколико општих закључака.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

1) Апсолутна вредност рационалног броја не може бити негативна. Дакле: $|r| \geq 0$.

2) Супротни бројеви имају једнаке апсолутне вредности. Дакле: $|r| = |-r|$.

3) Апсолутна вредност разломка се може написати као разломак на следећи начин:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$ **Напомена:** $b \neq 0$.

4) Апсолутна вредност броја се добија када се уклоне сви предзнаци „+” и „–”, као и знаци за апсолутну вредност „|”. На пример:

$\cancel{|}\cancel{-}4\frac{3}{5}\cancel{|} \to 4\frac{3}{5}$ или $\cancel{|}\frac{\cancel{-}3}{2}\cancel{|} \to \frac{3}{2}$ или $\cancel{|}\cancel{+}\,7{,}25\cancel{|} \to 7{,}25$.

ПРИМЕР 2. Одреди апсолутне вредности следећих рационалних бројева:

а) $-35{,}71$;

б) $\frac{-11}{3}$;

в) $\frac{3}{-7}$;

г) $\frac{6}{2}$.

РЕШЕЊЕ

а) $|-35{,}71| = |35{,}71| = 35{,}71$; правило 2

б) $\left|\frac{-11}{3}\right| = \frac{|-11|}{|3|} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$; правило 3

в) $\cancel{|}\frac{3}{\cancel{-}7}\cancel{|} = \frac{3}{7}$; правило 4

г) $\left|\frac{6}{2}\right| = \frac{|6|}{|2|} = \frac{6}{2} = 3.$ правило 3

Већ знамо да се упоређивање целих бројева своди на упоређивање њихових апсолутних вредности. У наставку ове лекције, показаћемо да се и упоређивање рационалних бројева такође своди на упоређивање њихових апсолутних вредности. Пошто апсолутне вредности не могу бити негативне, подсетимо се прво како упоређујемо позитивне разломке.

Подсетимо се: Упоређивање позитивних разломака

Упоређивање два позитивна разломка с истим имениоцем. Ако два позитивна разломка $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$ имају исти именилац $n > 0$, онда је већи онај разломак чији бројилац a или b је већи. Другим речима, ако је $a \geq b$, онда је $\frac{a}{n} \geq \frac{b}{n}$.

Упоређивање два позитивна разломка с истим бројиоцем. Ако два позитивна разломка $\frac{m}{a}$ и $\frac{m}{b}$ имају исти бројилац $m > 0$, онда је већи онај разломак чији именилац a или b је мањи. Другим речима, ако је $a \geq b$, онда је $\frac{m}{a} \leq \frac{m}{b}$.

Упоређивање два позитивна разломка проширивањем или скраћивањем разломака. Ако два позитивна разломка имају различите имениоце или бројиоце, онда поступком проширивања или поступком скраћивања разломака, сведемо оба разломка на разломке истих именилаца, или разломке истих бројилаца, па применимо један од два претходна поступка упоређивања.

Упоређивање два позитивна разломка помоћу унакрсних производа. За два позитивна разломка $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$, први унакрсни производ добијамо тако што бројилац првог разломка помножимо имениоцем другог, дакле: $a \cdot d$. Други унакрсни производ добијамо множењем бројиоца другог разломка имениоцем првог, дакле: $b \cdot c$.

$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$ унакрсни производи су:

$a \cdot d$ и $c \cdot b$

Ако је $a \cdot d \geq c \cdot b$, онда је $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{d}$. Важи и обрнуто, ако је $a \cdot d \leq c \cdot b$, онда је $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$.

ПРИМЕР 3. Покажи да је метода упоређивања унакрсних производа начелно исто што и упоређивање разломака с истим имениоцем.

РЕШЕЊЕ Проширимо први разломак имениоцем другог разломка, $\frac{a}{c} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d}$.

Проширимо други разломак имениоцем првог разломка, $\frac{b}{d} = \frac{c \cdot b}{c \cdot d}$.

На овај начин смо написали оба разломка тако да имају исти именилац $c \cdot d$, па можемо применити првило упоређивања позитивних разломака с истим имениоцем. Дакле, први разломак $\frac{a \cdot d}{c \cdot d}$ је већи од другог разломка с истим имениоцем $\frac{c \cdot b}{c \cdot d}$, ако је бројилац првог разломка $a \cdot d$ већи од бројиоца другог разломка $c \cdot b$.

Домаћи задатак. Покажи да је метода упоређивања унакрсних производа начелно исто што и упоређивање разломака с истим бројиоцем. (**Помоћ:** прошири први разломак бројиоцем другог, а онда други бројиоцем првог...)

ПРИМЕР 4. Поређај следеће позитивне разломке по величини. $\frac{5}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{8}{3}$ и $\frac{3}{2}$.

РЕШЕЊЕ а) Упоредимо прво два разломка с истим имениоцем, дакле: $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$.

б) Упоредимо сада два разломка с истим бројиоцем, дакле: $\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$.

Комбинујмо с решењем под а) и добијамо: $\frac{3}{4} < \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$.

в) Упоредимо сада $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{6}$ помоћу проширивања оба разломака тако да нови именилац буде једнак најмањем заједничком садржаоцу два имениоца $НЗС(4,6) = 12$. Дакле, именилац 4 множимо бројем 3, да бисмо добили 12, а именилац 6 множимо бројем 2 да бисмо добили 12. Тако је $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ и $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{8}{12}$ па имамо:

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} < \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Комбинујмо с решењем под б) и добијамо: $\frac{4}{6} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$.

г) Упоредимо сада $\frac{5}{2}$ и $\frac{8}{3}$ помоћу унакрсног производа. Први унакрсни производ је $5 \cdot 3 = 15$, а други је $8 \cdot 2 = 16$. Пошто је први унакрсни производ мањи од другог, следи да је први разломак мањи од другог. Стога имамао: $\frac{5}{2} < \frac{8}{3}$.

Комбинујмо с решењем под в) и добијамо коначно решење: $\frac{4}{6} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2} < \frac{5}{2} < \frac{8}{3}$.

Позабавимо се сада поређењем свих рационалних бројева, дакле, и негативних. Уверили смо се да, слично целим бројевима, и рационални бројеви могу бити негативни, а имају и своју апсолутну вредност. Дакле, рационални бројеви имају готово све особине које имају и цели бројеви. Стога не би требало да буде изненађујуће да је поступак поређења рационалних бројева истоветан поступку поређења целих бројева. Препишимо тај поступак, па урадимо неколико примера.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Сваки позитиван број је већи од сваког негативног броја.
Сваки позитиван број је већи од броја 0.
Сваки негативан број је мањи од броја 0.
Ако упоређујемо два **позитивна броја, већи** је онај који има **већу апсолутну вредност**.
Ако упоређујемо два **негативна броја, мањи** је онај који има **већу апсолутну вредност**.

Дакле, упоређивање рационалних бројева се своди на препознавање позитивних и негативних бројева, као и на упоређивање апсолутних вредности. Како апсолутне вредности никад нису негативне, упоређивање се своди на упоређивање позитивних бројева.

ПРИМЕР 5. Поређај следеће целе бројеве по величини: $-\frac{5}{2}, \frac{3}{-4}, \frac{4}{6}, 0, \frac{-8}{3}$ и $\frac{-3}{-2}$.

РЕШЕЊЕ Одредимо прво који бројеви су негативни, а који позитивни.

1) Негативни бројеви су $-\frac{5}{2}, \frac{3}{-4}$ и $\frac{-8}{3}$. Њихове одговарајуће апсолутне вредности су позитивни бројеви $\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}, \left|\frac{3}{-4}\right|=\frac{3}{4}$ и $\left|\frac{-8}{3}\right|=\frac{8}{3}$. Из Примера 4 већ знамо да упоредимо ове позитивне бројеве, а ако нисте прочитали Пример 4, уверите се да су апсолутне вредности поређане у опадајућем редоследу на следећи начин $\frac{8}{3}>\frac{5}{2}>\frac{3}{4}$. А то значи да су одговарајући негативни бројеви поређани у растућем редоследу: $-\frac{8}{3}<-\frac{5}{2}<-\frac{3}{4}$.

2) Понуђени позитивни бројеви су $\frac{4}{6}$ и $\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$, а и њих смо већ упоредили у Примеру 4, а ако нисте прочитали Пример 4, уверите се да за понуђене позитивне бројеве важи: $\frac{4}{6}<\frac{3}{2}$.

3) Убацимо само још број 0 између негативних и позитивних бројева и добијамо коначно решење: $-\frac{8}{3}<-\frac{5}{2}<-\frac{3}{4}<0<\frac{4}{6}<\frac{3}{2}$.

ЗАДАЦИ

24. Одреди апсолутне вредности бројева: $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, 7, -\frac{8}{9}$, 4,32.

25. Одреди бројеве супротне бројевима: $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{6}{5}, 0$.

26. Одреди бројеве супротне бројевима: $-\frac{3}{8}, -\frac{5}{12}, -\frac{7}{4}, -\frac{9}{2}$.

27. Доведи на заједнички именилац и упореди рационалне бројеве: $-\frac{2}{9}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{3}, 2, -1$.

28. Поређај у растући низ рационалне бројеве: $-\frac{13}{5}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}, 1$.

29. Користећи унакрсне производе упореди рационалне бројеве:

а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{8}$; б) $\frac{13}{10}$ и $\frac{9}{7}$.

30. Упореди рационалне бројеве: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -1$.

31. За које природне бројеве n је $\frac{3}{5}<\frac{4}{n}$?

3.4. Сабирање и одузимање рационалних бројева

Сабирање и одузимање рационалних бројева је исто што и сабирање и одузимање разломака, али сада поред позитивних имамо и негативне разломке. Подсетимо се неких правила сабирања и одузимања разломака, која важе и за све рационалне бројеве.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Збир два рационална броја $\frac{a}{n}$ и $\frac{c}{n}$ који имају исти именилац n, је разломак коме је бројилац једнак збиру два бројиоца $a + c$, а именилац n остаје непромењен, дакле:

$$\frac{a}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+c}{n}.$$

Разлика два рационална броја $\frac{a}{n}$ и $\frac{c}{n}$ који имају исти именилац n је разломак коме је бројилац једнак разлици два бројиоца $a - c$, а именилац n остаје непромењен, дакле:

$$\frac{a}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a-c}{n}.$$

Само треба водити рачуна да понекад морамо разломке проширити или скратити тако да имају исти именилац. Урадимо неколико примера.

ПРИМЕР 1. Израчунај:

а) $\frac{3}{-5}-\frac{2}{5}$; б) $\frac{4}{3}+\frac{13}{-3}$; в) $-\frac{2}{5}+0{,}6$; г) $1\frac{3}{4}-\frac{11}{6}$.

РЕШЕЊЕ а) Именилац оба броја је 5, тако да одмах можемо да рачунамо:

$$\frac{3}{-5}-\frac{2}{5}=\frac{-3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{-3-2}{5}=\frac{-5}{5}=-\frac{5}{5}=-\frac{5:5}{5:5}=-\frac{1}{1}=-1.$$

б) Именилац оба броја је 3, тако да одмах можемо да рачунамо:

$$\frac{4}{3}+\frac{13}{-3}=\frac{4}{3}+\frac{-13}{3}=\frac{4+(-13)}{3}=\frac{-9}{3}=-\frac{9}{3}=-\frac{9:3}{3:3}=-\frac{3}{1}=-3.$$

в) Можемо применити поступак скраћивања разломка тако да именилац другог сабирка постане једнак имениоцу првог сабирка. Други сабирак је $0{,}6=\frac{6}{10}=\frac{6:2}{10:2}=\frac{3}{5}$. Сада је јасно да оба сабирка имају исти именилац 5, па можемо да рачунамо:

$$-\frac{2}{5}+0{,}6=\frac{-2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{-2+3}{5}=\frac{1}{5}.$$

г) Умањеник има именилац 4, а умањилац 6. Да бисмо свели умањеник и умањилац на исти именилац, нађимо најмањи заједнички садржалац броја 4 и броја 6. То је број 12. Проширимо умањеник и умањилац тако да оба имају именилац 12.

Умањеник постаје: $1\frac{3}{4}=\frac{1\cdot4+3}{4}=\frac{7}{4}=\frac{7\cdot3}{4\cdot3}=\frac{21}{12}$; а умањилац: $\frac{11}{6}=\frac{11\cdot2}{6\cdot2}=\frac{22}{12}$.

Нађимо сада разлику: $1\frac{3}{4}-\frac{11}{6}=\frac{21}{12}-\frac{22}{12}=\frac{21-22}{12}=\frac{-1}{12}=-\frac{1}{12}$.

ПРИМЕР 2. Израчунај:

а) $\frac{3}{-4}-\frac{2}{5}$; б) $\frac{4}{9}+\frac{13}{-6}$;

в) $-\frac{4}{9}+0{,}6$; г) $1\frac{3}{5}-\frac{11}{3}$;

РЕШЕЊЕ а) $\frac{3}{-4}-\frac{2}{5}=\frac{3\cdot5-(-4)\cdot2}{(-4)\cdot5}=\frac{15+8}{-20}=\frac{23}{-20}=-\frac{23}{20}=-1\frac{3}{20}$.

б) Прво напишимо израз тако да оба разломка у изразу имају позитивне имениоце:

$$\frac{4}{9}+\frac{13}{-6}=\frac{4}{9}-\frac{13}{6}.$$

Сада нађимо НЗС оба имениоца: НЗС(9, 6) = 18. Проширимо сваки од разломака у изразу тако да оба имениоца буду 18.

$$\frac{4}{9}-\frac{13}{6}=\frac{4\cdot2}{9\cdot2}-\frac{13\cdot3}{6\cdot3}=\frac{8-39}{18}=-\frac{31}{18}=-1\frac{13}{18}.$$

в) $-\frac{4}{9}+0{,}6=\frac{-4}{9}+0{,}6=\frac{-4}{9}+\frac{6}{10}=\frac{(-4)\cdot10+9\cdot6}{9\cdot10}=\frac{-40+54}{90}=\frac{14}{90}=\frac{14:2}{90:2}=\frac{7}{45}$.

г) $1\frac{3}{5}-\frac{11}{3}=\frac{1\cdot5+3}{5}-\frac{11}{3}=\frac{8}{5}-\frac{11}{3}=\frac{8\cdot3-5\cdot11}{5\cdot3}=\frac{24-55}{15}=\frac{-31}{15}=-\frac{31}{15}=-2\frac{1}{15}$.

За крај лекције, подсетимо се и особина сабирања, која важе и за рационалне бројеве.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су p, q и r три рационална броја, тада важи:

$p+q=q+p$	**Комутативност.** Редослед сабирака се може променити.
$p+q+r=(p+q)+r=p+(q+r)$	**Асоцијативност.** Сабирци се могу произвољно груписати.
$p+0=0+p=p$	Нула је **неутрални елемент сабирања.**

(**Напомена:** Сваки од бројева p, q и r може да се напише као разломак.)

Такође, и за рационалне бројеве q и r важе већ позната правила елиминисања заграда.

Прво правило елиминисања заграда

$$+(q+r)=+q+r$$
$$+(q-r)=+q-r$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Кад је испред заграде +, заграду обриши, а предзнаке упиши.

Друго правило елиминисања заграда

$$-(q+r)=-q-r$$
$$-(q-r)=-q+r$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Кад је испред заграде –, заграду обриши, а предзнаке супротнима замени.

ПРИМЕР 3. Израчунај $-p-(q-r)$, за следеће случајеве:

а) $p=\frac{3}{4}$, $q=1{,}25$ и $r=-2:5$. б) $p=-2\frac{3}{4}$, $q=-\frac{5}{3}$ и $r=\frac{1}{3}$.

РЕШЕЊЕ Коришћењем правила елиминисања заграда, уочимо да важи следеће:

$$-p-(q-r)=-p-q+r=-(p+q)+r,$$

тако да можемо користити било који од горња три израза.

а) Сва три броја се лако могу записати у децималном облику јер је $p=0{,}75$, а $r=-0{,}4$.

Пошто се у овом случају p и q лако сабирају, израчунајмо вредност следећег израза:

$$-(p+q)+r=-(0{,}75+1{,}25)+(-0{,}4)=-2+(-0{,}4)=$$
$$=-2-0{,}4=-2{,}4=-2\frac{4}{10}=-2\frac{2}{5}.$$

б) У овом случају q и r имају исти именилац па је најлакше израчунати вредност израза у изворном облику:

$$-p-(q-r)=-\left(-2\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)=2\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)=$$
$$=2\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)=2\frac{3}{4}+\frac{6}{3}=2\frac{3}{4}+2=4\frac{3}{4}.$$

ПРИМЕР 4. Ана жели да направи ручак за Божић, али је схватила да нема довољно брашна за своје потребе, а радње су већ затворене. Има код куће 1,25 килограма брашна, а треба јој $\frac{3}{4}$ килограма брашна да умеси погачу, затим 0,3 килограма брашна за резанце и 0,5 килограма брашна за палачинке. Колико ће брашна Ана морати да позајми од комшије?

РЕШЕЊЕ Ана већ има 1,25 килограма. Ако од тога одузмемо њене потребе $\left(\frac{3}{4}+0{,}3+0{,}5\right)$, добићемо број који тражимо. Овде је најлакше рачунати с бројевима у децималном запису, па зато претворимо прво број $\frac{3}{4}$ у децимални запис $\frac{3}{4}=0{,}75$. Сада имамо:

$$1{,}25-\left(\frac{3}{4}+0{,}3+0{,}5\right)=1{,}25-(0{,}75+0{,}3+0{,}5)=1{,}25-1{,}55=-0{,}3.$$

Негативна разлика $-0{,}3$ значи да је Ана „у минусу” $0{,}3$ килограма брашна, те ће морати $0{,}3$ килограма брашна да позајми од комшије.

ЗАДАЦИ

32. Израчунај вредност израза: а) $\frac{2}{3}+\frac{17}{-3}$; б) $\frac{-3}{4}+\frac{19}{4}$; в) $\frac{-2}{5}+0{,}8$; г) $\frac{15}{-4}+2{,}25$.

33. Одреди вредност израза: а) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{19}{2}+\left(-\frac{5}{8}\right)$; б) $\left(-\frac{14}{27}\right)+\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{9}\right)$.

34. Одреди вредност израза: 1,37 – 2,48 + 3,69 – 4,51.

35. Да ли је тачна једнакост: $\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{2}{3}=\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{7}{6}$?

36. Шта је веће: $(-0{,}75)+0{,}4$ или $1{,}3-2{,}25$?

37. Упореди вредности израза $A=0{,}4-\left(-\frac{1}{2}\right)$, $B=-1{,}75+\left(-\frac{3}{5}\right)$ и $C=\left(-\frac{6}{5}\right)+2{,}5$.

38. Збиру бројева $\left(-\frac{5}{4}\right)$ и $\frac{7}{3}$ додај њихову разлику.

39. Од збира бројева $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{2}{3}$ одузми њихову разлику.

40. Израчунај вредност изараза: $(2-(-2-(-2-(-2))))$.

41. Докажи да је: $\left(-\frac{4}{11}\right)+\left(-\frac{5}{11}\right)+\left(-\frac{6}{11}\right)=-\left(\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{8}{11}\right)$.

42. Израчунај вредност израза: $\frac{1}{5}-\left\{\left[\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{3}{5}\right]-\frac{4}{5}\right\}$.

43. Ако је a рационалан број, колико је $a+|a|+(-a)$?

3.5. Множење рационалних бројева

Особине множења разломака смо научили у 5. разреду. Пошто су рационални бројеви заправо разломци чији бројиоци могу бити сви цели бројеви, а имениоци цели бројеви различити од 0, вероватно нагађаш да су особине множења рационалних бројева сличне особинама множења разломака. Напишимо сада особине множења рационалних бројева.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$ два рационална броја, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, тада је њихов производ разломак, чији бројилац је производ бројилаца $a \cdot b$, а именилац је производ именилаца $c \cdot d$.

Дакле, $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$.

множи пратећи стрелице

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} \rightarrow \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

Напомена: Подсети се и следећих специјалних случајева:

$$a \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot d} = \frac{a \cdot b}{d} \qquad \text{за } c = 1;$$

$$\frac{a}{c} \cdot b = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} = \frac{a \cdot b}{c} \qquad \text{за } d = 1.$$

множи пратећи стрелице

$$a \cdot \frac{b}{d} \rightarrow \frac{a \cdot b}{d}$$

$$\frac{a}{c} \cdot b \rightarrow \frac{a \cdot b}{c}$$

ПРИМЕР 1. Израчунај производе рационалних бројева:

а) $\frac{5}{8} \cdot \frac{-2}{3}$; б) $-\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$;

в) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$; г) $-4 \cdot \frac{2}{7}$; д) $\frac{-3}{5} \cdot 3$.

РЕШЕЊЕ а) $\frac{5}{8} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{5 \cdot (-2)}{8 \cdot 3} = \frac{-10}{24} = -\frac{10}{24} = -\frac{10:2}{24:2} = -\frac{5}{12}$;

б) $-\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = -\frac{6}{35}$;

в) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-7}{3} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{(-7) \cdot (-3)}{3 \cdot 2} = \frac{21}{6} = \frac{21:3}{6:3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$;

г) $-4 \cdot \frac{2}{7} = -\frac{4 \cdot 2}{7} = -\frac{8}{7} = -1\frac{1}{7}$;

д) $\frac{-3}{5} \cdot 3 = \frac{-3 \cdot 3}{5} = \frac{-9}{5} = -\frac{9}{5} = -1\frac{4}{5}$.

У неколико претходних примера видели смо да смо могли неке разломке и да скратимо. Скраћивање производа можемо радити и тако што ћемо скратити бројилац једног разломка са имениоцем другог.

ПРИМЕР 2. Израчунај производе рационалних бројева:

а) $\frac{5}{8}\cdot\frac{-2}{3}$; б) $-\frac{12}{15}\cdot\frac{5}{6}$; в) $-1\frac{1}{3}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$; г) $-4\cdot\frac{1}{8}$; д) $\frac{-5}{6}\cdot 3$.

РЕШЕЊЕ Скраћиваћемо разломке пре множења.

а) $\frac{5}{8}\cdot\frac{-2}{3}=\frac{5}{\cancel{8}^{4}}\cdot\frac{-\cancel{2}^{1}}{3}=\frac{5\cdot(-1)}{4\cdot 3}=\frac{-5}{12}=-\frac{5}{12}$;

б) $-\frac{12}{15}\cdot\frac{5}{6}=\frac{-\cancel{12}^{2}}{\cancel{15}^{3}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}^{1}}=-\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}=-\frac{2}{3}$;

в) $-1\frac{1}{3}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}^{1}}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}^{1}}\right)=-\frac{2}{1}\cdot\left(-\frac{1}{1}\right)=\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}=\frac{2}{1}=2$;

г) $-4\cdot\frac{1}{8}=-\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{8}=-\frac{\cancel{4}^{1}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{8}^{2}}=-\frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}=-\frac{1}{2}$;

д) $\frac{-5}{6}\cdot 3=-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{1}=-\frac{5}{\cancel{6}^{2}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{1}=-\frac{5\cdot 1}{2\cdot 1}=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$.

Подсетимо се сада правила одређивања предзнака производа када производ чини неколико чинилаца. Уверимо се у тачност следећих једнакости:

а) $1\cdot(-1)=-1$;

б) $1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$;

в) $1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}$;

г) $1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$;

д) $1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{-3}\right)=-\frac{1}{36}$.

И уочимо следеће правило:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако нити један чинилац није једнак нули,
производ је позитиван када производ
чини паран број негативних чинилаца, а

производ је негативан када производ
чини непаран број негативних чинилаца.

ПРИМЕР 3. Примени брз начин одређивања предзнака производа, као и скраћивања бројиоца једног разломка имениоцем другог разломка, да брзо израчунаш производе.

а) $-\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$; б) $-4\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{5}{-6}$; в) $-1\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{-15}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)$; г) $1{,}25\cdot\frac{-2}{35}\cdot3\frac{1}{2}$.

РЕШЕЊЕ а) $-\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{10}^2}\cdot\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{9}^3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{1}{\cancel{2}^1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{7}=\frac{1}{21}$;

б) $-\cancel{4}^2\cdot\frac{-\cancel{3}^1}{\cancel{2}^1}\cdot\frac{5}{-\cancel{6}^2}=-\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}=-5$;

в) $-1\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{-15}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)=-\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}^1}\cdot\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{3}^1}\cdot\frac{\cancel{8}^4}{\cancel{15}^3}\cdot\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{14}^2}=-\frac{\cancel{4}^2}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}^1}=-\frac{2}{3}$;

г) $1{,}25\cdot\frac{-2}{35}\cdot3\frac{1}{2}=-\frac{\cancel{125}^{25}}{100}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{35}^7}\cdot\frac{7}{\cancel{2}^1}=-\frac{25}{100}\cdot\frac{7}{7}=-\frac{\cancel{25}^1}{\cancel{100}^4}\cdot\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{7}^1}=-\frac{1}{4}$.

Подсетимо се и осталих особина множења, јер оне важе и за рационалне бројеве:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су p, q и r три цела броја, тада важи:

$q\cdot r=r\cdot q$	**Комутативност.** Редослед чинилаца се може променити.
$p\cdot q\cdot r=(p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)$	**Асоцијативност.** Чиниоци се могу произвољно груписати.
$r\cdot1=1\cdot r=r$	Број 1 је **неутрални елемент множења.**
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	**Дистрибутивност множења према сабирању и**
$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$	**множења према одузимању.**
$-1\cdot r=-r$ или $-1\cdot(-r)=r$	**Множење бројем –1.**
$r\cdot0=0\cdot r=0$	**Множење нулом.**

Напомена. Сваки од бројева p, q и r може имати облик разломка.

ПРИМЕР 4. Користећи особину дистрибутивности, израчунај вредности следећих израза:

а) $-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{-15}\right)$; б) $\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-1\frac{1}{4}\right)$; в) $\left(\frac{2}{9}-\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)\cdot3$.

РЕШЕЊЕ а) $-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{-15}\right)=\frac{-5}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{-5}{2}\cdot\frac{4}{-15}=-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{-3\cdot3+2\cdot2}{2\cdot3}=\frac{-9+4}{6}=-\frac{5}{6}$;

б) $\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-1\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{10}\cdot\frac{-2}{3}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}-\frac{3}{10}\cdot1\frac{1}{4}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{4}=$

$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1\cdot8}{5\cdot8}+\frac{1\cdot10}{4\cdot10}-\frac{3\cdot5}{8\cdot5}=\frac{-8+10-15}{40}=-\frac{13}{40}$;

в) $\left(\frac{2}{9}-\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)\cdot3=\frac{2\cdot3}{9}-\frac{3\cdot3}{7}-\frac{2\cdot3}{3}=\frac{2}{3}-\frac{9}{7}-2=\frac{2\cdot7}{3\cdot7}-\frac{9\cdot3}{7\cdot3}-\frac{2\cdot21}{21}=$

$=\frac{14-27-42}{21}=-\frac{55}{21}=-2\frac{13}{21}$.

Сажет запис множења. У математици, као и у разговору, често користимо сажет говор. На пример, када говоримо, кажемо „пет јабука", а не кажемо „пет пута јабука". Слично је и у математици. У неким случајевима када не постоји могућност да се збунимо, нећемо писати знак „ · ", а ни изговарати реч „пута". На пример, писаћемо 5 , а не 5 · , и изговарати „пет јабука", а не „пет пута јабука".

Наравно, у математици, као и у физици коју такође учите ове године, нећемо цртати јабучице као да смо у првом разреду, већ ћемо неке величине називати словима. Те величине обично зовемо **неодређене величине или непознате**, и обележавамо их малим словима латинице, на пример x, или y, или a, или r... Тако ћемо уместо $5 \cdot x$ писати $5x$, а изговарати једноставно „пет икс". Ово је само један пример када знак „ · " можемо изоставити између чинилаца 5 и x.

Усвојимо сада и остала правила када се знак множења „ · " између чинилаца може изоставити.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

ИЗОСТАВИ ЗНАК „ · "

када се бројем множи непозната $\frac{5}{3} \cdot x = \frac{5}{3}x$;

када се бројем множи израз у загради $\frac{1}{4} \cdot \left(a + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(a + \frac{2}{3}\right)$;

када се непознатом множи друга непозната $x \cdot y = xy$;

када се непознатом множи израз у загради $x \cdot \left|\frac{2}{5} - b\right| = x\left|\frac{2}{5} - b\right|$;

и обрнуто $\left[2\frac{1}{8} + c\right] \cdot y = \left[2\frac{1}{8} + c\right]y$;

када се изразом у загради множи други израз у загради $\left\{\frac{1}{2} + d\right\} \cdot \left|-3\frac{1}{7} + 1\right| = \left\{\frac{1}{2} + d\right\}\left|-3\frac{1}{7} + 1\right|$.

Напомена: У овом правилу, са знацима апсолутне вредности, можемо поступати као са заградама.

ПРИМЕР 5. Израчунај вредност израза $\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + \frac{3}{10}\right)$.

РЕШЕЊЕ $\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-8 - 15 + 3}{10}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-20}{10} = \frac{-20}{2 \cdot 10} = -1.$

ПРИМЕР 6. Израчунај вредност израза $-\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$, ако је $x = -\frac{10}{3}$.

РЕШЕЊЕ $-\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{10}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{10}^5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$

ПРИМЕР 7. Израчунај вредност израза $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x$, ако је $x=-\frac{2}{5}$.

РЕШЕЊЕ <u>**I начин.**</u> Применимо прво закон дистрибутивности тако да чинилац x остане иза заграде, па тек на крају заменимо вредност броја $x=-\frac{2}{5}$ у израз.

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x=\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)x=\left(\frac{-2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}\right)x=\left(\frac{-3}{6}\right)x=-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{2\cdot 5}=\frac{1}{5}$$

Тек на крају замењујемо вредност броја x.

<u>**II начин.**</u> Заменимо вредност броја $x=-\frac{2}{5}$ на самом почетку.

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x=-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{15}-\frac{2}{30}=\frac{4}{15}-\frac{2:2}{30:2}=\frac{4}{15}-\frac{1}{15}=\frac{3}{15}=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{15}_{5}}=\frac{1}{5}$$

Одмах замењујемо вредност броја x.

ЗАДАЦИ

44. Израчунај: а) $\frac{3}{4}\cdot(-8)$; б) $\frac{7}{5}\cdot(-35)$; в) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot 24$; г) $\left(-\frac{9}{14}\right)\cdot 21$.

45. Одреди вредност производа: а) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{15}{22}\right)$; б) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{21}{35}$; в) $\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{28}{33}\right)$.

46. Израчунај: а) $2\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{26}{55}\right)$; б) $-1\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{25}{44}\right)$; в) $3\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{21}{13}\right)$.

47. Одреди вредност производа: а) $6{,}4\cdot(-2{,}75)$; б) $(-1{,}2)\cdot 7{,}5$; в) $(-4{,}32)\cdot(-3{,}5)$.

48. Одреди производ $(-5)\cdot x$, ако је x једнако: а) $\frac{4}{15}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $-\frac{7}{25}$; г) $-\frac{9}{35}$.

49. Израчунај $x\cdot y$ ако је: а) $x=-0{,}8$ и $y=\frac{45}{56}$; б) $x=\frac{2}{3}$ и $y=-3{,}6$; в) $x=-\frac{17}{21}$ и $y=0{,}63$.

50. Провери да ли је: $-3\cdot(4{,}25+7{,}65)=(-3)\cdot 4{,}25+(-3)\cdot 7{,}6$.

51. Колико је $(-3)\cdot 96+(-4)\cdot 3$?

52. Поређај од најмањег до највећег збир, разлику и производ бројева $-\frac{4}{9}$ и $\frac{27}{2}$.

53. Ако је $x=-\frac{3}{7}$ упореди бројеве: а) $7\cdot x$ и $21\cdot x$; б) $14\cdot x$ и $-7\cdot x$; в) $-35\cdot x$ и $-28\cdot x$.

3.6. Дељење рационалних бројева

Подсетимо се: У 5. разреду смо научили да сваки позитиван разломак $\frac{a}{b}$ има свој реципрочан разломак $\frac{b}{a}$, уз услов $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тако су, на пример, бројеви $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$ реципрочни један другом. Својство реципрочних бројева је да је њихов производ једнак 1. Тако имамо:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1; \qquad \text{или конкретно:} \qquad \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 3}=1.$$

Сваки рационалан број различит од нуле, такође има себи реципрочан број.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Два рационална броја чији производ је 1 називамо **реципрочни бројеви**.

Ако је $\frac{a}{b}$ рационалан број, тада је њему реципрочан број једнак броју $\frac{b}{a}$, јер је

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1.$$

Овде мора бити $a \neq 0$ и $b \neq 0$ јер 0 не може бити именилац.

Напомена: Не постоји број реципрочан броју 0.

Приметимо: Негативан број је реципрочан негативном броју.
Позитиван број је реципрочан позитивном броју.

ПРИМЕР 1. Одреди реципрочне бројеве следећим бројевима:

а) $\frac{2}{5}$; б) $-\frac{5}{3}$; в) $-1{,}125$;

г) 0; д) $3\frac{4}{7}$; ђ) $\frac{-2}{9}$.

РЕШЕЊЕ

а) $\frac{5}{2}$;

б) $-\frac{3}{5}$;

в) $-1{,}125=-\frac{1125}{1000}$, па је реципрочан број једнак $-\frac{1000}{1125}=-\frac{1000:125}{1125:125}=-\frac{8}{9}$;

г) Не постоји решење јер 0 нема себи реципрочан број;

д) $3\frac{4}{7}=\frac{25}{7}$, па је реципрочан број једнак $\frac{7}{25}$;

ђ) $-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}=-4{,}5$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако је дељеник рационалан број $\frac{a}{b}$,

а делилац рационалан број $\frac{c}{d}$,

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ обрни $\longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

дељење замени множењем

тада је њихов количник једнак $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Напомена. Овде мора бити $b \neq 0$ јер је b именилац дељеника, а именилац не може бити 0.

Такође мора бити $d \neq 0$ јер је d именилац делиоца, а именилац не може бити 0.

И коначно, мора бити $c \neq 0$ јер делилац $\frac{c}{d}$ не може бити 0.

ПРИМЕР 2. Израчунај следеће количнике:

а) $-\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$; б) $2\frac{1}{3} : \frac{-14}{9}$; в) $-1{,}53 : \frac{17}{5}$; г) $-2\frac{1}{4} : (-1{,}5)$.

РЕШЕЊЕ До решења стижемо применом правила „дељење је исто што и множење реципрочним бројем", али претходно ћемо све дељенике и делиоце да напишемо као разломке.

а) Пошто су и дељеник и делилац већ у облику разломка, одмах приступамо рачунању:

$$-\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

б) Уверимо се да дељеник можемо написати као разломак $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, па рачунајмо:

$$2\frac{1}{3} : \frac{-14}{9} = \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{-14} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}^{1}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{-\cancel{14}^{2}} = -\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}.$$

в) Уверимо се да дељеник можемо написати као разломак $-1{,}53 = -\frac{153}{100}$, па рачунајмо:

$$-1{,}53 : \frac{17}{5} = -\frac{153}{100} : \frac{17}{5} = -\frac{153}{100} \cdot \frac{5}{17} = -\frac{\cancel{153}^{9}}{\cancel{100}^{20}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{17}^{1}} = -\frac{9}{20} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{9}{20}.$$

г) Напишимо дељеник и делилац у облику разломка $-2\frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$ и $-1{,}5 = -\frac{3}{2}$, па рачунајмо:

$$-2\frac{1}{4} : (-1{,}5) = \frac{9}{4} : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}^{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}^{1}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Подсетимо се: Када рачунамо дугачке изразе са мноштвом операција, предност имају изрази у заградама, затим операције множења и дељења слева надесно, па сабирања и одузимања слева надесно.

Редослед:

1. обичне ( ) , па угласте [ ], па витичасте { }
2. множење „ · ” и дељење „ : ”

ПРИМЕР 3. Израчунај вредност израза $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}a:\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)-\frac{1}{3}$ за $a=\frac{1}{5}$.

Напомена. Овде рачунање није тешко, али је пример састављен тако да се лако може погрешити у редоследу операција. Зато ћемо се строго држати правила.

РЕШЕЊЕ Кренимо редом, прво израз у загради,

$$-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}a:\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)}_{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}a:\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}$$

прво · па онда :

па множење и дељење, слева надесно.

Води рачуна да испред броја a заправо стоји множење. Дакле, прво иде множење, па дељење које је множење реципрочним бројем.

Замени вредност $a=\frac{1}{5}$, па рачунај.

$$-\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5}}_{\frac{1}{4}}:\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{1}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Већ смо се неколико пута уверили да се дељење може представити као разломак, дакле:

$$a:b=\frac{a}{b}\qquad(b\neq 0).$$

Шта мислиш, да ли онда дељење разломака можемо представити као нови разломак? Вероватно наслућујеш одговор. **ДА**. Није тешко. Пратимо већ проверен рецепт:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Количник два рационална броја се увек може представити као разломак у коме дељеник постаје бројилац, а делилац постаје именилац.

Овако добијен разломак се назива **двојни разломак**. У двојном разломку имамо три разломачке црте. Средња се назива **главна разломачка црта**, и увек је треба учинити дужом или дебљом од остале две **споредне разломачке црте**.

дељеник, делилац

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

← бројилац

← именилац

(Напомена: $b\neq 0$; $d\neq 0$; $c\neq 0$.)

Пошто већ знамо како да делимо рационалне бројеве, а сада знамо и како да количник рационалних бројева напишемо као разломак, добијамо следећу једнакост коју можемо написати на два начина (уз услове $b \neq 0$; $d \neq 0$ и $c \neq 0$).

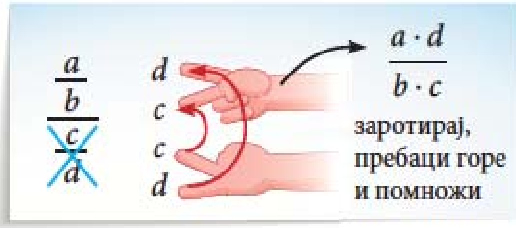
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \text{или} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Из овога следи просто правило свођења двојног разломка на обичан разломак:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Двојни разломак сводимо тако што доњи разломак заротирамо око главне разломачке црте и пребацимо горе.

Помаже да замислимо доњи разломак на својим прстима, па ротирамо целу шаку.



А можемо ово правило и на други начин исказати.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Двојни разломак сводимо тако што производ спољашњих елемената постаје бројилац, а производ унутрашњих елемената постаје именилац.

ПРИМЕР 4. Сведи следеће двојне разломке на обичне разломке:

а) $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{-3}{4}}$; б) $\frac{-1\frac{2}{3}}{\frac{5}{-6}}$; в) $\frac{-2{,}4}{3\frac{3}{5}}$.

РЕШЕЊЕ а) И бројилац и именилац су већ у облику разломка, па имамо:

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{-3}{4}} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot (-3)} = -\frac{36}{6} = -6.$$

У следећа два решења, прво претварамо и именилац и бројилац у разломке, а затим сводимо двојни разломак на обичан разломак.

б) $\frac{-1\frac{2}{3}}{\frac{5}{-6}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{-6}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 5} = 2$; в) $\frac{-2{,}4}{3\frac{3}{5}} = \frac{-\frac{24}{10}}{\frac{18}{5}} = -\frac{24 \cdot 5}{18 \cdot 10} = -\frac{2}{3}$.

Вратимо се само још мало на реципрочне бројеве.

ПРИМЕР 5. Ако је $r=\frac{a}{b}$ рационалан број различит од 0 за који важи и $b\neq 0$, провери да ли се његов реципрочан број може написати као двојни разломак $\frac{1}{r}$.

РЕШЕЊЕ <u>I начин:</u> $\frac{1}{r}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}}=\frac{1\cdot b}{1\cdot a}=\frac{b}{a}$ и видимо да је то реципрочан број броју $r=\frac{a}{b}$.

<u>II начин:</u> Нађимо производ два броја r и $\frac{1}{r}$. Добијамо $r\cdot\frac{1}{r}=\frac{r\cdot 1}{r}=\frac{r}{r}=1$. Пошто је производ једнак 1, то значи да су два броја r и $\frac{1}{r}$ реципрочни један другом.

Из овог примера изводимо општи закључак.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

А) Рационалном броју $r\neq 0$ је реципрочан број $\frac{1}{r}$.

Б) Дељење рационалним бројем $r\neq 0$ је исто што и множење реципрочним бројем $\frac{1}{r}$.

И за крај ове лекције, уочимо неке сличности међу операцијама. Још од ране основне школе смо уочили да су сабирање и одузимање **супротне** операције. Сличну особину имају множење и дељење, за које кажемо да су **реципрочне** операције. Управо због ових особина се одузимање може представити сабирањем, а дељење множењем. Дакле, имамо два једноставна правила.

Одузимање је <u>супротно</u> сабирању.

$$p-q=p+(-q)$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$$

(Напомена: $b\neq 0; d\neq 0.$)

Дељење је <u>реципрочно</u> множењу.

$$p:q=p\cdot\frac{1}{q}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

(Напомена: $q\neq 0; b\neq 0; d\neq 0; c\neq 0.$)

ЗАДАЦИ

54. Израчунај: а) $(-18) : 3$; б) $28 : (-4)$; в) $(-36) : (-12)$; г) $(-45) : 3$; д) $100 : (-20)$.

55. Одреди вредност израза $x : y$, ако је:

а) $x = -56, y = 14$; б) $x = 63, y = -7$; в) $x = -81, y = -9$; г) $x = -32, y = -4$.

56. Дат је скуп рационалних бројева $A = \left\{\frac{3}{4}, -\frac{5}{9}, 2, -13, \frac{7}{6}, -\frac{11}{8}\right\}$. Одреди скуп B, ако су елементи скупа B реципрочне вредности бројева скупа A.

57. Користећи правило да је дељење једног рационалног броја другим исто што и множење првог реципрочном вредношћу другог, израчунај:

а) $\frac{4}{3} : (-16)$; б) $\frac{5}{7} : (-45)$; в) $24 : \left(-\frac{6}{5}\right)$; г) $(-35) : \left(-\frac{5}{14}\right)$.

58. Одреди вредност количника: а) $\frac{3}{2} : \left(-\frac{27}{34}\right)$; б) $\left(-\frac{6}{5}\right) : \frac{18}{25}$; в) $\frac{8}{3} : \left(-\frac{16}{27}\right)$.

59. Израчунај: а) $2\frac{3}{4} : \left(-\frac{11}{16}\right)$; б) $-1\frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{15}\right)$; в) $3\frac{5}{7} : \left(-\frac{39}{49}\right)$.

60. Одреди вредност количника: а) $3{,}5 : (-7)$; б) $(-4{,}2) : 6$; в) $(-5{,}6) \cdot (-8)$.

61. Одреди количник $(-24) : x$, ако је x једнако: а) 8; б) -9; в) $-\frac{6}{11}$; г) $-\frac{12}{17}$.

62. Израчунај $x : y$ ако је: а) $x = -4$ и $y = 0{,}32$; б) $x = \frac{2}{3}$ и $y = -4{,}8$; в) $x = -\frac{24}{31}$ и $y = -0{,}6$.

63. Одреди број k, ако је:

а) $\frac{2}{3}$ броја k једнако -14; б) $\frac{5}{7}$ броја k једнако -45; в) $\frac{3}{8}$ броја k једнако -27.

64. Одреди вредност следећих двојних разломака: а) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{9}}$; б) $\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$; в) $\dfrac{-\frac{2}{5}}{-\frac{7}{20}}$.

65. Израчунај вредност израза $\{[(-16) : (-8)] : (-4)\} : (-2)$.

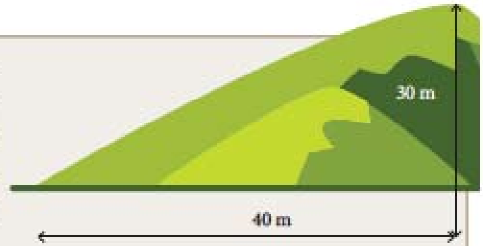
66. Обим квадрата је: а) 16 cm; б) 7,2 cm; в) 7 cm. Колика је површина квадрата?

67. Обим правоугаоника је 13 cm, а једна његова страница има дужину 2 cm. Израчунај површину правоугаоника.

68. Колика је просечна брзина бициклисте који је за 3 часа прешао 55 km?

69. Ако је возач аутомобила за 2 часа прешао 175 km, колико ће прећи за:
а) 3 часа; б) 2,5 часова; в) 200 минута?

70. Растојање од Београда до Ниша је 240 km. Возач аутомобила је половину пута возио просечном брзином од 60 km/h, а другу половину просечном брзином од 80 km/h. За које време је стигао у Ниш?



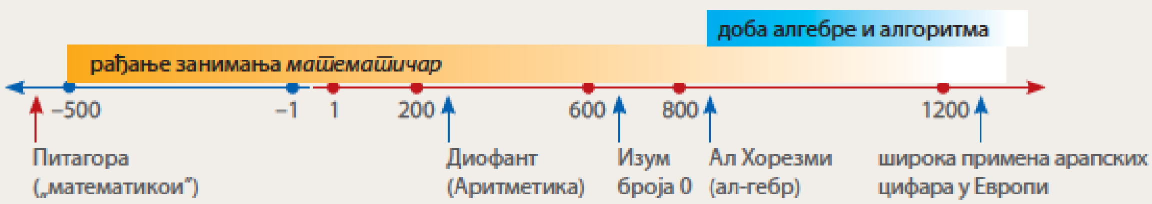
Од прастарих времена, човечанство се суочавало са бројевним загонеткама. Колико ће проћи дана до следеће кише? Колико једна жица треба да буде краћа од суседне, на жичаном инструменту, да би звук био виши за полутон? Колико нам је камења потребно да направимо степенике уз брег висине 30 m, а базе 40 m?

Један од најпознатијих античких одгонетача бројевних загонетки био је старогрчки математичар Питагора. Број камења потребан да се направи степениште одређене висине и базе повезан је са познатом Питагорином теоремом (коју ћемо учити у 7. разреду). Питагора је, такође, одгонетнуо за колико треба скратити жицу да би се на жичаном интрументу звук повисио за полутон.

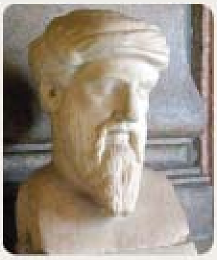
Питагора је живео у 6. веку пре н. е., а један део следбеника Питагориних мисли су себе називали „математикои", тј. „математички филозофи", што можемо сматрати за историјско рађање професије *математичар*. Математичари су с временом одгонетали све више загонетки. Број одгонетнутих загонетки је постајао велики, а није се назирала општа метода за решавање загонетки, тј. решавање једначина. Тек у 3. веку н. е. (дакле, осам векова након Питагоре), грчки математичар Диофант је написао своје чувено дело *Аритметика* и изнео мноштво метода за решавање једначина (другим речима, за решавање нумеричких загонетки) чија решења су цели или рационални бројеви. И дан-данас област математике која се бави основним бројевним операцијама (на пример, сабирање, или множење) назива се аритметика, а ђаци данас аритметику уче већ од 1. разреда основне школе.

Иако су антички грчки математичари јако добро владали геометријом, аритметиком и разломцима, они ипак нису знали за број 0, који су заправо изумели индијски математичари тек у 7. веку нове ере. Индијски изум броја 0 је дошао до Арабије отприлике у 8. веку н. е., а до Европе тек у 11. веку. Арабија је у 8. и 9. веку нове ере била стециште најбољих математичара средњег века. Тако је у 9. веку, у Арабији, у граду Багдаду, радио и чувени персијски математичар Ал Хорезми. У једном од својих дела *Књига о сабирању и одузимању уз помоћ индијских цифара*, Ал Хорезми је описао како ефикасно радити аритметику помоћу цифара од 0 до 9. Иако изум цифара од 0 до 9 није био арапски изум (већ индијски), а ни сам аутор Ал Хорезми није био Арапин (већ Персијац), Европљани су цифре од 0 до 9 назвали „арапским цифрама" јер је Ал Хорезми своју књигу написао на арапском језику.

Ипак, Ал Хорезмијево најпознатије дело није аритметика арапским цифрама, већ метода решавања математичких загонетки у чувеној *Књизи о рачунању уз помоћ свођења и одузимања* која ће све до периода ренесансе у Европи бити главни математички уџбеник за решавање једначина. У овој књизи, Ал Хорезми је описао решавање једначина методом балансирања, коју у овом уџбенику, у поглављу 3.8, називамо *методом клацкалице*. Из наслова Ал Хорезмијеве књиге, реч свођење, која се на арапском изговара „ал-џебр" или „ал-гебр", је заправо претеча речи *алгебра*. Тако се област математике која се бави операцијама са непознатим величинама (а непознате величине обележавамо словима) данас назива алгебра.



Реч „алгоритам" у модерној математици и информатици називамо по Ал Хорезмију. Наиме, када су Европљани преводили Ал Хорезмијеву *методу* решавања једначина, ауторово име Ал Хорезми је у преводу било изговарано „Ал Горитми". И тако је данас реч *алгоритам* постала синоним за *методу* рачунања (или решавања проблема) која се може описати низом строгих инструкција, довољно простих да се могу пренети машинама на извршавање. Бројне електронске направе, као што су рачунари, телефони и микрочипови, заправо само извршавају инструкције неких алгоритама. Пошто је и Ал Хорезмијева метода клацкалице заправо алгоритам решавања једначина, не треба да вас чуди што данас рачунари могу заиста решавати једначине.



Питагора је био први прави математичар и антички грчки филозоф.

Рођен је на грчком острву Самос око 570. године пре н. е. Са 18 година је у граду Милету, упознао Талеса, првог познатог грчког филозофа. Многи сматрају да је то познанство утицало на Питагорино занимање за математику и астрономију. По Талесовом савету, Питагора креће на путовања и стиже и до Египта, где су га подучавали многи угледни професори и филозофи. Око 530. године пре н. е. преселио се у град Кротон у јужној Италији. Касније је у Кротону основао филозофску и религиозну школу, основао и водио друштво, познато као питагорејци. Чланови овог друштва су живели заједно, а Питагора их је подучавао. Питагора је веровао да сви бројеви имају одређене особине – неки су савршени, неки нису, неки су мушког, неки женског рода, неки су лепи, неки ружни итд. Проучавајући особине бројева, дошао је до поделе бројева на парне и непарне, која се задржала до данас.

Диофант из Александрије био је грчки математичар из 3. века н. е. Аутор је значајног дела *Аритметика*: 13 књига алгебарских проблема, једначина и система једначина. Данас је сачувано 10 књига. Диофантови радови су утицали на индијску, арапску и западноевропску математику. По њему су названи многи појмови модерне математике, а по њему носи назив и један кратер на Месецу.

Диофантов епитаф је школски алгебарски проблем:

Путниче! Диофант је овде покопан.

Алгебра ти може рећи колики живот му је дат:

Шестину живота трајало је одрастање детета,

Дванаестина је протекла док му није израсла брада,

Седмину живота провео је у браку без детета,

Пет година касније добио је сина,

који је живео двоструко краће од свог оца.

Као старац је поживео још четири године од синовљеве смрти.

Проблем се може описати једначином:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

А решење је $x = 84$.

Мухамед ибн Муса ал Хорезми био је највећи математичар златног доба ислама. О његовом животу нема много података. Зна се да је рођен у другој половини 8. века, а умро средином 9. века. Аутор је *Књиге о рачунању уз помоћ свођења и одузимања*, која ће све до ренесансе бити главни математички уџбеник. Због њега алгебру и алгоритам зовемо алгебром и алгоритмом, а систем од 10 цифара, пореклом из Индије, зовемо „арапским цифрама".

Иако се његово име везује за настанак и ширење арапског начина писања бројева, Ал Хорезми је *Књигу о рачунању уз помоћ свођења и одузимања* написао без иједне бројке. Сваки математички проблем и сваку операцију је представио описно, користећи речи као што су „вредност", „једнако"...

3.7. Изрази са рационалним бројевима

Низ математичких операција као што су сабирање, одузимање, множење и дељење над бројевима називамо израз. При томе, бројеви могу бити представљени цифрама, разломцима, децималним записом или словима као непознате величине. Примери математичких израза су:

а) $3+\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{14}}$; б) $2+(3-7):\dfrac{1}{4}$; в) $\left(-2+\dfrac{1}{3}\right)x\cdot\dfrac{2}{5}+2x$; г) $x\left(\dfrac{2}{5}-1\right)+\dfrac{2}{5}:\dfrac{2}{y}$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Израчунати вредност математичког израза значи:
- израчунати све вредности операција у изразу;
- ослободити се свих заграда;
- свести све двојне разломке на обичне разломке;
- скратити све разломке тако да се више не могу скраћивати.

ПРИМЕР 1. Израчунај вредности следећих израза ако је $x=3$, а $y=4$.

а) $3+\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{14}}$; б) $2+(3-7):\dfrac{1}{4}$; *в) $\left(-2+\dfrac{1}{3}\right)x\cdot\dfrac{2}{5}+2x$; *г) $x\left(\dfrac{2}{5}-1\right)+\dfrac{2}{5}:\dfrac{2}{y}$.

РЕШЕЊЕ а) $3+\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{14}}=3+\dfrac{3\cdot14}{7\cdot9}=3+\dfrac{2}{3}=3\dfrac{2}{3}$.

б) $2+(3-7):\dfrac{1}{4}=2+(-4):\dfrac{1}{4}=2+(-4)\dfrac{4}{1}=2+\dfrac{-4\cdot4}{1}=2-16=-14$.

в) $\left(-2+\dfrac{1}{3}\right)x\cdot\dfrac{2}{5}+2x=-\dfrac{5}{3}x\cdot\dfrac{2}{5}+2x=-\dfrac{5\cdot x\cdot2}{3\cdot5}+2x=-\dfrac{2}{3}x+2x=\left(-\dfrac{2}{3}+2\right)x=\dfrac{4}{3}x=4$.

г) $x\left(\dfrac{2}{5}-1\right)+\dfrac{2}{5}:\dfrac{2}{y}=x\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{y}{2}=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}y=-1$.

Ово је упрошћен израз, али га можемо упростити и на други начин. Наставимо где смо стали.

$$-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y=-3x:5+y:5=(-3x+y):5=\frac{y-3x}{5}=-1.$$

ПРИМЕР 2. Влада има 1 200 динара. Петар има 300 динара мање од Владе, а Горан има 300 динара више од половине збира Владиног и Петровог новца. Колико новца имају Влада, Петар и Горан заједно?

РЕШЕЊЕ

Влада: 1200 динара

Петар: (1200 – 300) динара

Горан: $300+\frac{1}{2}\left[1200+\left(1200-300\right)\right]$

Заједно имају $1200+\left(1200-300\right)+300+\frac{1}{2}\left[1200+\left(1200-300\right)\right]=$

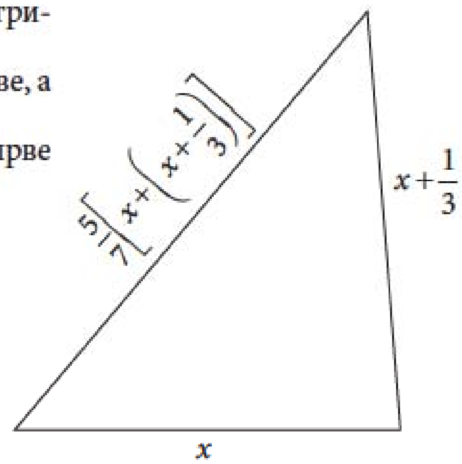
$$=1200+900+300+\frac{1}{2}\left[1200+900\right]=$$

$$=2400+\frac{1}{2}\cdot 2100=3450 \text{ динара.}$$

***ПРИМЕР 3.** У троуглу, прва страница има дужину x (у метрима). Друга страница је за $\frac{1}{3}$ метра дужа од прве, а трећа је дугачка колико и $\frac{5}{7}$ збира дужина прве две.

а) Напиши израз за обим овог троугла.

б) Израчунај вредност добијеног израза ако је $x=1$.



РЕШЕЊЕ 1. страница: x; 2. страница: $x+\frac{1}{3}$; 3. страница: $\frac{5}{7}\left[x+\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]$.

а) Обим: $x+\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{7}\left[x+\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]$.

б) $x+\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{7}\left[x+\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]=1+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{7}\left[1+\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]$ Замени $x = 1$.

$=1+1\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\left[1+1\frac{1}{3}\right]$ Ослободи се обичних заграда.

$=1+1\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\cdot 2\frac{1}{3}$ Ослободи се угластих заграда.

$=\frac{3}{3}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$ Сведи разломке на именилац 3.

$=4$ Израчунај збир.

ЗАДАЦИ

71. Израчунај вредност израза: $\left(3\frac{2}{5}-2\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{20}{13}$.

72. Одреди вредност израза: $\left(1\frac{3}{7}+2\frac{1}{3}\right):\frac{79}{42}$.

73. Колико је (16 : 4) : 2?

74. Израчунај вредност израза: $\left[\left(\frac{2}{3}:\frac{5}{7}\right):\frac{21}{10}\right]:\frac{8}{9}$.

75. Доказати да разломци $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{7}$ имају једнаке разлику и производ.

76. Доказати да су збир и производ бројева $\frac{2}{3}$ и -2 једнаки.

77. Збир бројева $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ увећај за:

а) њихову разлику; б) њихов производ; в) њихов количник.

78. Разлику бројева $2\frac{3}{4}$ и $1\frac{2}{3}$ помножи са:

а) њиховим збиром; б) њиховим производом; в) њиховим количником.

79. Применом закона комутативности и асоцијативности израчунај вредност израза:

а) $\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{13}\right)\cdot\frac{5}{4}$; б) $\frac{6}{11}\cdot\left(1\frac{2}{5}\cdot1\frac{4}{7}\right)$; в) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-12\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{16}{17}$.

80. Применом закона дистрибутивности израчунај вредност израза: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{5}$.

81. На најрационалнији начин израчунај вредност израза: $\left(16\frac{3}{37}+5\frac{1}{2}+3\frac{34}{37}\right)\cdot\left(-\frac{2}{17}\right)$.

82. Ако је $x = 3$ и $y = 5$, израчунај вредност израза: а) $x+\frac{1}{y}$; б) $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}$; в) $3+\frac{4}{x}\cdot\frac{2}{y}$.

83. Ако је $x\cdot y = -0{,}25$ израчунај вредност израза: а) $6\cdot x\cdot y$; б) $\frac{4}{5}\cdot x\cdot y$; в) $\frac{-2}{xy}$; г) $2x\cdot 8y$.

84. Нека је $a = 2$, $b=\frac{3}{4}$ и $c=\frac{7}{8}$. Применом закона дистрибутивности израчунај вредност израза: а) $ab + ac$; б) $ab - ac$.

85. Разлику бројева 2 и 7 поделити њиховим производом.

86. Збир бројева –5 и 2 помножити њиховим количником.

***87.** Први број је два пута већи од другог и два пута мањи од трећег. О којим бројевима је реч, ако је њихов збир –63?

88. Колико пута је збир бројева $\frac{15}{4}$ и 1,25 већи од њихове разлике?

89. Који рационалан број је једнак свом реципрочном броју?

3.8. Једначине са једном непознатом

Када идемо у продавницу обично понесемо списак свега што треба купити. Ипак, често се пред самом продавницом сетимо да нисмо уписали нпр. блок за ликовно. Тада је неопходно да израчунамо колико нам новца остаје када купимо све са списка. Је ли нам то довољно за блок? У налажењу одговора ће нам помоћи једначине.

Са једначинама смо се већ сусретали у млађим разредима. Једначине са једном **непознатом** су једнакости у којима је једна величина **непозната**. Непознату можемо обележити било којим латиничним словом, нпр. w, q, y, a, h, p итд., али као што смо већ навикли, најчешће непознату обележавамо латиничним словом x. Тако можемо навести основне примере једначина у којима непозната x има једну од следећих улога:

x је сабирак,	нпр.	$3+x=5$;
x је умањеник,	нпр.	$x-1=\frac{1}{3}$;
x је умањилац,	нпр.	$\frac{3}{5}-x=-\frac{4}{7}$;
x је чинилац,	нпр.	$-\frac{3}{7}x=6$;
x је дељеник,	нпр.	$x:\frac{4}{5}=-2$;
x је делилац,	нпр.	$1{,}3:x=2\frac{1}{6}$.

Решење једначине је **број** који, кад се замени у једначину уместо непознате x, **даје једнакост**. Дакле, **решење** је она вредност броја x која леву страну једначине чини једнаку десној.

Подсетимо се: **Решавање једначина.** Када решење једначине постоји, онда то решење узима један од следећих облика:

Ако је непозната x сабирак,	$x+a=b$	решење је $x=b-a$.	
Ако је непозната x умањеник,	$x-a=b$	решење је $x=b+a$.	
Ако је непозната x умањилац,	$a-x=b$	решење је $x=a-b$.	
Ако је непозната x чинилац,	$ax=b$	решење је $x=b:a$,	$a\neq 0$.
Ако је непозната x дељеник,	$x:a=b$	решење је $x=b\cdot a=ba$,	$a\neq 0$.
Ако је непозната x делилац,	$a:x=b$	решење је $x=a:b$,	$b\neq 0$.

У подсетнику смо навели услов „када решење једначине постоји". То је зато што неке једначине просто немају решења. У следећем примеру наведимо неке једначине које немају решење.

ПРИМЕР 1. Увери се да задаци а), б) и в) немају решења.

а) Решити једначину $5-x=9$, под условом да је x природан број.

Решење: Пошто природан број мора бити позитиван, јасно је да не постоји позитиван број x који кад се одузме од 5 даје резултат већи од 5. Зато кажемо да ова једначина нема решење у скупу природних бројева N.

б) Решити једначину $0\cdot x=7$.

Решење: Сваки број помножен бројем 0 даје производ 0. Стога не постоји број x који помножен бројем 0 даје 7. За ову једначину кажемо да нема решење.

в) Решити једначину $5:x=2$, под условом да је x цео број.

Решење: Пошто је 5 непаран број, јасно је да не постоји цео број x који се садржи у непарном броју 5 паран број пута, дакле 2 пута. Зато кажемо да ова једначина нема решење у скупу целих бројева Z.

У овој лекцији позабавићемо се једначинама чија решења су **рационални** бројеви, дакле, једначинама које имају решења у скупу Q. Спознаћемо да, за разлику од решења у скупу природних и целих бројева, решење је скоро увек могуће наћи у скупу рационалних бројева, али да има и изузетака. Кренимо редом од једноставнијих ка сложенијим једначинама.

Једначине са непознатим сабирком, умањеником или умањиоцем

Прво размотримо једначине у којима је непозната сабирак, умањеник или умањилац. Такве једначине увек имају решење у скупу рационалних бројева Q, тако да не морамо бринути да ли решење постоји, већ можемо одмах прионути опису решења, а правила заправо већ знамо.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

А) Ако је непозната x сабирак,	једначина је $x+a=b$,	а решење је $x=b-a$.
Б) Ако је непозната x умањеник,	једначина је $x-a=b$,	а решење је $x=b+a$.
В) Ако је непозната x умањилац,	једначина је $a-x=b$,	а решење је $x=a-b$.

ПРИМЕР 2. Реши следеће једначине: а) $\frac{3}{2}+x=-\frac{1}{2}$; б) $-1\frac{1}{2}-x=2{,}6$; в) $x-\frac{-3}{5}=\frac{14}{15}$.

РЕШЕЊЕ а) Непозната је сабирак, па примењујемо **правило А)**:

$$x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2;$$

б) Непозната је умањилац, па примењујемо **правило В)**:

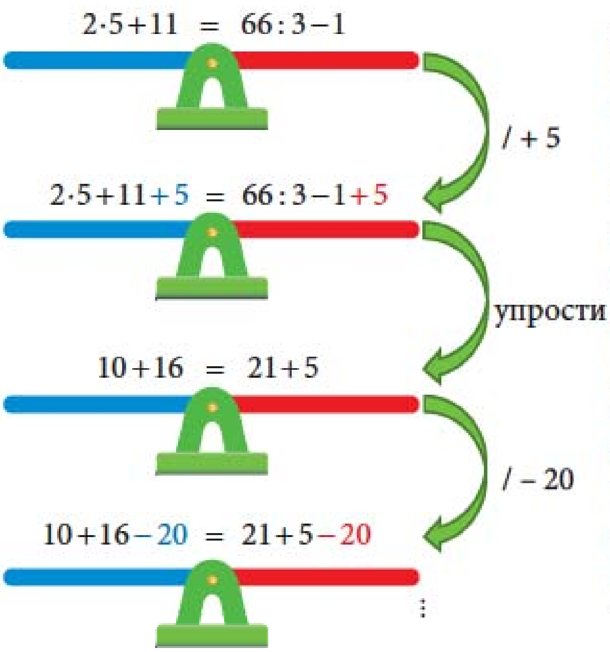
$$x=-1\frac{1}{2}-2{,}6=-1{,}5-2{,}6=-4{,}1;$$

в) Непозната је умањеник, па примењујемо **правило Б)**:

$$x=\frac{14}{15}+\frac{-3}{5}=\frac{14-3\cdot 3}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

Овако можемо решити сваку једначину у којој се сабира или одузима непозната. Међутим, ипак је незгодно памтити стално правила **А)**, **Б)** и **В)**. Постоји заправо и општа метода за решавање једначина, која не захтева никакво памћење. Ту методу зовемо **метода теразија, или метода клацкалице**.

Замислимо да нека једнакост или једначина представља клацкалицу у равнотежи, а да је знак „=" средина уравнотежене клацкалице. Уравнотежена клацкалица има своју леву и десну страну на истој висини. На пример, представимо једнакост $2\cdot5+11=66:3-1$ на клацкалици.



Пошто је клацкалица у равнотежи, ако и левој (плавој) страни и десној (црвеној) страни додамо исти број, на пример 5, клацкалица ће остати у равнотежи. То обележавамо изразом / + 5 који читамо „сабери број 5 на левој и десној страни".

Можемо мало упростити изразе на левој и десној страни, а клацкалица и даље остаје у равнотежи.

Пошто је клацкалица у равнотежи, ако од леве (плаве) стране и од десне (црвене) стране одузмемо исти број, на пример 20, клацкалица ће остати у равнотежи. То обележавамо изразом / – 20 који читамо „одузми број 20 од леве и десне стране".

Можемо произвољно много пута додавати или одузимати једнаке вредности обема странама, и то ћемо користити приликом решавања једначина.

Када будемо решавали једначине, наравно, нећемо стално цртати клацкалице, већ ћемо све шематски обележавати замишљајући да клацкалица заиста постоји. Погледајмо како то изгледа на примерима.

ПРИМЕР 3. Реши једначине из Примера 1 методом клацкалице.

а) $\frac{3}{2}+x=-\frac{1}{2}$; б) $-1\frac{1}{2}-x=2{,}6$; в) $x-\frac{-3}{5}=\frac{14}{15}$.

РЕШЕЊЕ Применимо методу клацкалице додавањем или одузимањем, али тако да на једној страни једначине остане непозната x а на другој израз са нумеричким вредностима.

а)
$$\frac{3}{2}+x=-\frac{1}{2} \quad / -\frac{3}{2}$$

Одузми $\frac{3}{2}$ од обе стране једначине.

$$\frac{3}{2}+x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2} \quad \text{упрости}$$

$$x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$$

Упростимо леву страну на којој остаје само непозната x.

Овиме смо заправо решили једначину. Само остаје да израчунамо крајњу нумеричку вредност $x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$.

б) $-1\frac{1}{2}-x=2{,}6$ $\quad /+x$ Сабери x на левој и десној страни.

$-1\frac{1}{2}-x+x=2{,}6+x$ $\quad$ упрости $\quad$ Упрости израз на левој страни.

$-1\frac{1}{2}=2{,}6+x$ $\quad /-2{,}6$ $\quad$ Одузми 2,6 од обе стране.

$-1\frac{1}{2}-2{,}6=2{,}6+x-2{,}6$ $\quad$ упрости $\quad$ Упрости израз на десној страни на којој остаје само непозната x.

$-1\frac{1}{2}-2{,}6=x$

Овиме је једначина решена. Остаје само да израчунамо крајњу нумеричку вредност:

$$x=-1\frac{1}{2}-2{,}6=-1{,}5-2{,}6=-4{,}1.$$

Обрати пажњу. Није битно да ли нам непозната остаје на левој или десној страни „клацкалице" јер то не мења вредност решења.

в) Убрзајмо се сада мало тако што ћемо одмах срећивати изразе и тако правити мање корака.

$x-\frac{-3}{5}=\frac{14}{15}$ $\quad /+\frac{-3}{5}$ $\quad$ Саберимо $\frac{-3}{5}$ на обе стране да би на левој страни остало само x.

$x=\frac{14}{15}+\frac{-3}{5}$

$x=\frac{1}{3}$

ПРИМЕР 4. Реши следеће једначине: а) $y+\frac{4}{5}=-\frac{1}{3}$; $\quad$ б) $-\frac{6}{7}-q=-\frac{3}{5}$;

РЕШЕЊЕ

а) $y+\frac{4}{5}=-\frac{1}{3}$ $\quad /-\frac{4}{5}$ $\quad$ да би на левој страни остала само непозната

$y=-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=-1\frac{2}{15}$

б) $-\frac{6}{7}-q=-\frac{3}{5}$ $\quad /+q+\frac{3}{5}$ $\quad$ да би на десној страни остала само непозната q

$-\frac{6}{7}+\frac{3}{5}=q$

$-\frac{9}{35}=q$

Уштеда корака. Сабери одједном $+q$ и $+\frac{3}{5}$.

Непозната је остала на десној страни, али то не мења решење, $q=-\frac{9}{35}$.

ПРИМЕР 5. Петар је замислио број. Ако тај замишљен број одузмемо од $\frac{-3}{4}$ добијемо $\frac{1}{2}$. Који је број замислио Петар?

РЕШЕЊЕ Обележимо словом z број који је Петар замислио. Кад тај број z одузмемо од $\frac{-3}{4}$ добијемо $\frac{1}{2}$, што можемо изразити једначином: $\frac{-3}{4}-z=\frac{1}{2}$.

Решимо једначину:

$\frac{-3}{4}-z=\frac{1}{2}\quad /+z-\frac{1}{2}$ да би на десној страни остала само непозната z;

$\frac{-3}{4}-\frac{1}{2}=z$ добијамо да је Петар замислио број $z=-1\frac{1}{4}$.

ПРИМЕР 6. Ивана је исплатила Зорану 11,5 евра, и остало јој је 7,35 евра након исплате. Колико је Ивана имала новца пре исплате?

РЕШЕЊЕ Обележимо словом x количину новца коју је Ивана имала пре исплате. Када се од x одузме 11,5 остаје 7,35. Једначина је, дакле: $x - 11{,}5 = 7{,}35$.

Решимо једначину:

$x - 11{,}5 = 7{,}35\quad / + 11{,}5$ да би на левој страни остала само непозната x;

$x = 11{,}5 + 7{,}35$

$x = 18{,}85$ Ивана је пре исплате имала 18,85 евра.

ЗАДАЦИ

90. Реши једначине: а) $x + 56 = 33$; б) $x - 25 = -46$; в) $42 - x = 57$.

91. Који број треба сабрати са 25 да би се добио збир 11?

92. Када се од броја a одузме 46 добије се 17. Одреди број a.

93. Када се од 34 одузме број b добије се 59. Израчунај број b.

94. Јуче је температура била 6 °C, а данас је –2 °C. За колико се степени променила температура?

95. Одреди решења једначина:
а) $(x - 23) + 15 = -37$; б) $22 - (x - 35) = -41$; в) $17 - (29 - x) = -34$.

96. Реши једначине:
а) $x+\frac{4}{7}=\frac{1}{2}$; б) $x-\frac{1}{3}=-\frac{3}{4}$; в) $x-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{5}{6}$.

97. Одреди број x тако да наредне једнакости буду тачне:
а) $\frac{1}{6}-x=\frac{3}{7}$; б) $-\frac{3}{4}-x=\left|-\frac{2}{3}\right|$; в) $\frac{9}{5}-x=-\frac{1}{2}$.

Једначине са непознатим чиниоцем или дељеником

Када је непозната чинилац или дељеник, решење једначине скоро увек постоји у скупу Q, али постоје и **изузеци** када решења нема, или пак када има много решења. Правила решавања већ знамо из млађих разреда основне школе. Битно је само водити рачуна о **изузецима**. Правила су:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Г) Ако је непозната x чинилац, једначина је $ax = b$.

Решење је $x = b : a = \frac{b}{a}$, само ако је $a \neq 0$.

Изузеци. Ако је $a = 0$ и $b = 0$, решење је било који број $x \in Q$.

Ако је $a = 0$ а $b \neq 0$, решење не постоји.

Д) Ако је непозната x дељеник, једначина је $x : a = b$.

Решење је $x = ba$, само ако је $a \neq 0$.

Изузетак. Ако је $a = 0$, једначина није добро постављена јер се не сме делити нулом.

ПРИМЕР 7. а) $-\frac{1}{3}x = \frac{2}{5}$; б) $x : 0 = \frac{-2}{3}$; в) $x : \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{5}$;

г) $0x = 0$; д) $x : 2 = \frac{1}{4}$; ђ) $0x = \frac{2}{7}$.

РЕШЕЊЕ а) Непозната је чинилац па примењујемо правило Г):

$$x = \frac{2}{5} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{5}\left(\frac{3}{1}\right) = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}.$$

б) Дељење нулом! Једначина није добро постављена. Не решавај. Види **изузетак** правила Д).

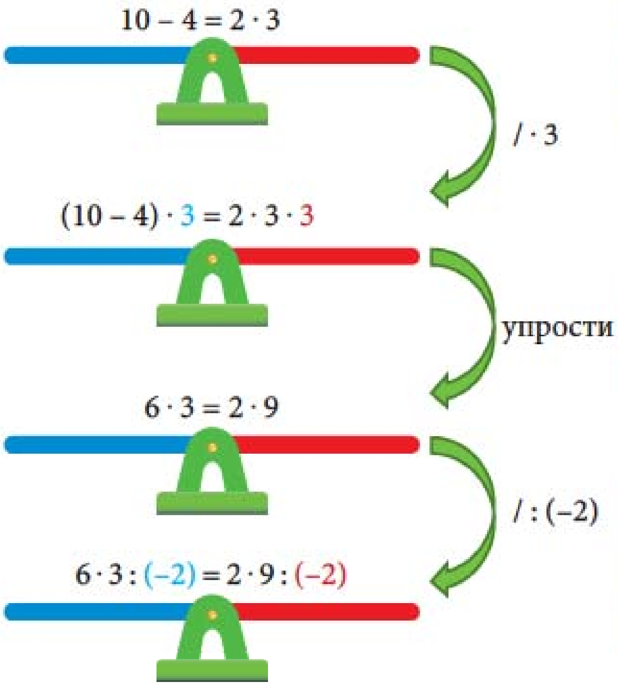
в) Непозната је дељеник, па примењујемо правило Д): $x = -\frac{3}{5}\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{9}{35}$.

г) Непозната је чинилац, али види **изузетке** правила Г). Дакле, решење је било који број $x \in Q$.

д) Непозната је дељеник, па примењујемо правило Д): $x = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$.

ђ) Непозната је чинилац, али види **изузетке** правила Г). Дакле, нема решење.

Примењујући правила **Г)** и **Д)**, можемо решити све једначине, али обичај у математици је ипак да израдимо и општу методу. Вероватно већ наслућујеш, то је опет **метода клацкалице**. И опет ћемо методу показати примером. Хајде да ставимо једнакост $10-4=2\cdot 3$ на клацкалицу и кренемо.



Пошто је клацкалица већ у равнотежи, ако и леву (плаву) и десну (цревену) страну помножимо истим бројем, нпр. бројем 3, клацкалица остаје у равнотежи. То обележавамо изразом /· 3 који читамо „помножи обе стране бројем 3”.

Можемо мало упростити изразе на левој и десној страни, а клацкалица и даље остаје у равнотежи.

Пошто је клацкалица већ у равнотежи, ако и леву (плаву) и десну (цревену) страну поделимо истим бројем, нпр. бројем –2, клацкалица остаје у равнотежи. То обележавамо изразом /: (–2) који читамо „подели обе стране бројем –2”.

⋮

Можемо произвољно много пута множити или делити једнаким вредностима обе стране и то ћемо користити приликом решавања једначина.

Видимо да обе стране можемо поделити или помножити било којим бројем, али морамо водити рачуна да не делимо бројем 0, јер то није дозвољено. Код решавања једначина методом клацкалице чак није препоручљиво ни множити обе стране нулом. То је зато што је у правилима **Г)** и **Д)** број 0 повезан са изузецима, а са изузецима морамо увек бити врло опрезни.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Кад решаваш једначине методом клацкалице, **никад** немој множити или делити обе стране једначине бројем 0.

Шта да радиш ако икад себе ухватиш на делу да решаваш једначину методом клацкалице тако што множиш или делиш обе стане бројем 0? Стани, врати се и тражи грешку у свом рачуну. Или провери да ли постоји неки изузетак у задатој једначини, јер често у задацима има малих „подвала” које имају намеру да збуне ученика.

ПРИМЕР 8. Реши методом клацкалице:

а) $\frac{2}{3}x=-\frac{1}{6}$; б) $x:\left(-\frac{3}{5}\right)=2$; в) $0x=0$; г) $-\frac{1}{2}x=-1\frac{1}{6}$.

РЕШЕЊЕ а)

$$\frac{2}{3}x=-\frac{1}{6} \qquad /\cdot\frac{3}{2}$$

Множимо обе стране бројем $\frac{3}{2}$, да би на левој страни остало само x.

$$\frac{2}{3}\cdot x\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\frac{2\cdot3}{3\cdot2}\cdot x=-\frac{1}{4}$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

Много корака.

Убудуће скраћуј поступак.

б)

$$x:\left(-\frac{3}{5}\right)=2 \qquad /\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Множимо обе стране бројем $-\frac{3}{5}$, да би на левој страни остало x.

$$x=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$x=-1\frac{1}{5}$$

в) Једначина $0x=0$ је изузетак и знамо да је решење било који рационалан број $x\in Q$. Али проверимо ипак шта би се десило када бисмо покушали да решимо методом клацкалице.

$0x=0$ Покушамо ли да поделимо обе стране нулом $/:0$, долазимо у ситуацију да делимо нулом, а то се **не сме**. Дакле, не може се решити методом клацкалице.

г)

$$-\frac{1}{2}x=-1\frac{1}{6} \qquad /\cdot(-2)$$

Множимо обе стране бројем −2 да би на левој страни остало x.

$$x=-1\frac{1}{6}\cdot(-2)$$

$$x=\frac{7}{3}$$

***ПРИМЕР 9.** Стаклена флаша има запремину 0,7 литара, а кофа 4,5 литара. Колико флаша нам је потребно да бисмо прелили садржај кофе у флаше?

РЕШЕЊЕ Означимо словом f број потребних флаша. Укупна запремина у флашама је $f \cdot 0{,}7$ литара и та запремина мора бити једнака запремини кофе од 4,5 литара. Дакле, решимо једначину $f \cdot 0{,}7 = 4{,}5$.

$f \cdot 0{,}7 = 4{,}5 \quad / \cdot \frac{10}{7}$ Помножи бројем $\frac{10}{7}$. На левој страни остаје само f.

$f = 4{,}5 \cdot \frac{10}{7}$

$f = \frac{45}{7}$ Решење је $f = \frac{45}{7}$, што је истоветно решењу $f = 6\frac{3}{7}$.

Дакле, потребно нам је 6 пуних флаша, и $\frac{3}{7}$ седме флаше. Али пошто стаклене флаше не можемо делити или ломити да бисмо добили $\frac{3}{7}$ једне флаше, следи да нам је потребно 7 флаша да бисмо прелили садржај кофе у флаше.

Комбиноване једначине са једном непознатом

Дешаваће се да једначине немају један од основних облика које смо до сада навели, већ су мало сложеније. Примери сложенијих једначина су:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}x = 0{,}1;$$

$$\frac{(1-2x)+2{,}6}{6} = -1{,}2;$$

$$\frac{x-1}{2} - 3x = 0.$$

Методом клацкалице ћемо и овакве једначине моћи да решимо. У томе заправо и јесте предност методе клацкалице. Дакле, метода је општа и примењива на разне комбиноване једначине. Али морамо увек водити рачуна да не делимо и не множимо обе стране бројем 0.

Покажимо примерима како решавати комбиноване једначине методом клацкалице. Битно је да увек нађемо неку операцију коју ћемо применити на обе стране једначине како би се једначина упростила. Изналажење те операције није увек једноставно. Једино особа са доста искуства може без много размишљања да зна које операције олакшавају рачунање, а **искуство се стиче вежбом.** Не брини ако на самом почетку све делује јако сложено. Знај да је овде битно провежбати што више задатака, и видећеш да ће постати лакше.

ПРИМЕР 10. Реши једначине:

а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x=0{,}1$; б) $2-\frac{5}{6}\left(3-\frac{x}{2}\right)=3$; в) $\frac{(1-2x)+2{,}6}{6}=-1{,}2$,

РЕШЕЊЕ а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x=0{,}1 \quad / -\frac{1}{3}$ Одузми $\frac{1}{3}$ од обе стране, да би на левој остао производ броја и x.

$-\frac{1}{6}x=0{,}1-\frac{1}{3}$ Израчунај вредност израза на десној страни.

$-\frac{1}{6}x=-\frac{7}{30} \quad /\cdot(-6)$ Помножи обе стране бројем −6, да би на левој остало само x.

$x=-\frac{7}{30}\cdot(-6)$ Израчунај вредност израза на десној страни.

$x=\frac{7}{5}$

б) $2-\frac{5}{6}\left(3-\frac{x}{2}\right)=3 \quad / -2$ да на левој страни остане простији израз са непознатом x;

$-\frac{5}{6}\left(3-\frac{x}{2}\right)=1 \quad /\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)$ да на левој страни остане простији израз са непознатом x;

$3-\frac{x}{2}=-\frac{6}{5} \quad / -3$ да на левој страни остане простији израз са непознатом x;

$-\frac{x}{2}=-\frac{21}{5} \quad /\cdot(-2)$ да на левој страни остане само x.

$x=\frac{42}{5}$

в) $\frac{(1-2x)+2{,}6}{6}=-1{,}2 \quad /\cdot 6$ да лева страна не буде у облику разломка;

$(1-2x)+2{,}6=-7{,}2$ упрости израз на левој страни;

$3{,}6-2x=-7{,}2 \quad / -3{,}6$ да..............................(дај своје образложење);

$-2x=-10{,}8 \quad /:(-2)$ да..............................(дај своје образложење).

$x=5{,}4$

Подсетимо се: Код неких бројева у децималном запису, цифре се понављају унедоглед. У скраћеном запису, стављамо тачке изнад цифара које се понављају. На пример:

$0,9999999\ldots=0,\dot{9}$ тачка изнад цифре 9 означава да се цифра 9 понавља унедоглед,

$1,0283283\ldots=1,0\dot{2}\dot{8}\dot{3}$ тачке изнад цифара 2, 8 и 3 означавају да се цифре понављају тим редоследом унедоглед.

Постоји неколико различитих начина да нотирамо понављање цифара унедоглед нпр.

$$0,1333333\ldots=0,1\dot{3}=0,1(3)=0,1\overline{3}$$
или
$$3,1424242\ldots=3,1\dot{4}\dot{2}=3,1(42)=0,1\overline{42}.$$

***ПРИМЕР 11.** Нађи реципрочан број броју $1,777777\ldots=1,\dot{7}$.

РЕШЕЊЕ Изразимо прво задати број као разломак, и онда нађимо реципрочан разломак. Поставимо једначину да нађемо тражени разломак. Обележимо словом q број $1,\dot{7}$.

$$q=1,777777\ldots=1,\dot{7}.$$

Пошто се у децималном запису броја q понавља **једна** цифра, померимо децимални зарез за **једно** место удесно. Множењем броја q бројем 10 добијамо.

$$10q=17,77777\ldots=17,\dot{7}.$$

Примети да кад број $1,\dot{7}$ одузмемо од броја $17,\dot{7}$ добијамо број у коме се цифре више не понављају:

$$17,\dot{7}-1,\dot{7}=(17+0,\dot{7})-(1+0,\dot{7})=17-1+0,\dot{7}-0,\dot{7}=16.$$

Али пошто је $q=1,\dot{7}$ и $10q=17,\dot{7}$ следи да је одузимање броја $1,\dot{7}$ од броја $17,\dot{7}$ исто што и одузимање броја q од броја $10q$. Тако добијамо једначину:

$$10q-q=17,\dot{7}-1,\dot{7}$$
$$10q-q=16$$

Увери се да је решење $q=\frac{16}{9}=1,\dot{7}$.

Реципрочан број је онда $\frac{1}{q}=\frac{1}{1,\dot{7}}=\frac{1}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{16}$.

Подсетимо се:

Применом закона дистрибутивности, имамо

$$(a + b)x = ax + bx$$

или

$$x(a + b) = xa + xb.$$

На пример, можемо једначину $3x + 2x + \frac{1}{2}x = 3$ написати другачије: $\left(3 + 2 + \frac{1}{2}\right)x = 3.$

*ПРИМЕР 12. Реши једначине: а) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + 2x = 4$; б) $\frac{x-1}{2} - 3x = 0.$

РЕШЕЊЕ а) Применом закона комутативности и дистрибутивности, имамо

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + 2x = \frac{3}{2}x + 2x + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} + 2\right)x + \frac{1}{2},$$

па једначину можемо написати другачије:

$$\left(\frac{3}{2} + 2\right)x + \frac{1}{2} = 4.$$

Ову једначину би сада требало да знаш да решиш. Решење је $x = 1$.

б) Прво се увери да важи:

$$\frac{x-1}{2} - 3x = \frac{1}{2}(x-1) - 3x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - 3x = \left(\frac{1}{2} - 3\right)x - \frac{1}{2},$$

па једначину напиши другачије:

$$\left(\frac{1}{2} - 3\right)x - \frac{1}{2} = 0.$$

Ову једначину би требало да знаш да решиш. Решење је $x = -0{,}2$.

ЗАДАЦИ

98. Једначине: а) $5x = -45$; б) $x : 4 = -7$, реши у скупу Z и у скупу Q.

99. Реши једначине:

а) $\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}$; б) $x : \frac{3}{7} = -\frac{5}{9}$.

100. Одреди решења једначина:

а) $-0{,}75x = 4{,}5$; б) $0{,}2x : 0{,}8 = -3$.

101. Реши једначине:

а) $x \cdot 2\frac{1}{5} = 1\frac{1}{3}$; б) $x : 2\frac{3}{4} = -4\frac{1}{5}$.

102. Реши једначине:

а) $3x + 25 = 1$; б) $5x - 18 = -23$; в) $11 - 4x = 25$.

103. Одреди решења једначина:

а) $2(x + 4) = 18$; б) $(x - 3) : 9 = -6$.

3.9. Неједначине са једном непознатом

Са неједначинама смо се сусрели још у 5. разреду. Тамо смо научили како да решавамо неке једноставне неједначине, и како решења да представимо на бројевној полуправој. Подсетимо се неких примера из 5. разреда.

Подсетимо се: (непосредно из уџбеника за 5. разред):

РЕШЕЊЕ

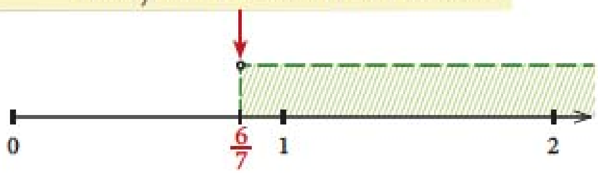
а) $x + \frac{6}{7} > \frac{12}{7}$

$x > \frac{12}{7} - \frac{6}{7}$

$x > \frac{6}{7}.$

Скуп решења може се приказати на бројевној полуправој.

Кружић ∘ на слици означава да број $\frac{6}{7}$ не припада скупу решења.



б) $x - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{6}$

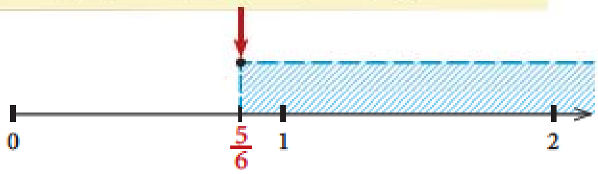
$x \geq \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

$x \geq \frac{1}{6} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$

$x \geq \frac{1}{6} + \frac{4}{6}$

$x \geq \frac{5}{6}.$

Пуним кружићем • означавамо да одређени број припада скупу решења.



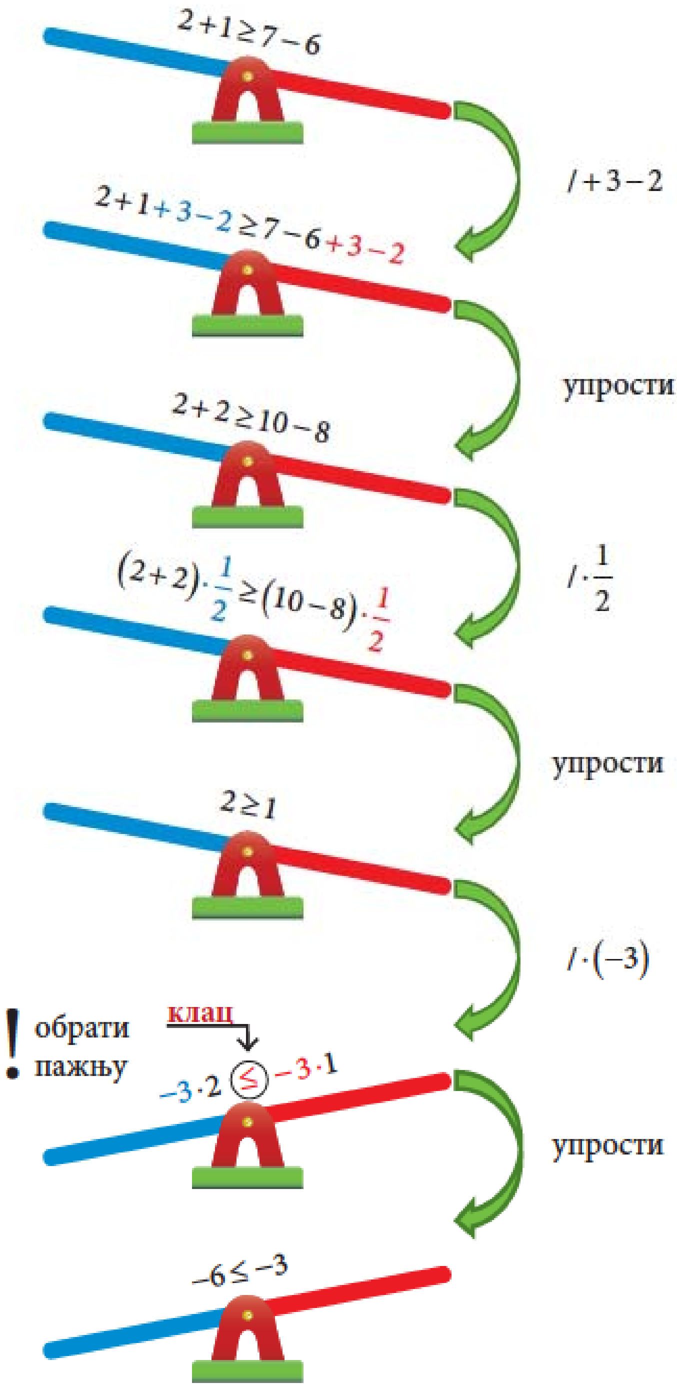
Овде, у 6. разреду, проширили смо скупове познатих бројева на скуп целих бројева Z и скуп рационалних бројева Q, и неминовно је да ће одговарајуће неједначине бити све сложеније.

Када бисмо почели да наводимо редом сва правила решавања неједначина у скупу Q, нпр. када је непозната x умањилац, чинилац или дељеник, требало би нам пуно простора да наведемо сва правила, а број правила би био све већи, и тешко би било све их запамтити.

Због тога, хајде да развијемо општу методу за решавање неједначина, да не бисмо морали памтити велики број правила. Вероватно наслућујеш да је та општа метода поново **метода клацкалице.**

Метода клацкалице за неједначине се разликује од методе клацкалице за једначине у томе што је клацкалица увек **нагнута** у неку од две стране.

Да бисмо илустровали методу **нагнуте** клацкалице, кренимо са примером неједнакости $2+1 \geq 7-6$. Средину клацкалице ћемо увек ставити на место знака неједнакости, у овом случају на место знака „≥", а подићи ћемо ону страну клацкалице која одговара већој страни неједнакости. Тако имамо слику.



Ако и левој и десној страни додамо било који број, на пример 3, и од обе стране одузмемо било који број, на пример 2, лева страна неједнакости остаје већа од десне, а лева страна клацкалице остаје виша од десне. Дакле, клацкалица остаје у истом положају. То обележавамо кратко изразом $/+3-2$.

Можемо упростити мало изразе на обе стране неједнакости, а клацкалица остаје у истом положају.

Ако обе стране помножимо било којим **позитивним** бројем, нпр. $\frac{1}{2}$, лева страна остаје већа, а клацкалица не мења положај. То обележавамо кратко изразом $/\cdot\frac{1}{2}$.

Можемо упростити изразе на обе стране, а клацкалица не мења положај.

Помножимо сада обе стране неким **негативним бројем**, нпр. –3. Обележимо то изразом $/\cdot(-3)$. Тада лева страна неједнакости постаје мања од десне, што значи да се знак „≥” мења у „**≤**”, а клацкалица „**клац**не” на супротну страну.

Присети се да је дељење исто што и множење реципрочним бројем, а реципрочан број негативном броју је негативан број. Стога ће и **дељење негативним бројем** такође да „**клац**не” клацкалицу.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

ЗАКЉУЧАК 1: Када у методи клацкалице обе стране неједнакости или неједначине **множиш или делиш истим негативним бројем**, знак неједнакости се мења.

Клац! На ово обратити посебну пажњу!

У свим осталим случајевима правило клацкалице се не мења.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

ЗАКЉУЧАК 2: Када у методи клацкалице обе стране неједнакости или неједначине **множиш или делиш истим позитивним бројем**, знак неједнакости **остаје исти.**

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

ЗАКЉУЧАК 3: Када у методи клацкалице на обе стране неједнакости или неједначине **сабираш или одузимаш исти број**, знак неједнакости **остаје исти.**

Показаћемо кроз примере како методом клацкалице решавамо неједначине.

ПРИМЕР 1. Реши неједначине и на бројевној правој обележи скуп решења.

а) $\frac{3}{5}x \le \frac{1}{2}$; б) $-0{,}4x + \frac{1}{5} < 1{,}5$; в) $\dfrac{-\frac{1}{3}x + 2}{2} > \frac{3}{4}$.

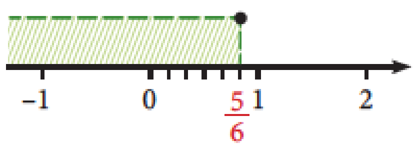
РЕШЕЊЕ Решаваћемо методом клацкалице. Циљ решавања ће нам увек бити да на једној страни неједначине остане непозната, а на другој да буде нумерички израз.

а) $\frac{3}{5}x \le \frac{1}{2} \quad / \cdot \frac{5}{3}$ Помножи обе стране истим бројем, да би на левој страни остала само непозната x.

$\frac{3}{5}x \cdot \frac{5}{3} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$ Делимично упрости изразе на обе стране.

$\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3}x \le \frac{5}{6}$ Скрати разломак на левој страни.

$x \le \frac{5}{6}$



б) <u>**I начин.**</u> Оставићемо непознату x на левој страни:

$-0{,}4x + \frac{1}{5} < 1{,}5 \quad / -\frac{1}{5}$ да би на левој страни остао простији израз са непознатом x.

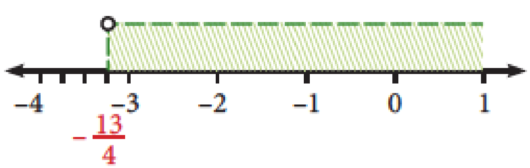
$-0{,}4x < 1{,}5 - \frac{1}{5}$ Напиши 0,4 као разломак, а на десној страни израчунај вредност израза.

$-\frac{4}{10}x < \frac{13}{10} \quad / \cdot \left(-\frac{10}{4}\right)$ **Множење негативним бројем! Клац. Мењај знак неједнакости.** На левој страни остаје само непозната x.

клац

$x > \frac{13}{10} \cdot \left(-\frac{10}{4}\right)$

$x > -\frac{13}{4}$



__II начин.__ Без множења или дељења негативним бројевима да избегнемо **клац**:

$-0,4x+\frac{1}{5}<1,5 \quad /+0,4x$ да би на десну страну дошла непозната x са предзнаком +;

$\frac{1}{5}<1,5+0,4x \quad /-1,5$ да би на десној страни остао простији израз са непознатом x;

$\frac{1}{5}-1,5<0,4x$ напиши 0,4 као разломак, а на левој страни израчунај вредност израза;

$-\frac{13}{10}<\frac{4}{10}x \quad /\cdot\frac{10}{4}$ да на десној страни остане само непозната x.

$-\frac{13}{4}<x$ Решење је исто оно које смо добили на први начин.

в) __I начин.__ Оставићемо непознату x на левој страни:

$\frac{-\frac{1}{3}x+2}{2}>\frac{3}{4} \quad /\cdot 2$ да бисмо се на левој страни ослободили разломка са имениоцем 2;

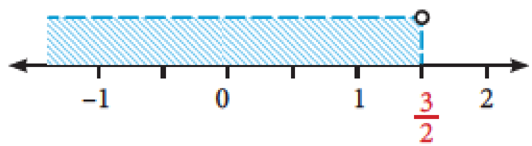
$-\frac{1}{3}x+2>\frac{3}{2} \quad /-2$ да би на левој страни остао простији израз са непознатом x;

$-\frac{1}{3}x>-\frac{1}{2} \quad /\cdot 3$ да бисмо се на левој страни ослободили разломка са имениоцем 3.

$-x>-\frac{3}{2} \quad /\cdot(-1)$ **Клац. Множење негативним бројем. Мењај знак неједнакости.**

клац

$x<\frac{3}{2}$ Решено.



__II начин.__ Без множења или дељења негативним бројевима да избегнемо **клац**.

Пратимо поступак __I начина__, скоро до краја, али пред крај вешто избегнемо „клац”:

$-x>-\frac{3}{2} \quad /+x+\frac{3}{2}$ избегавамо „клац”, тј. избегавамо множење негативним бројем.

$\frac{3}{2}>x$ Решење остаје исто, само је непозната на другој страни неједнакости.

ЗАДАЦИ

104. Реши неједначине: а) $x + 1 \leq -3$; б) $1 - x \geq 5$; в) $x - 7 < -11$; г) $3x - 3x \geq -5$; д) $5x - 5x > 7$.

105. Реши неједначине: а) $\frac{3}{4} + x \leq \frac{2}{5}$; б) $x - \frac{3}{8} > -\frac{5}{7}$; в) $\frac{1}{3} - x \geq \frac{5}{6}$; *г) $\frac{1}{2} < -x < 1\frac{4}{9}$.

106. Реши неједначине: а) $x + 3\frac{1}{6} \geq 1\frac{1}{3}$; б) $x - 2\frac{2}{5} < -3\frac{1}{4}$; в) $5\frac{1}{2} - x \leq 8\frac{3}{7}$.

***107.** Одредити све целе бројеве који задовољавају неједначине: $3\frac{1}{2} + x > 5\frac{3}{4}$ и $6\frac{2}{3} - x > 2\frac{3}{7}$.

***108.** Одреди сва целобројна решења неједначине: $-2\frac{3}{7} < x \leq 3\frac{2}{5}$.

***109.** Реши неједначину: а) $-5 \leq x - 2 \leq 6$; б) $-2 < 3 - x < 5$.

110. Сигнална лампица у аутомобилу се пали ако је у резервоару мање од 8 литара бензина. Колико највише бензина се може потрошити, а да се сигнална лампица не упали, ако тренутно у резервоару има 42 литра бензина?

111. Милица је за 3 сата прочитала $\frac{2}{7}$ књиге. Да ли ће, не мењајући темпо читања, Милица прочитати књигу за мање од 10 сати читања?

112. Тренутни водостај је –150 cm. Колико највише може да порасте водостај, ако насип за одбрану од поплава има висину 2 m?

113. У којим границама се креће дневна температура, ако је тренутно –3 °C, а у току дана температура може да порасте или да се смањи за највише 12 °C?

114. Обавезна резерва воде коју сваки водовод мора имати је 10 000 *l*. Колико највише воде се сме потрошити ако тренутно у резервоару водовода има 56 234 *l* воде?

115. Странице троугла су 6 cm и 9 cm. Колика може бити трећа страница тог троугла?

116. Реши неједначине:

а) $2x \leq -8$; б) $-3x \geq 27$; в) $x : 4 < -3$;

г) $-x : 2 \geq -9$; д) $0 \cdot x > 9$; ђ) $3x - 3x < 14$.

117. Одреди решења неједначина: а) $3(2x - 6) > 0$; б) $-4(5x + 15) < 0$; в) $-5(18 - 6x) \geq 0$.

118. Одреди сва целобројна решења неједначине: $-30 < -5x \leq 15$.

119. Реши неједначине:

а) $2(x - 3) \leq -8$; б) $-4(x + 3) \geq 8$; в) $(5x + 1) : 4 < -6$;

г) $(7 - x) : 3 \leq -1$; д) $-3(x + 2) > -6$; ђ) $5(3 - x) < 20$.

120. Одреди решења неједначина: а) $\frac{4}{7}x \leq 0$; б) $-x : \frac{2}{5} < 0$; в) $\frac{x}{8} < 0$; г) $-x : 3 > 0$.

121. Реши неједначине: а) $\frac{1}{5}x \leq \frac{1}{2}$; б) $x \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) > \frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{4}x < -\frac{5}{6}$; *г) $-1\frac{2}{3} < -4x < 3\frac{2}{7}$.

САЖЕТАК
РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ – *први део*

РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ:

$$Q = Q^{+} \cup \{0\} \cup Q^{-}$$

Скуп рационалних бројева Q је унија позитивних разломака Q^{+}, негативних разломака Q^{-} и броја 0, или другим речима:

$$Q = \left\{ r : r = \frac{a}{b}, a \in Z, 0 \neq b \in Z \right\}$$

скуп рационалних бројева Q је скуп разломака r код којих је бројилац a цео број, а именилац b цео број различит од 0.

АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА:

$$|r| = \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Апсолутна вредност разломка се на овај начин може написати као разломак (**напомена:** $b \neq 0$) .

САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА:

$$\frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{a}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a-c}{n} \quad (n \neq 0)$$

Понекад морамо разломке проширити или скратити тако да имају исти именилац.

ПРАВИЛА САБИРАЊА РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА:

$p + q = q + p$ **Комутативност.** Редослед сабирака се може променити.

$p + q + r = (p+q) + r = p + (q+r)$ **Асоцијативност.** Сабирци се могу произвољно груписати.

$p + 0 = 0 + p = p$ Нула је **неутрални елемент сабирања.**

(**Напомена:** Сваки од бројева p, q и r може да се напише као разломак.)

ЕЛИМИНИСАЊЕ ЗАГРАДА:

$$+(q+r) = +q + r$$
$$+(q-r) = +q - r$$

Кад је испред заграде знак „+”, заграду обриши, а предзнаке упиши.

$$-(q+r) = -q - r$$
$$-(q-r) = -q + r$$

Кад је испред заграде „–”, заграду обриши, а предзнаке супротнима замени.

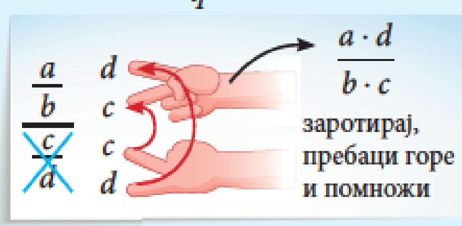
МНОЖЕЊЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{или} \quad a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} \quad (b \neq 0 \text{ и } d \neq 0)$$

ДЕЉЕЊЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \text{и} \quad p : q = p \cdot \frac{1}{q} \qquad (b \neq 0; d \neq 0; c \neq 0; q \neq 0)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$



или

ОСОБИНЕ МНОЖЕЊА И ДЕЉЕЊА:

$qr = rq$ Комутативност. Редослед чинилаца се може променити.

$pqr = (pq)r = p(qr)$ **Асоцијативност.** Чиниоци се могу произвољно груписати.

$r \cdot 1 = 1 \cdot r = r$ Број 1 је **неутрални елемент множења.**

$r : 1 = r$ **Дељење бројем 1.**

$p(q+r) = pq + pr$ и **Дистрибутивност множења према сабирању** и

$p(q-r) = pq - pr$ **множења према одузимању.**

$-1r = -r$ или $-1(-r) = r$ **Множење бројем –1.**

$r : (-1) = -r$ **Дељење бројем –1.**

$r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0$ **Множење нулом.**

$\cancel{r:0} \leftarrow$ **НЕ!** Никако! Број 0 не може бити делилац.

Напомена: Сваки од бројева *p*, *q* и *r* може имати облик разломка.

РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА МЕТОДОМ КЛАЦКАЛИЦЕ:

[.........] = [.........]

Обе стране једначине можемо:

/ + *a* сабрати с истим бројем *a*,

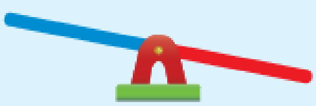
/ – *a* умањити с истим бројем *a*,

/· *a* помножити истим бројем $a \neq 0$,

/: *a* поделити истим бројем $a \neq 0$.

РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНА МЕТОДОМ КЛАЦКАЛИЦЕ:

[.........] > [.........]



Обе стране неједначине можемо:

/ + *a* сабрати с истим бројем *a*,

/ – *a* умањити с истим бројем *a*,

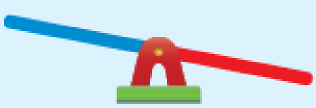
/· *a* помножити истим **позитивним** бројем $a > 0$,

/: *a* поделити истим **позитивним** бројем $a > 0$,

а знак неједнакости остаје непромењен.

Обе стране неједначине можемо:

[.........] > [.........]



/· *b* помножити истим **негативним** бројем $b < 0$,

/: *b* поделити истим **негативним** бројем $b < 0$,

КЛАЦ → <

али тада се мења знак неједнакости, а клацкалица клацне (**КЛАЦ**!).

ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

122. Нацртај бројевну праву и одреди између којих целих бројева се налазе рационални бројеви: а) $-\frac{13}{4}$; б) $\frac{11}{5}$; в) $-\frac{3}{2}$.

123. Посматрај бројевну праву између бројева -1 и 1, и одреди колико има рационалних бројева чији је именилац број 3 у том делу бројевне праве.

124. Израчунај производ свих рационалних бројева чији је иманилац 2023.

125. Који рационалан број не припада ни скупу Q^- ни скупу Q^+?

126. Да ли је $Q^- \cup Q^+ = Q$? Одреди $Q^- \cap Q^+$.

127. На бројевној правој одреди тачку A која одговара рационалном броју $-\frac{3}{4}$ и одреди тачку B која припада рационалном броју $\left|-\frac{3}{8}\right|$.

128. Дат је скуп $A = \left\{\frac{8}{3}, -\frac{5}{11}, \frac{7}{6}, -\frac{4}{9}, -2{,}22\right\}$. Одреди елементе скупа B, ако скуп B чине бројеви супротни елементима скупа A и скуп C кога чине апсолутне вредности бројева из скупа A.

129. Одреди рационалне бројеве x, ако је:
$(-x) \in \left\{\frac{5}{3}, -\frac{6}{7}, \frac{8}{11}, -\frac{4}{9}, -3{,}21\right\}$.

130. Упореди рационалне бројеве: $\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}$.

131. Доведи на заједнички именилац и упореди рационалне бројеве: $\frac{3}{8}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 1$.

132. Доведи на заједнички бројилац и упореди рационалне бројеве: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$.

133. Упореди рационалне бројеве:
$\frac{7}{4}, -\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{11}{4}$.

134. Докажи да је: $3{,}14 < \frac{22}{7} < 3{,}15$.

135. За које целе бројеве c важи неједнакост
$\left(-\frac{1}{3}\right) < \frac{c}{2} < \frac{17}{6}$?

136. Одреди све целе бројеве m, за које је:
$-\frac{2}{5} < \frac{-3m}{10} \leq \frac{1}{2}$.

137. Уместо $*$ напиши одговарајуће цифре, тако да је тачна једнакост $-\frac{5}{7} = -\frac{4*}{**}$.
Колико има решења?

138. Уместо $*$ напиши одговарајуће цифре, тако да је тачна неједнакост $\frac{2}{3} < \frac{*}{*} < \frac{7}{9}$. Колико има решења?

139. Израчунај:
а) $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{9}{2} + \left(-\frac{7}{10}\right)$;
б) $\left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{7}{6} + \left(-\frac{8}{9}\right)$;
в) $\left(-\frac{9}{14}\right) + \frac{5}{2} + \left(-\frac{4}{7}\right)$.

140. За колико је број $\left(-\frac{3}{2}\right)$ већи од броја $\left(-\frac{7}{3}\right)$?

141. За колико је број $\left(-\frac{7}{4}\right)$ мањи од броја $\frac{5}{2}$?

142. Одреди вредност изараза:
$\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{0}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{2}{7}\right)$.

143. Колико има рационалних бројева x таквих да је $x + |x| = 0$?

144. Колико има рационалних бројева y таквих да је $|y| - y = 0$?

145. Страница квадрата је: а) 6 cm; б) 7,5 cm; в) $4\frac{2}{3}$ cm. Колики су обим и површина квадрата?

146. Израчунај обим и површину правоугаоника, ако суседне странице правоугаоника имају дужине: а) 3 cm и 8 cm; б) 5,2 cm и 9,5 cm; в) $10\frac{4}{5}$ cm и $3\frac{8}{9}$ cm.

147. Бициклиста се креће просечном брзином од $17\frac{1}{4}$ km/h. Колики пут пређе бициклиста за:
а) 2 h; б) 2,5 h; в) 200 минута?

148. На колико начина се број –6 може написти као производ три различита цела броја?

149. Нека је y неки рационалан број. Када је:
а) $5 \cdot y < 13 \cdot y$; б) $6 \cdot y = 11 \cdot y$; в) $4 \cdot y > 9 \cdot y$?

150. Да ли је за произвољне рационалне бројеве x и y, тачан исказ: $(-x) \cdot (y - 1) = x - x \cdot y$?

151. Одреди када су тачни искази:
а) $(-x) \cdot x > (-2x) \cdot 2x$; б) $(-x) \cdot x < 2x \cdot (-2x)$.

152. У дате квадратиће уписати различите цифре тако да се добије тачан исказ:
$\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{20}{21}$.
Да ли постоји решење у случају да је операција „+” или „–” или „ : ”?

153. У првој корпи има 537 јабука, а у другој 463 јабуке. Колико јабука треба пребацити из прве корпе у другу да би након пребацивања у другој корпи било 9 пута више јабука него у првој?

154. Како 7 јабука поделити на 12 дечака, тако да сваки од њих добије једнак део, ако се свака јабука може поделити на највише 5 делова?

155. У првој корпи има 10, а у другој 97 јабука. У сваку корпу желимо да додамо исти број јабука тако да након додавања у другој корпи буде 2 пута више јабука него у првој. Колико јабука треба додати у сваку корпу?

156. Дат је низ рационалних бројева $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$
Колико чланова тог низа треба сабрати да би се добио број $\frac{21}{32}$?

157. Одреди све целе бројеве x, такве да је:
$-4 \leq \frac{6 - 3x}{5} < 1$.

158. Одреди све целе бројеве n такве да је $\frac{15 - 5n}{n}$ цео број.

***159.** Одреди најмањи природан број m и највећи природан број n тако да је:
$$\frac{n}{2023} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2022 \cdot 2023} < \frac{m}{2023}$$

***160.** Аритметичка средина неких 25 рационалних бројева је 50, а аритметичка средина неких 50 рационалних бројева је 25. Колика је аритметичка средина тих 75 бројева?

***161.** Колико чинилаца треба да буде у производу $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ да би производ био једнак 100.

162. Заборавни професор отворио је славину за воду над кадом и заборавио да зачепи каду. Познато је да се празна када пуни за 20 минута, а пуна празни за 30 минута. Професор се сетио чепа након 48 минута. Да ли је када празна?

163. Влада, Нада и Јагода су добили 600 динара. Влада је добио $\frac{5}{7}$ суме коју су добиле Нада и Јагода, а Нада је добила $\frac{1}{4}$ новца мање од Јагоде. Колико је свако од њих добио?

164. Стуб је укопан у земљу трећину своје дужине, половина дужине је у води, а 2 m извирује изван воде. Колика је дужина стуба?

***165.** Када је пешак прешао $\frac{1}{4}$ свог пута и још 5 km, до краја пута му је остала $\frac{1}{3}$ пута и још 10 km. Колика је дужина пута?

***166.** Ученик је првог дана прочитао $\frac{3}{8}$ књиге, другог $\frac{1}{5}$ књиге и на тај начин прочитао 12 страна више од половине књиге. Колико страна има та књига?

***167.** Зоран, Душан и Никола понели су на екскурзију 2220 динара. Зоран је потрошио $\frac{1}{3}$ своје суме, Душан $\frac{1}{5}$ своје суме, а Никола $\frac{7}{15}$ своје суме. После тога остале су им једнаке суме новца. Колико је новца свако од њих понео на екскурзију?

***168.** Течност се налази у две посуде. Ако се из прве посуде прелије у другу $6\frac{5}{6}$ литара, онда ће у другој посуди бити 8 литара мање течности него у првој. Колико је течности у другој посуди, ако у обе има укупно $78\frac{2}{3}$ литра?

***169.** Наташа је имала известан број јабука и крушака. Од укупног броја, $\frac{3}{7}$ су јабуке, а све остало су крушке. Када је добила још 4 јабуке и појела 2 крушке онда је имала једнак број јабука и крушака. Колико је Наташа на почетку имала јабука, а колико крушака?

170. Јагода је добила кутију пуну бомбона. Првога дана је појела четвртину бомбона, а другога дана четвртину остатка. Колико бомбона је Јагода добила ако јој је на крају другог дана остало 9 бомбона?

***171.** Када је пешак прешао 4 km и још половину остатка пута, остало му је да пређе још 4 km и трећину целог пута. Израчунај дужину целог пута.

172. Како поделити 5 јабука на шесторо деце, а да при том ни једна јабука не буде сечена на више од три дела?

173. Четири радника за 3 дана монтирају 11 аутомобила. Колико аутомобила ће монтирати 30 радника за 20 дана? (Помоћ: прво израчунај колико аутомобила један радник монтира за један дан.)

174. Две јабуке теже колико 3 крушке, а 3 јабуке теже као 4 поморанџе. Сем тога 6 крушака, кошта колико 5 поморанџи. Шта је скупље: килограм крушака или килограм поморанџи?

***175.** Гоца и Нина имају једнак број крушака. Гоца свој део крушака продаје по цени 3 крушке за 100 динара, а Нина 2 крушке за 100 динара. Ако саставе крушке и продају их по цени 5 крушака за 200 динара, онда ће зарадити 400 динара мање него да су крушке продавале појединачно. Колико крушака имају Гоца и Нина, ако се и при једној и при другој продаји (појединачној и заједничкој) продају све крушке?

***176.** У колико сати између 12 и 13 часова, права која пролази кроз подеоке 6 и 12 представља симетралу угла између мале и велике казаљке?

177. У свакој клупи једног разреда седи највише два ученика. Познато је да $\frac{2}{3}$ укупног броја дечака седи у клупама са $\frac{3}{5}$ укупног броја девојчица. Који део ученика седи у пару дечак-девојчица?

178. Летело је јато ласта и сусретне једну усамљену ласту. „Здраво сто ласта” поздрави их усамљена ласта. „Да нас је још оволико и половина и четвртина и да нам се ти придружиш, онда би нас било тачно 100”, одговори предводник јата ласта. Колико је ласта било у јату?

179. На тесту из математике има 10 задатака. Сваки тачно решен задатак ученику доноси 4 бода, а сваки нерешен или нетачно решен задатак односи 3 бода. Колико задатака је тачно решила Вера, ако је имала 19 бодова?

***180.** У корпи су били ораси. Радош је узео трећину ораха и још 1 орах. Затим је Мирослав узео трећину од преосталих ораха и још један орах. На крају је Слађана узела трећину од преосталих ораха и још један орах. Колико ораха је било у корпи, ако сада у њој има 5 ораха? (Помоћ: пробај прво да одредиш колико је Слађана узела ораха не израчунавајући колико су узели Радош и Мирослав.)

181. Ако Маре да Љуби 10 динара, онда ће имати једнаке суме новца. Ако Љуба поклони Мару 20 динара, онда ће Маре имати четири пута више новца од Љубе. Колико новца има Маре, а колико Љуба?

182. Одреди два броја чији је збир $-\frac{1}{5}$, а количник $\frac{1}{5}$.

***183.** Реши једначину $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\ldots+\frac{x}{1024}=1023$.

***184.** Реши једначину:
$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\ldots+\frac{x}{9900}=2023.$$

***185.** Реши једначину:
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)x=404.$$

***186.** Реши једначине:
а) $|x|=|2x-4|$; б) $|x|+|x-1|=2023$;
в) $|x|+4=|x-2|$.

187. Израчунај збир решења неједначине:
а) $|x|<2023$; б) $|x|\geq 2023$.

188. Реши неједначине: а) $|x|>0$; б) $|x|<0$.

***189.** Одреди збир целобројних решења неједначине: $2x+3<4x+17\leq x+11$.

190. Одреди решења неједначина:
а) $|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+7|\leq 4$;
б) $|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+7|\leq 6$.

191. Одредити скуп решења неједначина:
а) $|3x|<6$; б) $2|x|\leq 10$; в) $4|x-1|<8$.

192. Одредити рационалан број x, ако је:
$x+(x+1)+\ldots+(x+16)+(x+17)=144$.

193. Постоји ли рационалан број x, такав да је:
$|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3|=-6$.

***194.** Одреди најмањи природан број m за који постоји природан број n, такав да је:
$$0<\frac{m}{17}-\frac{n}{7}<0{,}91.$$

***195.** За 3 kg брашна и 5 kg шећера плаћено је 440 динара, а 9 kg брашна и 20 kg шећера кошта 1670 динара. Колико кошта 2 kg брашна и 3 kg шећера?

196. Три радника склопе монтажну кућу за 24 дана. Колико дана ће трајати монтажа ако има: а) 6 радника; б) 8 радника; в) 9 радника?

197. Ако се разлика броја x и њему реципрочног броја помножи са (-7) добије се производ 0. Одреди број x.

198. Ако Милан за 3 сата пређе 16 km, колико ће прећи за 4 сата?

199. Путник $\frac{5}{6}$ пута пређе за 45 минута. За које време ће путник прећи $\frac{8}{9}$ пута?

200. Познато је да 650 грама меса кошта 715 динара. Колико меса је купио Илија, ако је за купљено месо платио 1100 динара?

201. Од 17 kg свежег грожђа добије се 2 kg сувог грожђа. Колико грожђа треба осушити да би добили 7 kg сувог грожђа?

202. Миша за 5 сати направи 12 кравата, а Диша за 2 сата направи 5 кравата. Колико кравата ће заједно направити Миша и Диша за 20 сати?

203. Ако 15 радника за 8 дана направе 144 прозора, колико прозора ће направити 7 радника за 20 дана?

204. Одреди вредност израза:
$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right).$$

205. Израчунај збир: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$.

206. Између бројева 1, 2 и 3 уметнути симболе рачунских операција и заграде тако да добијени израз има вредност: 0, 1, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, –3.

207. Реши једначине:
а) $x + 1{,}75 = 0{,}8$; б) $x - 2{,}25 = 1{,}125$;
в) $3{,}5 - x = 5{,}375$.

208. Реши једначине:

а) $x + 1\frac{3}{4} = -2\frac{2}{5}$; б) $3\frac{1}{4} - x = 2\frac{2}{5}$;

в) $4\frac{3}{4} - \left(x + 1\frac{2}{3}\right) = 2\frac{1}{2}$.

209. Колико решења имају једначине:
а) $x - x = 2008$; б) $x + 5 = 2$; в) $x + 5 = 2 + x + 3$?

210. Реши једначине:
а) $-3x = 69$; б) $x : 5 = -8$, в) $-2x = 0$;

211. Збир трећине, четвртине и петине једног броја је 94. О ком броју је реч?

212. Лубеница и тег од 5 kg имају масу 12,75 kg. Колика је маса лубенице?

213. Обим једнакокраког троугла је 30 cm, а крак је 11,3 cm. Колика је дужина основице?

214. Разлика броја и њему супротног броја је 2,7. О којим бројевима је реч?

215. Збир два броја је 50, а њихова разлика 76. О којим бројевима је реч?

216. Обим квадрата је 3 m. Колика је његова површина?

217. Површина правоугаоника је 11 cm², а његова дужина је 3 cm. Колика је ширина правоугаоника?

218. Углови троугла су $(x + 7)^\circ$, $(2x - 3)^\circ$ и $(3x + 14)^\circ$. Да ли је тај троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

219. Девојчице чине $\frac{2}{5}$ разреда. Ако би дошле још 4 девојчице број дечака и девојчица би био једнак. Колико ученика сада има у том разреду?

220. Када је прочитао $\frac{3}{7}$ књиге Драшку је остало да прочита још 64 странице. Колико страница има та књига?

221. Предраг и Ненад имају заједно 310 динара. Колико има свако од њих, ако је $\frac{3}{4}$ Предрагове суме једнако са $\frac{4}{5}$ суме коју има Ненад?

222. Одредити разломак код кога је збир бројиоца и имениоца једнак 23, а именилац је за 5 већи од бројиоца.

223. Одреди сва целобројна решења неједначина:
а) $-8\frac{2}{5} < 6x \le 7\frac{1}{3}$; б) $-5\frac{3}{4} < -\frac{2}{5}x \le 3\frac{5}{6}$.

224. Реши неједначине:

а) $4 \cdot x + 2\frac{1}{3} \ge 1\frac{1}{5}$;

б) $3 \cdot x - 2\frac{4}{7} < -4$;

в) $5\frac{1}{4} - 2 \cdot x \le 3\frac{5}{6}$.

225. Реши неједначину: $-4 \le \frac{x-2}{3} \le 5$.

226. Странице троугла су $x + 6$, $2x + 5$ и $3x + 4$, при чему је x неки рационалан број.
а) Одреди све рационалне бројеве x, за које постоји тај троугао.
б) Одреди најмањи рационалан број x за који су све странице троугла природни бројеви?
в) Може ли тај троугао бити једнакостраничан?

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Збир два супротна рационална броја је 2.	тачно	нетачно
2. Бројеви $-4{,}5$ и $\left(-\frac{9}{2}\right)$ су једнаки.	тачно	нетачно
3. Сваки позитиван рационалан број је већи од -7.	тачно	нетачно
4. Збир рационалних бројева $-2{,}75$ и $3{,}25$ је 6.	тачно	нетачно
5. Вредност израза $\frac{1}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)$ је 3.	тачно	нетачно
6. Ако је $x=-0{,}5$, онда је $(-8)\cdot x=4$.	тачно	нетачно
7. Ако је $12y=-6$, онда је $y=2$.	тачно	нетачно
8. Вредност израза $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$ је 1.	тачно	нетачно
9. Једначина $\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert=-2$ нема решења.	тачно	нетачно
10. Неједначина $\frac{x}{6}<3$ има тачно два решења.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. Збир бројева $\left(-\frac{9}{2}\right)$ и $\frac{9}{2}$ једнак је:

А) 9; Б) -9; В) 0; Г) $\frac{18}{4}$; Д) $-\frac{18}{4}$.

2. Вредност израза $-3{,}75+2-\left(-\frac{3}{4}\right)$ је:

А) -2; Б) -1; В) 0; Г) 1; Д) 2.

3. Ако је $a=-3$, онда је $a-(-a)+\lvert a\rvert$ једнако:

А) -3; Б) 3; В) 0; Г) 9; Д) -9.

4. Вредност израза $(-3{,}75)\cdot 4+(-8)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ је:

А) -15; Б) 9; В) 0; Г) 15; Д) -9.

5. Вредност израза $(-3{,}75):\frac{5}{8}+(-4):\left(-\frac{2}{3}\right)$ је:

А) -6; Б) 6; В) 0; Г) 12; Д) -12.

6. Решење једначине $5x+4=3$ је:

А) $-\frac{7}{5}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) 0; Г) 0,2; Д) $-\frac{1}{5}$.

7. Једно од решења неједначине $-8-7x>-6$ је:

А) 3; Б) -3; В) 0; Г) 1; Д) 2.

8. Једна цев сама напуни базен за 6 сати. Ако три истоветне цеви пуне базен истовремено онда ће две трећине базена напунити за:

А) 80 минута; Б) 100 минута; В) 120 минута; Г) 140 минута; Д) 160 минута.

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

Позитивни разломци
Негативни разломци
Супротни разломци
Рационални бројеви
Скуп рационалних бројева
Апсолутна вредност
Реципрочни бројеви
Двојни разломак
Израз (математички израз)
Непозната (величина)
Једначине
Неједначине
Метода клацкалице

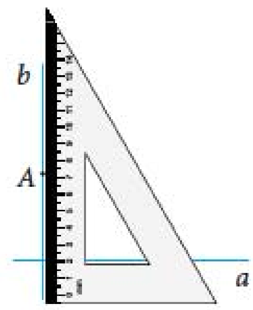
ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

1.1.	Израчунај: $1\frac{3}{8}:\left(-\frac{33}{48}\right)$.	**15**
1.2.	Израчунај: $\left[\left(-\frac{5}{7}\right):\left(-\frac{9}{14}\right)\right]\cdot\left(2\frac{7}{10}\right)$.	**20**
1.3.	Израчунај: $\left(-\frac{10}{11}\right)\cdot\left(-\frac{13}{14}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right):\left(-\frac{12}{13}\right)$.	**25**
2.1.	Одреди вредност израза: $\left(2\frac{1}{2}-3\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}:\frac{39}{20}\right)$.	**15**
2.2.	Одреди вредност израза: $\left(2\frac{7}{10}-3\frac{1}{13}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}:1\frac{7}{8}\right)\cdot\left(3{,}2-\frac{16}{5}\right)$.	**20**
2.3.	Збир бројева -7 и $3\frac{5}{8}$ помножи њиховим количником.	**25**
3.1.	Мира је за 3,2 kg јабука платила 160 динара. Колико је новца платила Јагода, ако је купила 1,8 kg јабука?	**15**
3.2.	Путник $\frac{5}{6}$ пута пређе за 48 минута. За које време ће путник прећи $\frac{7}{8}$ пута?	**20**
3.3.	Свеже печурке садрже $\frac{4}{5}$ воде, а суве $\frac{1}{4}$ воде. Колико треба осушити свежих печурака да би се добило 1000 kg сувих печурки?	**25**
4.1.	Шта је веће: производ или количник бројева (-18) и 6?	**15**
4.2.	Реши неједначину: $\left(-2\frac{3}{4}\right)-11x>4\frac{1}{8}$.	**20**
4.3.	Одреди збир свих целобројних решења неједначине: $\frac{x}{2023}\leq\frac{1}{7}$.	**25**

4 ТРОУГАО – *други део*

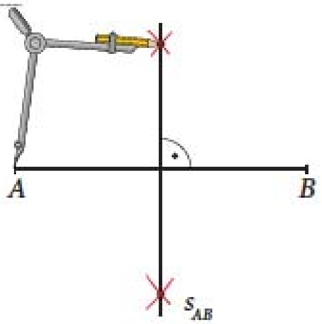
4.1. Геометријске конструкције

Подсетимо се: У 5. разреду смо помињали нормалу на дату праву из дате тачке.

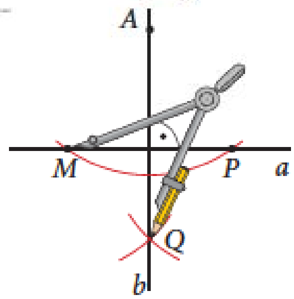


Нацртати ту нормалу значи искористити прав угао троугаоног лењира. На слици је приказано цртање нормале b на дату праву a из дате тачке A.

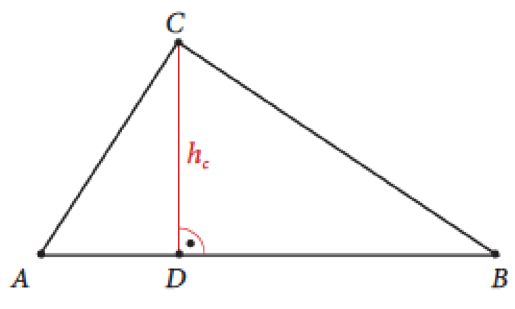
Приликом конструкције користимо само шестар и обичан лењир. Подсетимо се конструкције симетрале дужи. Из тачака A и B смо конструисали кружнице истог полупречника (довољно је нацртати кружни лук). Битно је да полупречник буде већи од половине дужи AB да би се те кружнице пресекле. Те две пресечне тачке одређују симетралу дужи AB.



То користимо да бисмо конструисали нормалу b на дату праву a из дате тачке A. Из тачке A конструишемо кружницу која праву a сече у тачкама M и P. Даље се задатак своди на конструкцију симетрале дужи MP. Пошто тачка A припада симетрали дужи MP, довољно је пронаћи још једну тачку Q са доње стране праве a.

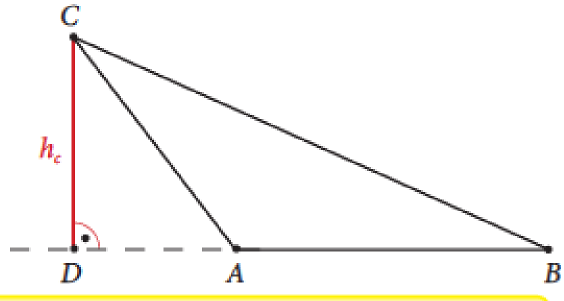


Ово нам помаже да истакнемо још један елемент троугла који је нарочито значајан. У питању је најкраће растојање темена од наспрамне странице троугла, тј. дужина нормале из темена на наспрамну страницу.



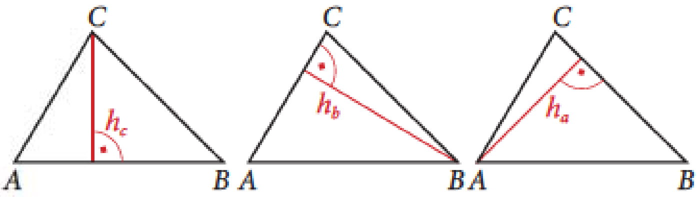
Дуж CD на слици је **висина** ΔABC. Уобичајена ознака за висину је слово h са индексом који показује на коју страницу је „спуштена” нормала. У нашем случају је $CD = h_c$.

Проблем настаје код тупоуглог троугла. Подножје висине из темена оштрог угла не припада страници, већ њеном продужетку.



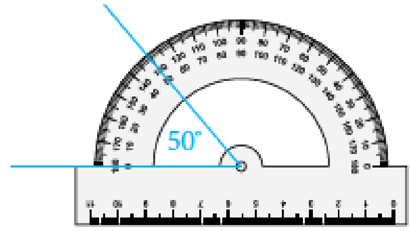
Висина троугла је дуж чија једна крајња тачка је теме троугла, а друга је подножје нормале из тог темена на праву која садржи наспрамну страницу.

За разлику од човека, који има једну висину, троугао има три. У зависности од тога из ког темена је повучена, висине ћемо означавати са h_a, h_b и h_c.



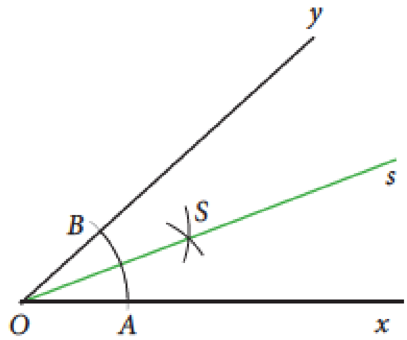
Конструкције неких углова

Подсетимо се: У 5. разреду смо научили како да нацртамо неки угао, користећи угломер.



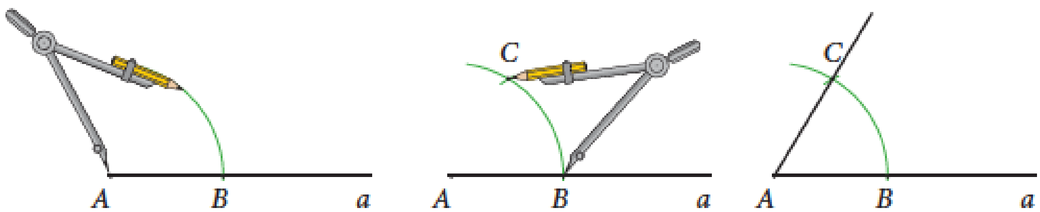
Такође, конструисали смо симетралу угла (полуправу која дели угао на два једнака дела).

Дат је $\measuredangle xOy$. Конструишемо кружницу са центром у тачки O чије пресеке са крацима угла означимо са A и B. Затим одредимо тачку S једнако удаљену од A и B. Полуправа Os која садржи тачку S је симетрала $\measuredangle xOy$.



Угао од 90° се конструише тако што конструишемо нормалу а то смо радили у 5. разреду. Погледај подсетник на почетку лекције.

Конструишимо сада угао од 60°. Када неко помене 60°, прва асоцијација би требало да буде једнакостранични троугао. На слици је приказана конструкција овог угла.



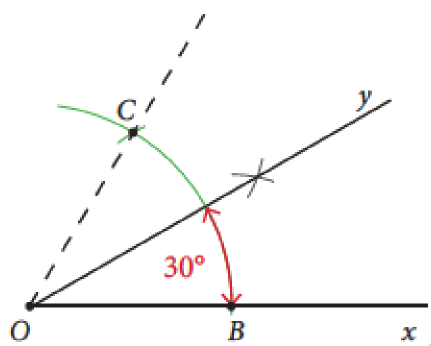
Нацртамо полуправу Aa. Из тачке A конструишемо кружницу произвољног полупречника и њен пресек са полуправом означимо са B. Из тачке B конструишемо кружницу истог полупречника и њен пресек са првом кружницом означимо са C. Пошто је $AB = AC = BC$, значи да је ΔABC једнакостранични, па је $\measuredangle BAC = 60°$.

Користећи углове од 60° и 90°, као и симетралу угла, можемо конструисати још неке углове.

ПРИМЕР 1. Конструисати угао од 30°.

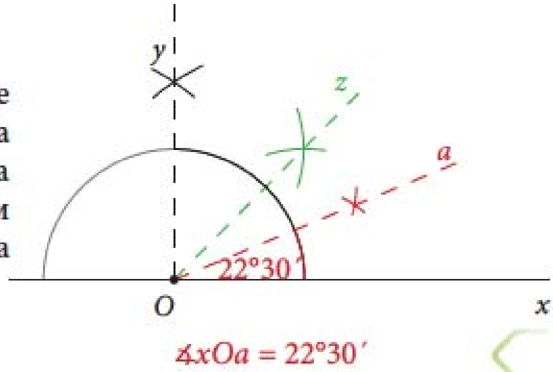
РЕШЕЊЕ Пошто је 60° : 2 = 30°, потребно је конструисати угао од 60°, а затим га симетралом поделити на два једнака дела.

Прво конструишемо $\measuredangle BOC = 60°$, а затим симетралу $\measuredangle BOC$, па је $\measuredangle xOy = 30°$.



ПРИМЕР 2. Конструиши угао од 22°30′.

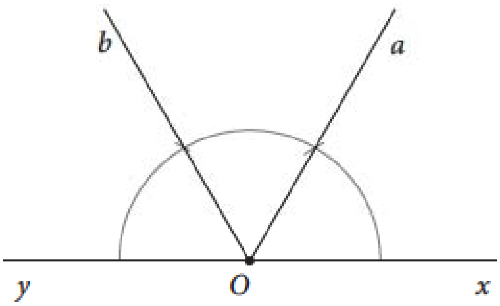
РЕШЕЊЕ Приметимо да је $22°30' \cdot 2 = 45°$, а да је $45° \cdot 2 = 90°$. То значи да прво треба конструисати угао од 90°, поделити га на два једнака дела, а затим добијени угао од 45° поново поделити на два једнака дела.

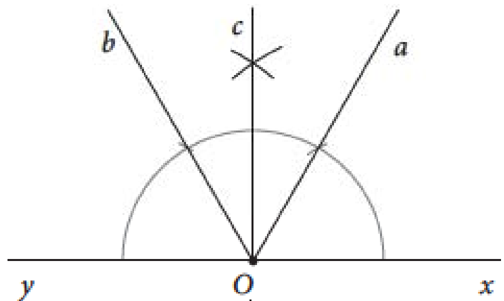


Показаћемо идеју за конструкцију још неких углова. Не можемо конструисати сваки угао, али то је математички проблем који превазилази наш тренутни ниво знања.

ПРИМЕР 3. Конструиши угао од а) 75°, б) 97°30′.

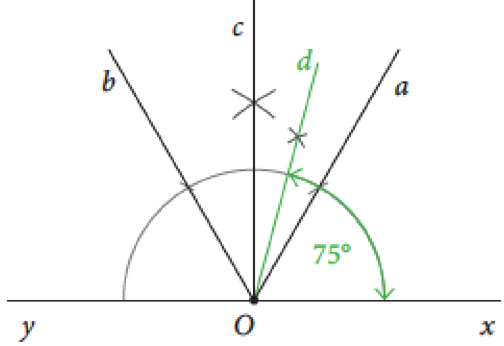
РЕШЕЊЕ а) Полазимо од $\measuredangle xOy = 180°$, па конструишемо $\measuredangle xOa = 60°$ и $\measuredangle xOb = 120°$ $(120° = 2 \cdot 60°)$.





Конструишемо симетралу $\measuredangle aOb$. Јасно је да је $\measuredangle aOc = 30°$.

Угао од 75° можемо добити ако саберемо угао од 60° и половину угла од 30°. Ако конструишемо симетралу $\measuredangle aOc = 30°$ као на слици, добијамо $\measuredangle aOd = 15°$. Дакле, $\measuredangle xOd = 75°$.



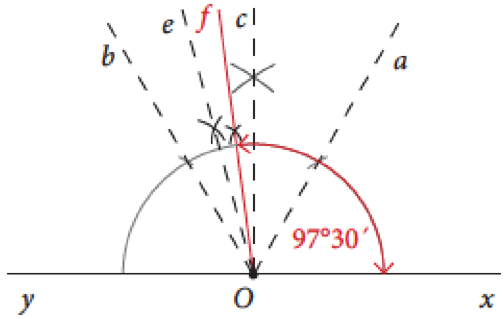
Наравно, ово је само једна од могућности за конструкцију угла од 75°. Уочавамо да је $75° = 60° + 15° = 90° - 15° = 45° + 30° = 150° : 2$, па бирајте шта вам се чини као најзанимљивија идеја за конструкцију.

б) Слично ћемо конструисати и угао од $97°30' = 90° + (30° : 2) : 2$. Дакле, прво конструишемо симетралу $\measuredangle cOb = 30°$, да бисмо добили угао од 15°. Затим конструишемо угао од $15° : 2$.

Oe је симетрала $\measuredangle cOb$.

Of је симетрала $\measuredangle cOe$.

$\measuredangle xOf$ је $= 97°30'$.

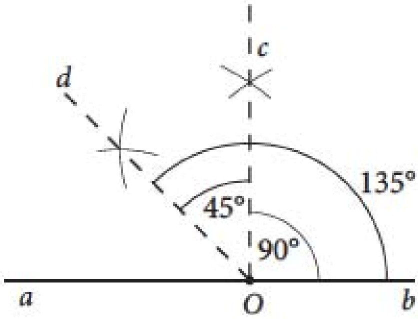


ПРИМЕР 4. Конструиши угао од 135°.

РЕШЕЊЕ Конструишимо прво угао од 90°, као на слици, $\measuredangle aOc = \measuredangle bOc = 90°$. Затим конструишимо симетралу $\measuredangle aOc$ да добијемо $\measuredangle aOd = \measuredangle cOd = 45°$.

Уочавамо:

$\measuredangle bOd = \measuredangle bOc + \measuredangle cOd = 90° + 45° = 135°$.

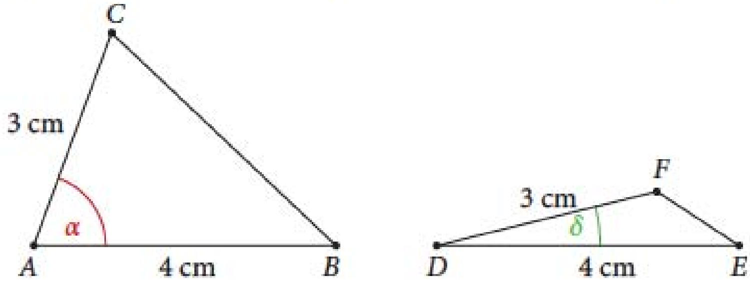


ЗАДАЦИ

1. Дат је угао α. Конструиши симетралу датог угла α.
2. Конструиши углове од:
   а) 60°; б) 30°; в) 90°; г) 45°.
3. Конструиши углове од:
   а) 120°; б) 135°; в) 150°.
4. Конструиши углове од:
   а) 75°; б) 22,5°; в) 67,5°.
5. Дати су оштри углови α и β ($\alpha > \beta$). Конструиши углове:
   а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha - \beta$.
6. Дат је оштар угао α. Конструиши угао:
   а) 2α; б) $\frac{\alpha}{2}$; в) $3 \cdot \frac{\alpha}{4}$.
7. Дат је оштар угао α. Конструиши углове:
   а) $\beta = 90° + \alpha$; б) $\gamma = 90° - \alpha$.
8. Дат је оштар угао β. Конструиши углове:
   а) $60° + \beta$; б) $45° + \beta$; в) $30° + \beta$.
9. Дат је троугао ABC, чини су углови α, β и γ. Конструктивним путем се увери да је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
10. Дата је права a и тачка M која јој припада. Конструиши праву b која садржи тачку M и нормална је на праву a.
11. Дата је права a и тачка M која не припада датој правој a. Конструиши праву b која садржи тачку M и која је нормална на праву a.
12. Дата је права a и тачка M која не припада датој правој a. Конструиши праву b која садржи тачку M и која је паралелна са правом a.

4.2. Основне конструкције троугла

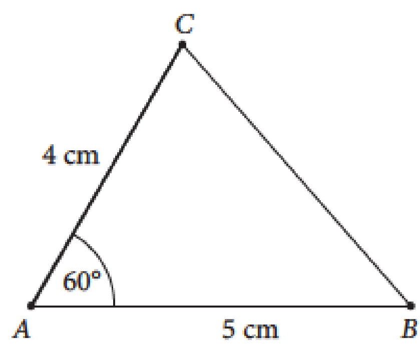
Раније смо истакли да троугао има шест основних елемената (три странице и три унутрашња угла). Колико елемената треба да буде познато да би троугао био потпуно одређен? Јасно је да два елемента нису довољна. Рецимо, ако знамо дужине две странице, у зависности од угла које оне захватају, имаћемо различите троуглове.



Пошто су углови α и δ на слици различити, онда ΔABC и ΔDEF имају другачији облик. Дакле, потребно је знати **три** елемента. Да ли било која три? Ова лекција ће нам отклонити дилеме.

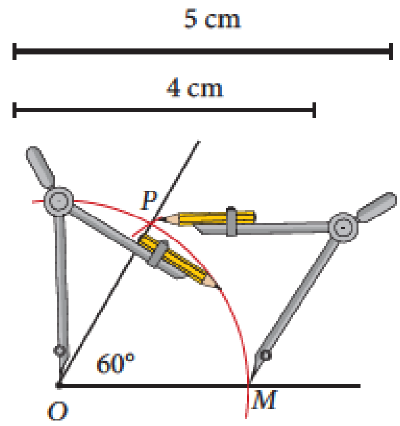
Конструкција троугла када су дате дужине две странице и величина угла између њих

ПРИМЕР 1. Конструиши ΔABC ако је $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $\alpha = 60°$.



РЕШЕЊЕ Прво скицирамо троугао и обележимо дате податке. То нам помаже да нађемо начин како да изведемо тражену конструкцију. Овај део задатка је врло битан и зовемо га **анализа**.

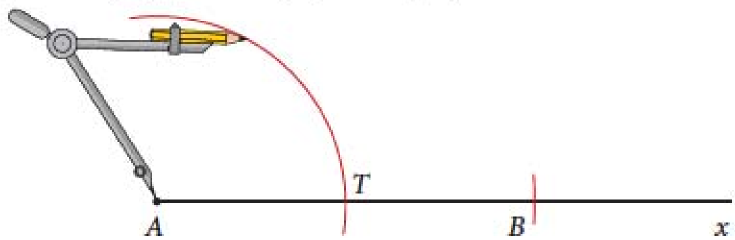
На основу скице, смишљамо идеју. Редослед корака при конструкцији је следећи: прво нацртамо дуж AB, затим конструишемо угао $\alpha = 60°$, па на другом краку угла одредимо тачку C на удаљености 4 cm од A. Очигледно је да су преостали елементи троугла (страница BC, углови β и γ) потпуно одређени, тј. морају бити онакви како им „дозволе" познати елементи.
Уобичајено је да се нацртају дужи и конструише угао који одговарају датим подацима, а да се затим пренесу при конструкцији.



Сада прелазимо на главни део задатка, а то је **конструкција**.

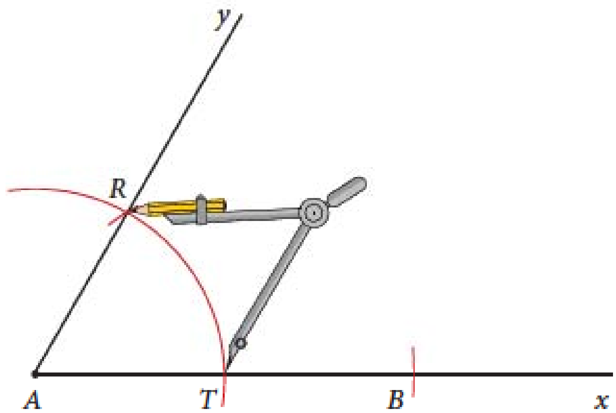
Овде користимо преношење дужи. Нацртамо полуправу Ax, па на њу пренесемо дату дуж од 5 cm. Отвором шестара „обухватимо” дату дуж, па са центром у A конструишемо кружницу и њен пресек са полуправом Ax означимо са B.

Затим **преносимо дати угао**. Конструишемо лук кружнице чији је центар тачка A, а полупречник је једнак полупречнику лука $\measuredangle MOP$.

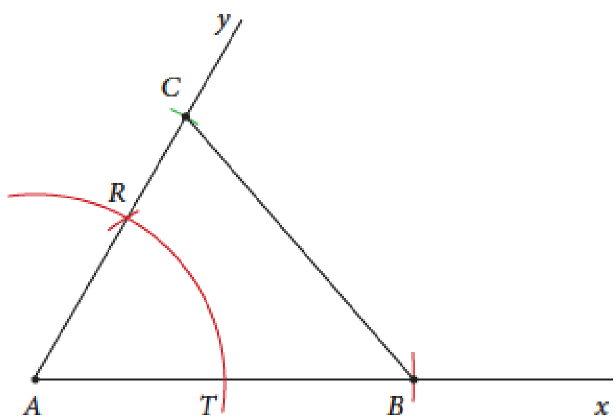


Конструишемо лук кружнице чији центар је пресечна тачка T претходно конструисаног лука и полуправе Ax, а полупречник је тетива која одговара луку $\measuredangle MOP$ (дуж MP).

Добијамо $\measuredangle MOP = \measuredangle TAR$ и $MP = TR$.



Сада имамо $\measuredangle xAy = 60°$. Остаје још да пренесемо и другу дату дуж, односно конструишемо лук кружнице $k(A, 4\text{ cm})$ и њен пресек са полуправом Ay означимо са C. На тај начин, добили смо тражени ΔABC.



Напомена: У пракси се угао обично директно конструише (без преношења), што поједностављује саму израду задатка.

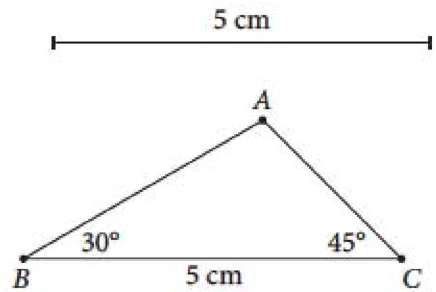
На основу овог примера можемо извести тврђење:

> Ако су дате **две странице троугла и угао између њих**, онда су једнозначно одређене величине свих углова и свих страница тог троугла (СУС).

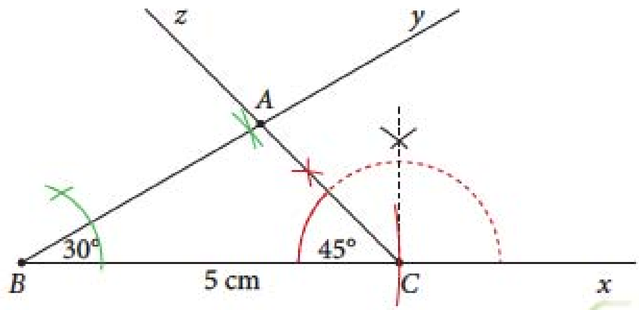
Уобичајено је да се страница троугла обележава са „С”, а угао са „У”, па ово тврђење скраћено означавамо „СУС”.

Конструкција троугла када је дата дужина странице и мере углова који леже на њој

ПРИМЕР 2. Конструиши ΔABC ако је $BC = 5\text{ cm}$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$.



РЕШЕЊЕ Анализирамо скицу и прелазимо на конструкцију. Нацртамо полуправу Bx, па на њу пренесемо дуж од 5 cm. Тако смо добили теме C. Затим, конструишемо полуправу By тако да је $\measuredangle CBy = 30°$ и полуправу Cz тако да је $\measuredangle BCz = 45°$. Пресек полуправих By и Cz је тачка A. На тај начин, добили смо тражени ΔABC.



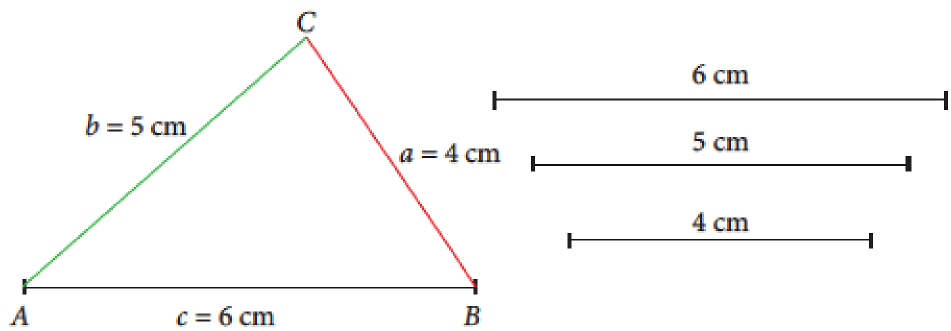
На основу овог примера можемо извести тврђење:

Ако је дата дужина странице троугла и мере углова који на њу належу, онда су једнозначно одређени сви елементи тог троугла (УСУ).

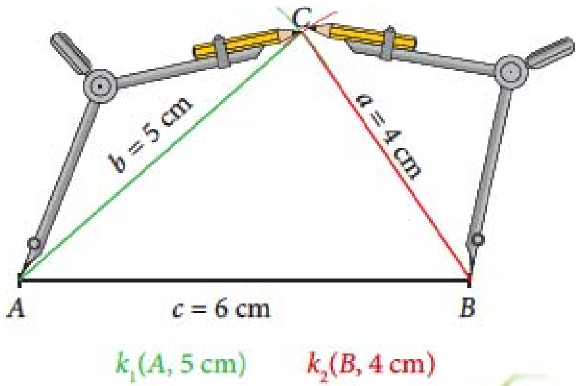
Овде треба водити рачуна о датим угловима. Ако је њихов збир једнак 180°, или већи од 180°, такав троугао не постоји.

Конструкција троугла када су дате дужине све три странице

ПРИМЕР 3. Конструиши ΔABC ако је $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 6\text{ cm}$.



РЕШЕЊЕ Анализирамо скицу и прелазимо на конструкцију. Прво нацртамо дуж AB. Тачка C је на растојању 5 cm од тачке A, па се налази на кружници $k_1(A, 5\text{ cm})$. Слично, тачка C је на кружници $k_2(B, 4\text{ cm})$. У пресеку тих кружница добијамо теме C. (Ове кружнице имају две заједничке тачке, а ми ћемо узети једну од њих, изнад дужи AB.) На тај начин, добили смо тражени ΔABC.



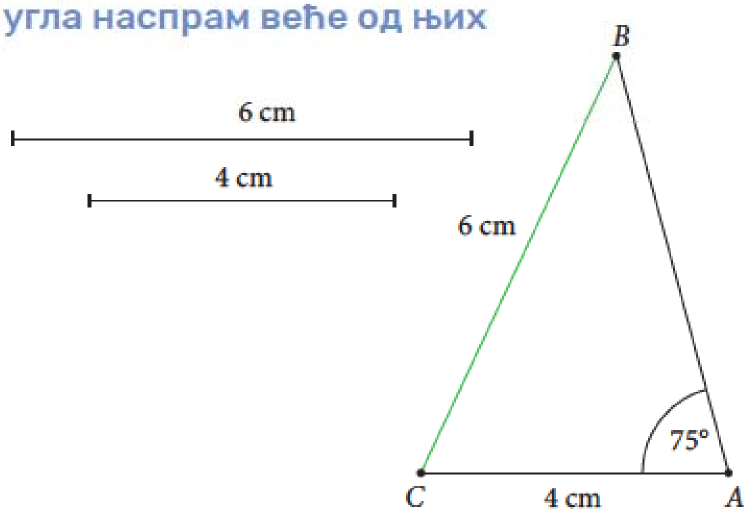
На основу овог примера можемо извести тврђење:

> Ако су дате дужине све три странице троугла, онда су једнозначно одређени сви елементи тог троугла (ССС).

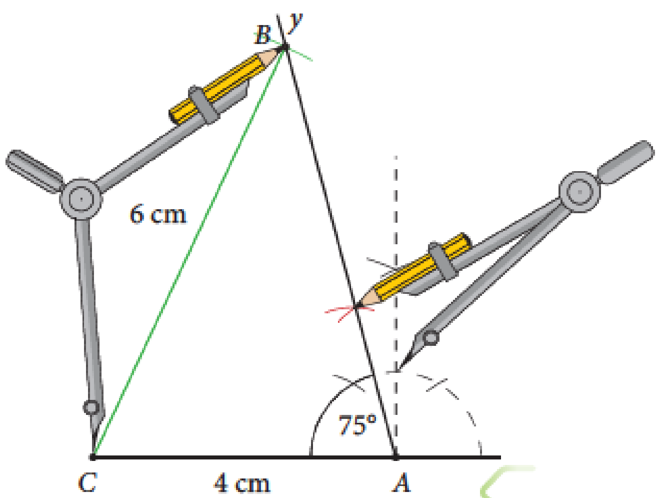
Овде треба водити рачуна о датим страницама. Мора бити задовољена неједнакост троугла (збир две краће странице мора бити дужи од највеће странице). У супротном, такав троугао не постоји.

Конструкција троугла када су дате дужине две странице и величина угла наспрам веће од њих

ПРИМЕР 4. Конструиши ΔABC ако је $BC = 6$ cm, $AC = 4$ cm и $\alpha = 75°$.



РЕШЕЊЕ Анализирамо скицу и прелазимо на конструкцију. Нацртамо прво дуж CA. Затим нацртамо полуправу Ay тако да је $\measuredangle CAy = 75°$. Тачка B је на растојању 6 cm од тачке C, па се налази на кружници $k(C, 6\text{ cm})$. Пресек те кружнице и полуправе Ay је теме B. На тај начин, добили смо тражени ΔABC.

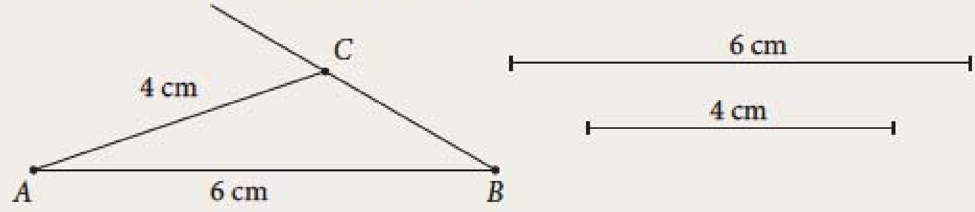


На основу претходног примера можемо извести тврђење:

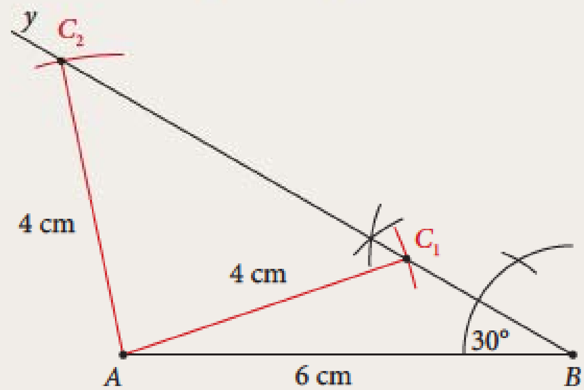
Ако су дате две странице троугла и угао наспрам веће од њих, онда су једнозначно одређени сви елементи тог троугла (ССУ).

Сазнај више: Ако су дате две странице и угао наспрам мање од њих, задатак може имати два решења, једно решење, а постоји могућност и да нема решења. Погледајмо следећи пример.

Конструиши ΔABC ако је $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm, $\beta = 30°$



Анализирамо скицу и прелазимо на конструкцију. Нацртамо прво дуж AB, а затим полуправу By тако да је $\measuredangle ABy = 30°$. Тачка C је на удаљености 4 cm од тачке A, па се налази на кружници $k(A, 4\text{ cm})$. Та кружница сече полуправу By у двема тачкама C_1 и C_2, па задатак има два решења, ΔABC_1 и ΔABC_2.



Шта би било да је $AC = 3$ cm? Тада кружница $k(A, 3\text{ cm})$ додирује полуправу By, па задатак има једно решење. Тада би ΔABC био правоугли са правим углом код темена C (сетимо се да је катета наспрам угла од 30° два пута краћа од хипотенузе).

Ако је $AC < 3$ cm, задатак **нема решења**.

ПРИМЕР 5. Конструисати једнакокраки троугао чија основица је 8 cm, а угао при врху 150°.

РЕШЕЊЕ Јасно је да морамо израчунати меру угла на основици.

$$(180° - 150°) : 2 = 30° : 2 = 15°.$$

Сада знамо основицу 8 cm и два угла по 15° која леже на њој, па можемо конструисати троугао (УСУ).

Летњи троугао

Током летњих месеци, ако се окренеш ка истоку и погледаш ка небу, можеш лако уочити тзв. Летњи троугао (на латинском *Triangulum*). Овај скуп звезда чине три звезде: Вега, Денеб и Алтаир. Када се пронађу сва три темена овог троугла, пронађе се, у ствари, место где се на небу пружа наш Млечни пут, о којем се много више учи на часовима географије. Тачније, можеш да видиш део Млечног пута, у зависности од места с којег посматраш небо.

Као што знаш, често су звезде биле јунаци легенди. Тако, једна легенда Далеког истока говори о принцези Веги која је била заљубљена у обичног младића, из народа, по имену Алтаир. Међутим, када је Вегин отац сазнао за то наљутио се на своју ћерку и забранио јој да се виђа са њим. И заправо, Вега је од Алтаира одвојена магловитим Млечним путем. Према овој легенди, само једном годишње се од звезда образује небески мост, да би Вега и Алтаир могли поново да се сретну. Једна од звезда која чини овај мост је и Денеб.

ЗАДАЦИ

13. Конструиши троугао ABC, ако је $AB = 5$ cm, $\measuredangle ABC = 60°$ и $BC = 4$ cm.

14. Конструиши правоугли троугао чије су катете 3 cm и 4 cm.

15. Конструиши једнакокраки троугао ABC, ако је $AC = BC = 5$ cm и $\measuredangle ACB = 30°$.

16. Конструиши троугао ABC, ако је $AB = 5$ cm, $\measuredangle ABC = 60°$ и $\measuredangle BAC = 45°$.

17. Конструиши правоугли троугао ABC чија је катета $AC = 4$ cm, и $\measuredangle ABC = 30°$.

18. Конструиши правоугли троугао ABC чија је хипотенуза $AB = 4$ cm, и $\measuredangle ABC = 60°$.

19. Конструиши једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$), ако је $AB = 5$ cm и $\measuredangle ABC = 30°$.

20. Конструиши троугао ABC, ако је $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm и $CA = 6$ cm.

21. Конструиши једнакостранични троугао ABC, ако је $AB = 5$ cm.

22. Конструиши троугао ABC, ако је $AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm и $\measuredangle ABC = 120°$.

23. Конструиши троугао ABC, ако је $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm и $\measuredangle ABC = 45°$.

24. Конструиши правоугли троугао ABC, ако је $AC + BC = 7$ cm и хипотенуза $AB = 5$ cm.

25. Обим троугла ABC је 13 cm, $\measuredangle ABC = 45°$ и $\measuredangle BAC = 60°$. Конструиши троугао ABC.

4.3. Подударност троуглова

Сигурно сте некада чули реченицу: „Он ми је добар друг зато што се наша интересовања скоро потпуно **подударају**".

Или: „Њихови гласови се **не подударају** са нашим".

Занимљив је и део из Египатског календара: „Заједно са званичним, грађанским календаром у Египту се користио и народни, лунарни календар. У њему су се смењивали месеци од 29 и 30 дана. Нова година по том календару увек се **подударала** са почетком изливања Нила".

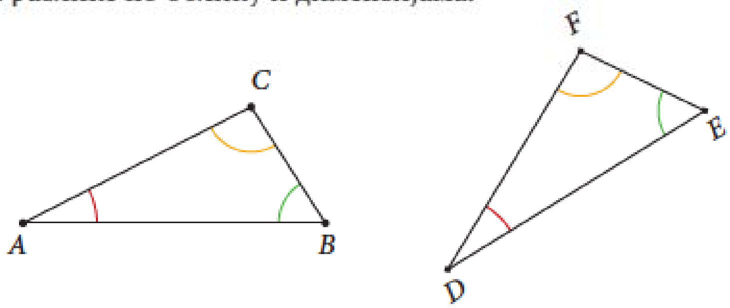
Јасно је да, у овим реченицама, реч подударање значи једнакост, идентичност, поклапање...

У геометрији реч **подударност** можемо објаснити на сличан начин.

Два троугла су **подударна** ако један од њих можемо пренети тако да се поклопи са другим.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Подударни троуглови могу се разликовати по свом положају, али међу њима нема разлике по облику и димензијама.



Ознака за подударност је $\cong$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Подударност ΔABC и ΔDEF означавамо $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

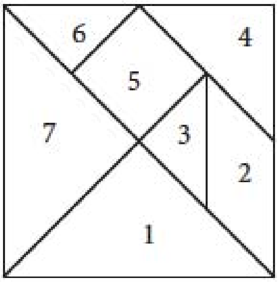
Подударност подразумева једнакост шест основних елемената једног троугла са елементима другог троугла. Битно је уочити **парове једнаких страница и парове једнаких углова**. Користићемо и израз парови одговарајућих елемената, односно одговарајући елементи подударних троуглова.

У нашем случају је: $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$,

$\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, $\measuredangle CBA = \measuredangle FED$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$.

ПРИМЕР 1. (Задатак са завршног испита 2018. године.)

Танграм је једна од најпознатијих математичких слагалица која се састоји од седам фигура. Међу тим фигурама су два пара подударних троуглова. Запиши парове подударних троуглова тако што ћеш написати бројеве који се у њима налазе.

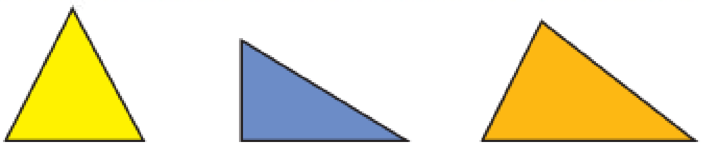


Један пар подударних троуглова је ______ и ______, а други пар ______ и ______.

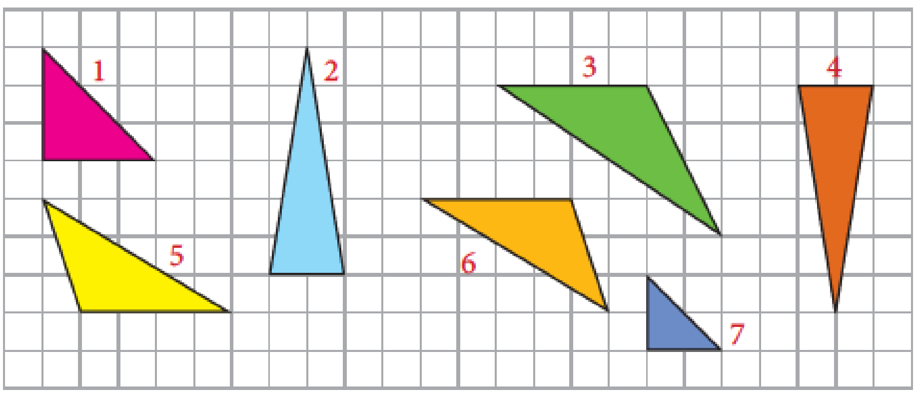
РЕШЕЊЕ Посматрајући слику, замишљамо који троуглови би могли да се доведу до поклапања, па закључујемо да је први пар 1 и 7, а други 3 и 6.

ЗАДАЦИ

26. Да ли су троуглови приказани на следећој слици подударни?



27. На наредној слици је дато и нумерисано седам троуглова. Одреди који од њих су подударни.



28. Могу ли бити подударни: а) два оштроугла троугла; б) један оштроугли и један правоугли троугао; в) један тупоугли и један оштроугли троугао; г) један правоугли и један тупоугли троугао?

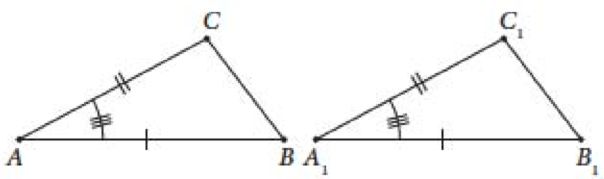
29. Дата су два једнакостранична троугла чије су странице 5 cm и 6 cm. Да ли су они подударни?

4.4. Ставови подударности троуглова

Нас занима како најједноставније закључити да ли су два троугла подударна. Да ли је потребно утврдити једнакост свих парова одговарајућих елемената? Сетимо се да је приликом конструкције троугла било довољно знати три елемента у одређеној комбинацији, па да троугао буде потпуно одређен. То нас доводи до тврђења која су позната као **ставови подударности троуглова.**

1. став подударности (СУС)

Приликом конструкције, нагласили смо да су сви елементи троугла одређени ако су нам дате две странице и угао између њих (СУС).



На слици је $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$ (једнаким бројем цртица су обележени једнаки елементи). Одатле следи да је $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Користимо запис у коме симбол „⇒" означава да из једнакости одговарајућих елемената по ставу (СУС) следи подударност троуглова.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Два троугла су подударна ако су им једнаке по две странице и њима захваћен угао (СУС).

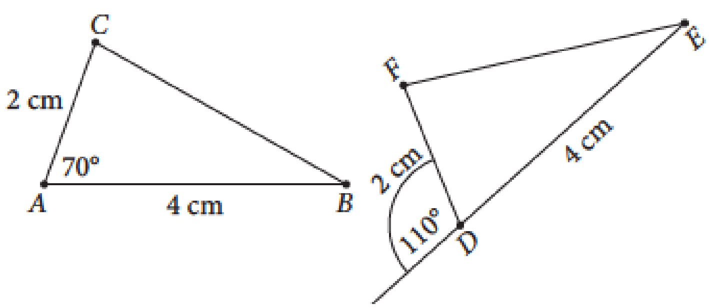
1. $AB = A_1B_1$
2. $AC = A_1C_1$
3. $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$

(СУС)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

Напомена: Није битан редослед записивања елемената, већ њихов распоред на слици.

ПРИМЕР 1. Докажи да су троуглови са слике подударни и запиши парове одговарајућих елемената.



РЕШЕЊЕ Наравно, прво ћемо израчунати унутрашњи угао код темена D.

$\measuredangle D = 180° - 110° = 70°.$

Сада имамо доказ на цедуљи десно.

1. $AB = DE$
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$
3. $AC = DF$

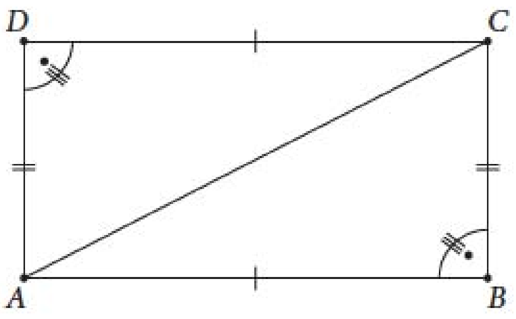
(СУС)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$

Пошто су троуглови подударни, одатле закључујемо да су преостали одговарајући елементи међусобно једнаки:
$BC = EF$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$, $\measuredangle BCA = \measuredangle EFD$.

ПРИМЕР 2. **Дијагонала правоугаоника.** Дат је правоугаоник $ABCD$. Докажи да дуж AC дели тај правоугаоник на два подударна троугла.

РЕШЕЊЕ Потребно је доказати да је $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Битно је користити особине дате фигуре (у овом случају правоугаоника) које знамо од раније и оно што је дато у поставци задатка.

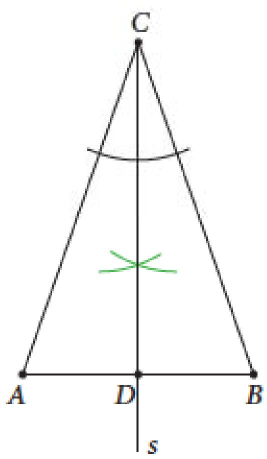


1. $AB = CD$ (наспрамне странице правоугаоника)
2. $BC = DA$ (наспрамне странице правоугаоника)
3. $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$ (90°)

(СУС)

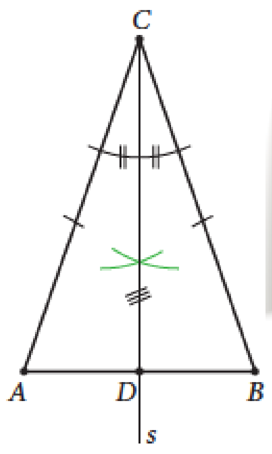
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta CDA$

***ПРИМЕР 3.** Доказати да симетрала угла при врху једнакокраког троугла дели основицу на два једнака дела.



РЕШЕЊЕ На слици је једнакокраки ΔABC ($AC = BC$). Конструисали смо симетралу угла γ.

Потребно је доказати да је $AD = BD$. Идеја је да докажемо да је $\Delta ADC \cong \Delta BDC$, па пошто то значи да ће и преостали парови одговарајућих елемената бити једнаки, можемо рећи да је $AD = BD$.



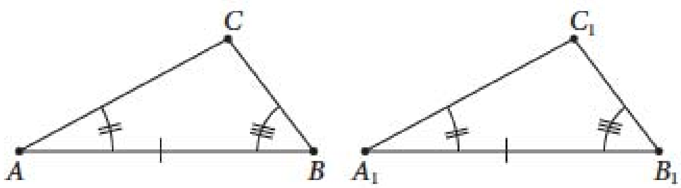
1. $AC = BC$ (краци једнакокраког троугла)
2. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$ (симетрала дели $\measuredangle ACB$ на два једнака дела)
3. $DC = DC$ (заједничка страница)

(СУС)

$\Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC$

Из подударности ова два троугла закључујемо $AD = BD$.

2. став подударности (УСУ)



Приликом конструкције, нагласили смо да су сви елементи троугла једнозначно одређени ако нам је дата једна страница и два угла која леже на њој (УСУ).

1. $AB = A_1B_1$
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$
3. $\measuredangle CBA = \measuredangle C_1B_1A_1$

(УСУ)

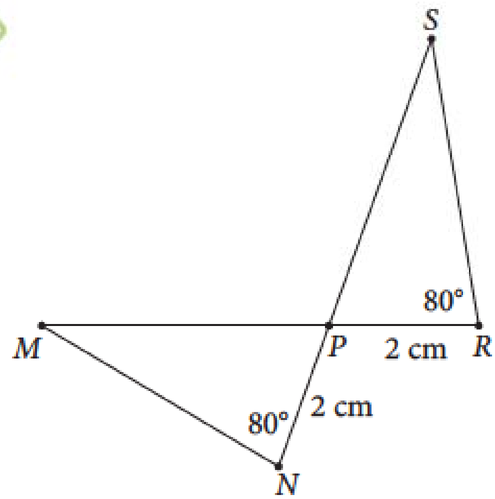
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Два троугла су подударна ако су им једнаке по једна страница и два на њој налегла угла (УСУ).

ПРИМЕР 4. Докажи да су троуглови са слике подударни и запиши парове одговарајућих елемената.

РЕШЕЊЕ



1. $NP = RP$ (2 cm)
2. $\measuredangle MNP = \measuredangle SRP$ (80°)
3. $\measuredangle NPM = \measuredangle RPS$ (унакрсни углови)

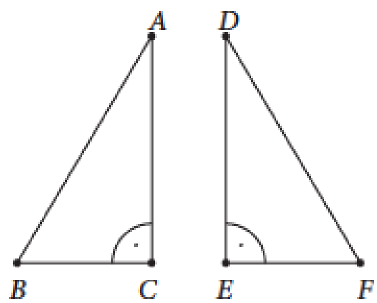
(УСУ)

$\Rightarrow \Delta MNP \cong \Delta SRP$

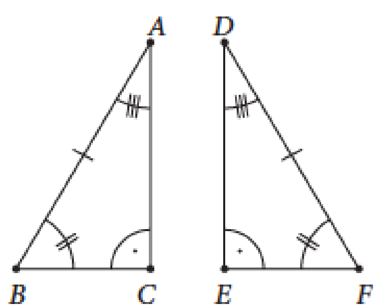
Пошто су троуглови подударни, одатле закључујемо да су и преостали одговарајући елементи међусобно једнаки:

$MN = SR$, $MP = SP$, $\measuredangle PMN = \measuredangle PSR$.

ПРИМЕР 5. Хипотенуза и један оштар угао правоуглог троугла једнаки су одговарајућим елементима другог правоуглог троугла. Доказати да су та два троугла подударна.



РЕШЕЊЕ Дато је $AB = DF$ и нпр. $\measuredangle ABC = \measuredangle DFE$. Пошто је и $\measuredangle BCA = \measuredangle FED = 90°$, онда мора бити и $\measuredangle CAB = \measuredangle EDF$ (трећи унутрашњи угао троугла). Сада имамо:

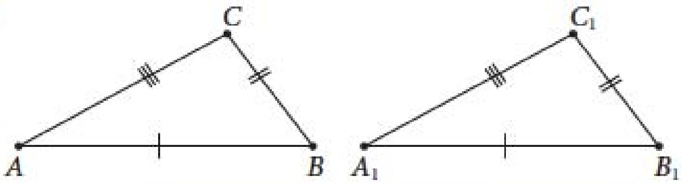


1. $AB = DF$
2. $\measuredangle ABC = \measuredangle DFE$
3. $\measuredangle CAB = \measuredangle EDF$

(УСУ)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DFE$

3. став подударности (ССС)



Приликом конструкције, нагласили смо да су сви елементи троугла једнозначно одређени ако су дате дужине све три странице (ССС).

1. $AB = A_1B_1$
2. $BC = B_1C_1$
3. $CA = C_1A_1$

(ССС)

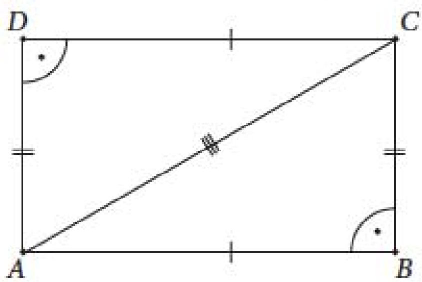
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су странице једног троугла једнаке страницама другог троугла, онда су ти троуглови подударни.

ПРИМЕР 6. Пример „дијагонала правоугаоника" (Пример 2). Докажи да дијагонала дели правоугаоник на подударне троуглове

РЕШЕЊЕ



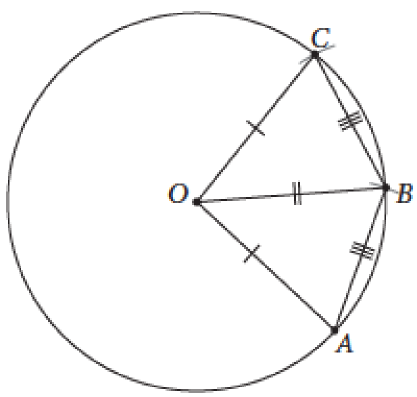
1. $AB = CD$ (наспрамне странице)
2. $BC = DA$ (наспрамне странице)
3. $AC = CA$ (заједничка страница)

(ССС)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta CDA$

ПРИМЕР 7. Дата је кружница произвољног полупречника и на њој тачке A, B и C тако да је $AB = BC$. Докажи да је $\Delta OAB \cong \Delta OCB$ (тачка O је центар кружнице).

РЕШЕЊЕ Обратити пажњу на оно што је дато у тексту задатка. Овде је то $AB = BC$, па то треба искористити при доказивању.

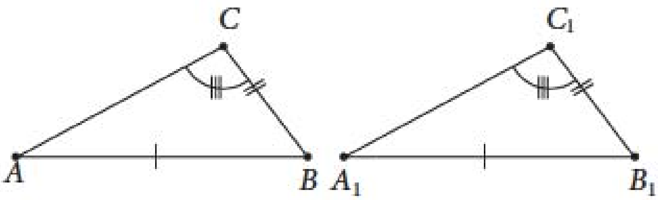


1. $OA = OC$ (полупречник кружнице)
2. $OB = OB$ (заједничка страница)
3. $AB = CB$ (по услову задатка)

(ССС)

$\Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCB$

4. став подударности (ССУ)



Приликом конструкције, нагласили смо да су сви елементи троугла одређени ако су нам дате две странице и угао наспрам веће од њих (ССУ).

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Два троугла су подударна ако су им једнаке по две странице и угао наспрам веће од њих (ССУ).

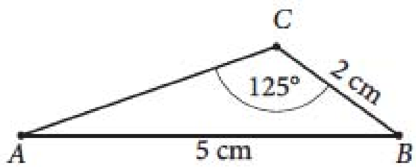
$AB > BC$ и $A_1B_1 > B_1C_1$

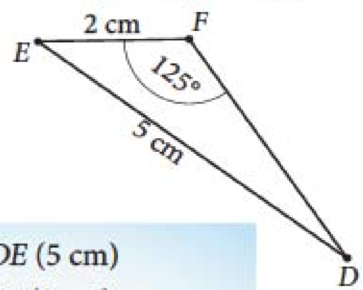
1. $AB = A_1B_1$
2. $BC = B_1C_1$
3. $\measuredangle BCA = \measuredangle B_1C_1A_1$

(ССУ)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

ПРИМЕР 8. Докажи да су троуглови са слике подударни и запиши парове одговарајућих елемената.





РЕШЕЊЕ Доказ је на цедуљи десно. Пошто су троуглови подударни, одатле закључујемо да су и преостали одговарајући елементи међусобно једнаки:

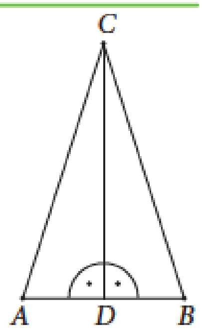
$CA = FD, \measuredangle ABC = \measuredangle DEF, \measuredangle CAB = \measuredangle FDE.$

1. $AB = DE$ (5 cm)
2. $BC = EF$ (2 cm)
3. $\measuredangle BCA = \measuredangle EFD$ (125°)

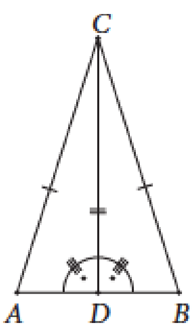
(ССУ)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$

***ПРИМЕР 9.** Доказати да висина конструисана из врха једнакокраког троугла дели основицу на два једнака дела.



РЕШЕЊЕ На слици је једнакокраки ΔABC у коме је $AC = BC$. Нацртали смо висину CD. Потребно је доказати да је $AD = BD$. Идеја је да докажемо да је $\Delta ADC \cong \Delta BDC$, па пошто то значи да ће и преостали парови одговарајућих елемената бити једнаки, можемо рећи да је $AD = BD$. Доказ је на цедуљи.



1. $AC = BC$ (краци једнакокраког троугла)
2. $DC = DC$ (заједничка страница)
3. $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC$ (90°)

(ССУ)

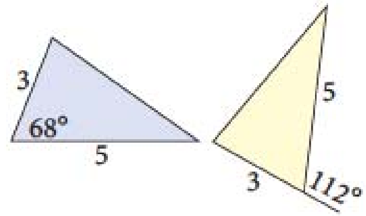
$\Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC$

Следи $AD = BD$.

Напомена: Примери 3. и 9. су слични. Гледајући слику, видимо да су симетрала угла при врху и висина спуштена на основицу једнакокраког троугла исте. Међутим, при доказивању не смемо користити изразе „види се”, „чини ми се” итд. Дакле, ако је дата симетрала угла, једино смемо користити да она дели тај угао на два једнака дела, без обзира на то колико нам се чинило да она пада на основицу под правим углом.

ЗАДАЦИ

30. Да ли су троуглови на слици подударни?



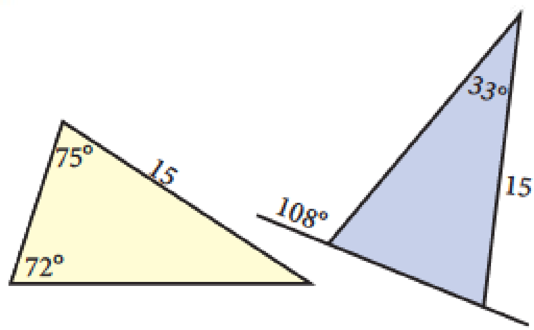
31. Дати су правоугли троуглови ABC и MNP, са правим угловима код темена C и P. При том је $AC = MP$ и $BC = NP$. Докажи: а) $\Delta ABC \cong \Delta MNP$; б) $AB = MN$.

32. Дати су једнакокраки троуглови ABC и MNP, при чему је $AC = BC = MP = NP$, $\measuredangle ACB = 40°$ и $\measuredangle MNP = 70°$. Докажи: а) $\Delta ABC \cong \Delta MNP$; б) $AB = MN$.

33. Дужи AB и CD имају заједничко средиште O. Докажи да је:
а) $AC = BD$ и $AD = BC$; б) AC паралелно са BD.

34. Докажи да су дијагонале правоугаоника једнаке.

35. Да ли су троуглови на слици подударни?

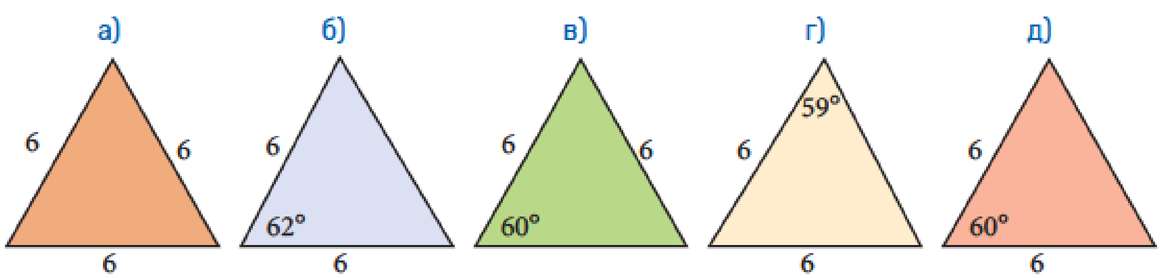


36. Дати су правоугли троуглови ABC и MNP, са правим угловима код темена C и P. При том је $AB = MN$, $\measuredangle CAB = 54°$ и $\measuredangle PNM = 36°$. Докажи:
а) $\Delta ABC \cong \Delta MNP$; б) $AC = MP$; в) $BC = NP$.

37. Дати су троуглови ABC и MNP, при чему је $AC = MP$, $\measuredangle ABC = \measuredangle MNP = 44°$, $\measuredangle ACB = 66°$ и $\measuredangle NMP = 70°$. Докажи: а) $\Delta ABC \cong \Delta MNP$; б) $AB = MN$; в) $BC = NP$.

38. Дијагонале AC и BD квадрата $ABCD$ секу се у тачки O. Докажи да је:
$AO = BO = CO = DO$.

39. Да ли су неки од троуглова на слици подударни?

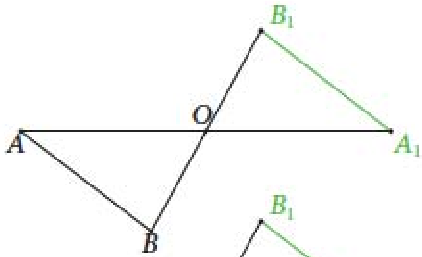


4.5. Примене ставова подударности

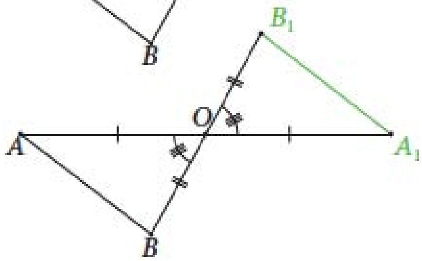
Симетрија и подударност

У 5. разреду бавили смо се централном и осном симетријом. Сада ћемо, користећи ставове подударности троуглова, извести неке особине симетрије које су нам познате од раније.

ПРИМЕР 1. Дуж се централном симетријом пресликава у једнаку дуж. Другим речима, ако су тачке A_1 и B_1 симетричне тачкама A и B у односу на тачку O доказати да је $A_1B_1 = AB$.



РЕШЕЊЕ На слици је дуж AB и тачка O ван ње. Тачке A_1 и B_1 су симетричне тачкама A и B у односу на тачку O која представља центар симетрије. То значи да је тачка O средиште дужи AA_1, као и дужи BB_1.



Треба доказати да је $AB = A_1B_1$. Прво ћемо доказати подударност ΔABO и ΔA_1B_1O, а онда одатле извести и једнакост осталих одговарајућих елемената тих троуглова.

Приметимо и да је $\measuredangle BAO = \measuredangle B_1A_1O$. То су углови на трансверзали (наизменични углови), па одатле следи да су дужи AB и A_1B_1 паралелне.

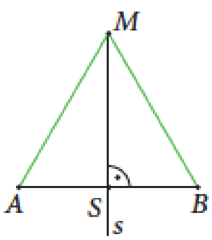
1. $AO = A_1O$ (A и A_1 су симетричне у односу на O)
2. $BO = B_1O$ (B и B_1 су симетричне у односу на O)
3. $\measuredangle AOB = \measuredangle A_1OB_1$ (унакрсни углови)

(СУС)

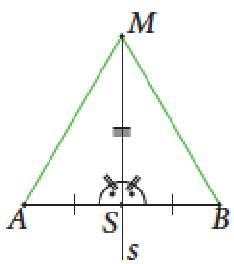
$\Rightarrow \Delta ABO \cong \Delta A_1B_1O$

Следи да је $AB = A_1B_1$.

ПРИМЕР 2. Свака тачка на симетрали дужи подједнако је удаљена од крајева дужи. Доказати.



РЕШЕЊЕ На слици је дуж AB. Нацртали смо симетралу s и на њој изабрали произвољну тачку M. Треба доказати да је $AM = BM$.



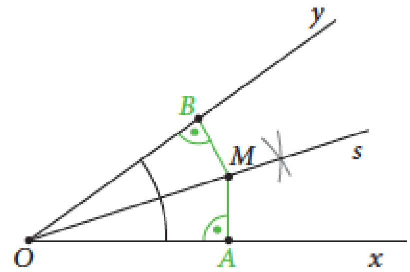
1. $AS = BS$ (S је средиште дужи AB)
2. $\measuredangle ASM = \measuredangle BSM$ (90°)
3. $SM = SM$ (заједничка страница)

(СУС)

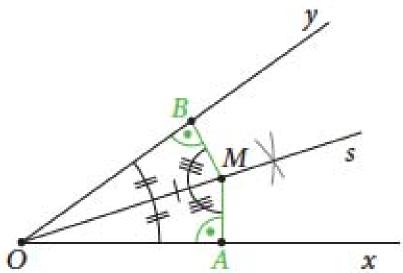
$\Rightarrow \Delta ASM \cong \Delta BSM$

Следи $AM = BM$.

ПРИМЕР 3. Дат је угао који је мањи од опруженог. Свака тачка на симетрали тог угла подједнако је удаљена од оба крака истог угла. Доказати.
(Довољно је доказати да је било која тачка M на симетрали подједнако удаљена од оба крака.)



РЕШЕЊЕ На слици је $\measuredangle xOy$. Конструисали смо симетралу s и на њој изабрали произвољну тачку M. Нацртали смо из тачке M нормале на краке угла и њихова подножја означили са A и B. Треба доказати да је $MA = MB$. Приметимо да је $\measuredangle MOA = \measuredangle MOB$ (симетрала дели угао на два једнака дела) и $\measuredangle OAM = \measuredangle OBM$ (90°), па је и $\measuredangle AMO = \measuredangle BMO$ (трећи угао троугла).

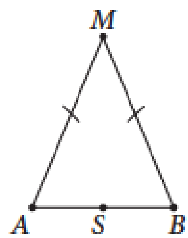


1. $OM = OM$ (заједничка страница)
2. $\measuredangle AOM = \measuredangle BOM$ (због симетрале угла)
3. $\measuredangle AMO = \measuredangle BMO$ (трећи угао троугла)

(УСУ)
$\Rightarrow \Delta OAM \cong \Delta OBM$

Следи $AM = BM$.

ПРИМЕР 4. Ако је тачка једнако удаљена од крајева дужи, онда она припада симетрали те дужи. Докажи.



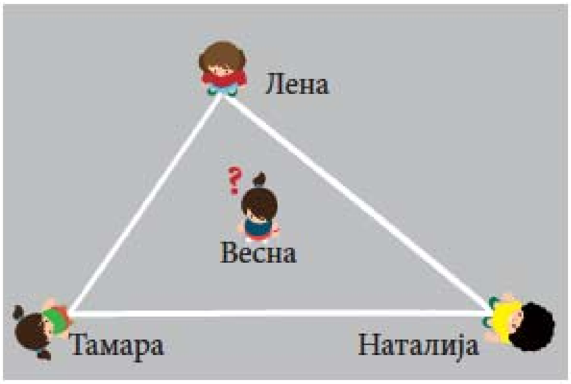
РЕШЕЊЕ Ако би тачка M припадала дужи AB, тврђење би било очигледно (M је средиште дужи AB, па сигурно припада симетрали). У нашем случају, пробајте следеће: уочите тачку S на средини дужи AB, па докажите подударност ΔASM и ΔBSM. После тога треба још показати да је $\measuredangle ASM = 90°$… (Помоћ: докажи да је ΔAMB једнакокраки и погледај Пример 3 на страни 142).

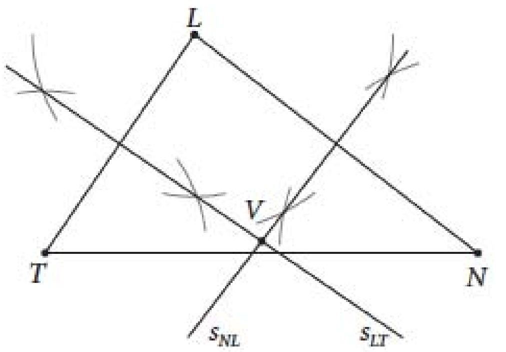
ПРИМЕР 5. Дат је угао који је мањи од опруженог. Ако је тачка подједнако удаљена од оба крака тог угла, онда она припада симетрали истог угла. Докажи.

РЕШЕЊЕ Радити у супротном смеру од Примера 3. Доказати подударност ΔOAM и ΔOBM (ССУ), а одатле и једнакост осталих одговарајућих елемената.

Троугао и кружница

Тамара, Наталија и Лена су на игралишту нацртале троугао и „глумиле" његова темена. Весна је њихова добра другарица, па је желела да буде подједнако удаљена од све три девојчице. Како то да изведе? Сетила се особине симетрале дужи (Пример 2. на старни 147).





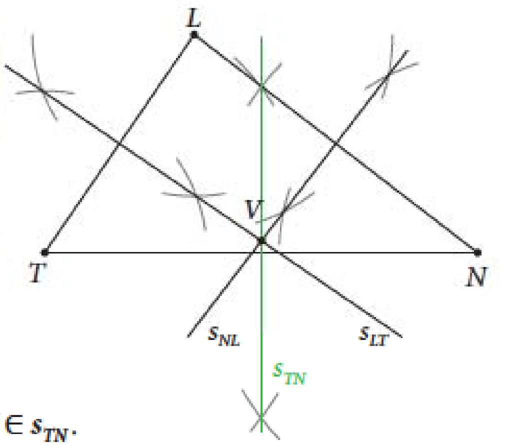
Весна је овако размишљала. Да бих била подједнако удаљена од Наталије и Лене, морам бити на симетрали дужи NL, а да бих била подједнако удаљена од Лене и Тамаре, морам бити на симетрали дужи LT. То значи да ће мој положај бити у пресеку тих симетрала.

Весна воли математику, па је своје размишљање хтела да поткрепи и записом.

Пошто: $V \in s_{NL}$, следи $VN = VL$.

Такође: $V \in s_{LT}$, па је $VL = VT$.

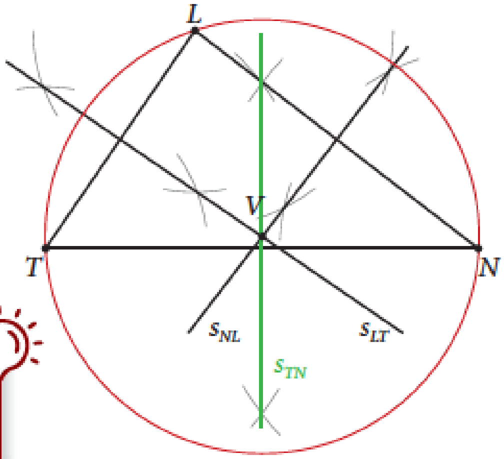
Из $VN = VL$ и $VL = VT$ следи да је и $\mathbf{VN = VT}$, па $\mathbf{V \in s_{TN}}$.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Све три симетрале страница троугла секу се у једној тачки. Та тачка је центар кружнице која садржи сва три темена троугла. Таква кружница се зове **описана кружница троугла.**

Када конструишемо центар описане кружнице троугла, довољно је наћи пресек било које две симетрале страница троугла.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

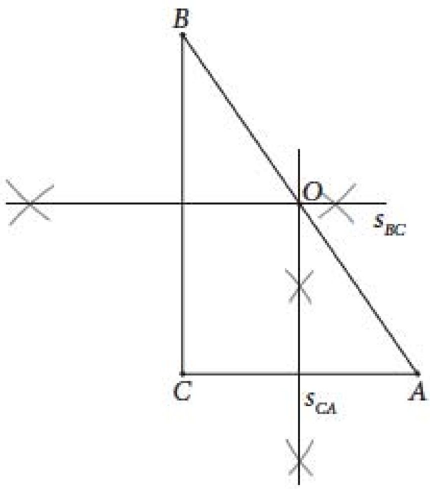
Центар описане кружнице троугла налази се у пресеку било које две симетрале страница троугла.

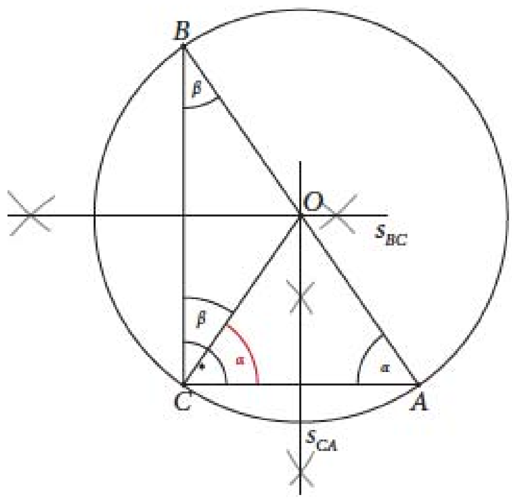
У зависности од тога да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли, центар описане кружнице ће се налазити у различитим положајима у односу на троугао.

ПРИМЕР 6. Конструиши описану кружницу правоуглог троугла.

РЕШЕЊЕ Примећујемо да се центар описане кружнице овог троугла налази у средишту хипотенузе AB. Покажимо да то није случајно.

Нека је s_{BC} симетрала катете BC правоуглог троугла и њен пресек са хипотенузом означимо са O. Тада је $OB = OC$, па је ΔOBC једнакокраки. У њему је $\measuredangle BCO = \beta$. Пошто је $\gamma = 90° = \alpha + \beta$ следи да је $\measuredangle OCA = \alpha$. Сада имамо и једнакокраки ΔOCA у коме је $OC = OA$. Из $OB = OC$ и $OC = OA$, мора бити $OB = OA$.



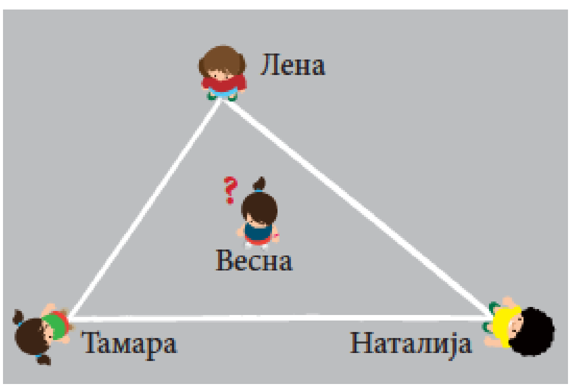


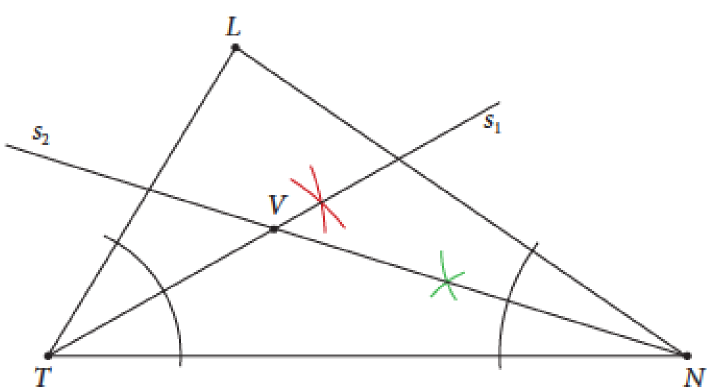
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

У правоуглом троуглу, средиште хипотенузе је центар описане кружнице.

Остављамо ти да се самостално позабавиш оштроуглим и тупоуглим троуглом. У оба случаја описати кружницу троугла, па утврдити да ли је центар у унутрашњости, или се налази ван троугла.

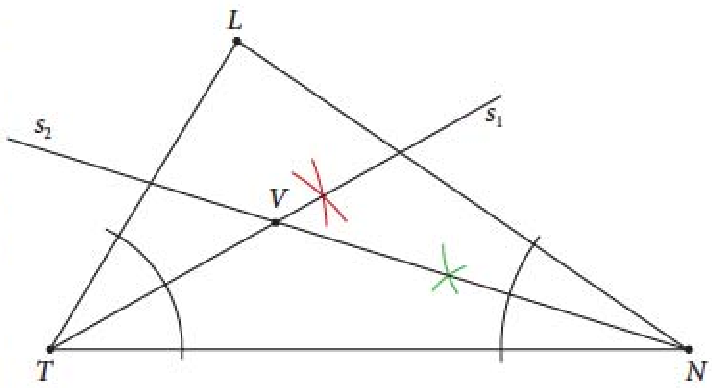
У другом делу игре Весна је желела да буде подједнако удаљена од страница троугла који су направиле Тамара, Наталија и Лена. Оне су је убеђивале да ће то бити иста тачка као и у првом случају, али им је Весна рекла да вероватно нису у праву. Она се, овог пута, сетила особина симетрале угла.





Весна је овако размишљала. Да бих била подједнако удаљена од дужи TL и TN, морам бити на симетрали угла $\measuredangle NTL$ (s_1 на слици), а да бих била подједнако удаљена од дужи TN и NL, морам бити на симетрали угла $\measuredangle LNT$ (s_2 на слици). То значи да ће мој положај бити у пресеку тих симетрала.

Јасно је да ћу бити подједнако удаљена и од дужи TL и NL, па морам бити и на симетрали $\measuredangle TLN$.



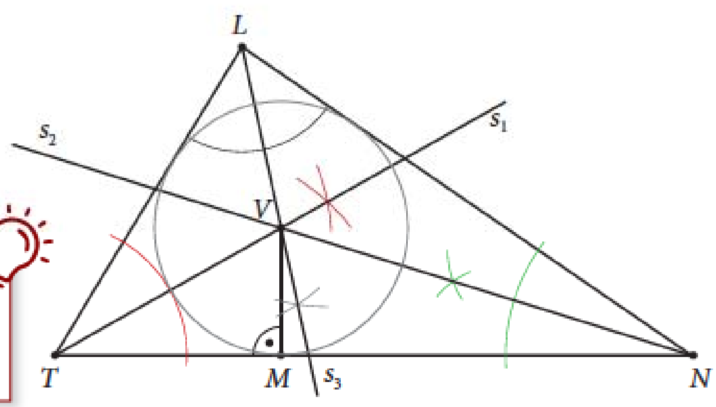
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Све три симетрале унутрашњих углова троугла секу се у једној тачки. Та тачка је центар кружнице која додирује све три странице троугла. Таква кружница се зове **уписана кружница троугла**.

Када конструишемо центар уписане кружнице троугла, довољно је наћи пресек било које две симетрале углова.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Центар уписане кружнице троугла је пресек било које две симетрале углова троугла.



Полупречник уписане кружнице троугла добијемо тако што из центра спустимо нормалу на једну страницу троугла (VM на слици).

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Центар уписане кружнице троугла увек припада његовој унутрашњости.

У трећем делу игре Тамара, Наталија и Лена су направиле једнакостранични троугао и тврдиле да ће Весна бити на истом месту без обзира да ли „глуми” центар уписане или описане кружнице. Да ли је симетрала странице једнакостраничног троугла уједно и симетрала наспрамног унутрашњег угла? Нађи одговор тако што ћеш конструисати једнакостранични троугао чија страница има дужину 6 cm. Да ли су девојчице у праву?

ЗАДАЦИ

40. Конструиши кружницу описану око троугла ABC, ако је $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm и $CA = 6$ cm.

41. Конструиши кружницу уписану у троугао MNP ако је $MN = 3$ cm, $NP = 4$ cm и $PM = 5$ cm.

42. Дата је дуж AB и њена симетрала s. Ако је M било која тачка праве s, онда је $AM = BM$. Докажи.

43. Докажи да се осном симетријом у односу на дату праву s, дуж AB пресликава у себи једнаку дуж $A'B'$,

44. Докажи да се централном симетријом троугао ABC пресликава у себи подударан троугао $A'B'C'$.

45. Дат је $\measuredangle xOy$ и симетрала угла s. Ако је M било која тачка праве s, онда је тачка M једнако удаљена од полуправих Ox и Oy. Докажи.

46. Центар кружнице описане око правоуглог троугла је средиште хипотенузе. Докажи.

47. У правоуглом троуглу ABC, тачка M је средиште хипотенузе AB. Доказати да је $AM = BM = CM$.

48. Дата је кружница k чији је пречник AB. Ако је M тачка на датој кружници, онда је угао AMB прав. Докажи.

49. У троугао ABC уписана је кружница k, која странице троугла AB, BC и CA додирује у тачкама M, N и P. Докажи да је $AM = AP$, $BM = BN$ и $CN = CP$.

50. У правоуглом троуглу један оштар угао је 30°. Докажи да је катета наспрам угла од 30° једнака половини хипотенузе.

51. Дата је кружница k, чији је центар тачка O. На кружници су дате тачке A, B, C и D, такве да је $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$. Докажи да је тетива AB једнака тетиви CD.

52. Дат је једнакостранични троугао ABC. Нека су A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, CA и AB. Докажи да је и троугао $A_1B_1C_1$ једнакостранични.

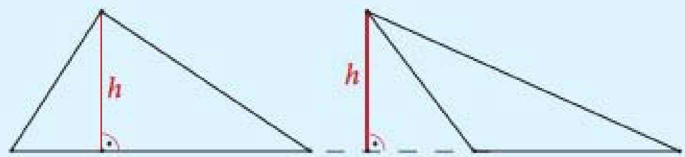
53. Ако се у троуглу ABC, центар описаног круга O и центар уписаног круга S поклапају, онда је троугао ABC једнакостраничан. Докажи.

54. Како се применом подударности троуглова може измерити тачна ширина реке, ако је друга обала реке недоступна?

САЖЕТАК
ТРОУГАО – *други део*

ВИСИНА ТРОУГЛА:

Висина троугла је дуж чија једна крајња тачка је теме троугла, а друга је подножје нормале из тог темена на праву која садржи наспрамну страницу.



ОСНОВНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ТРОУГЛА:

Троугао можемо конструисати ако су нам дати следећи елементи:

1. две странице и угао између њих (СУС);
2. страница и два угла која леже на њој (УСУ);
3. све три странице (ССС);
4. две странице и угао наспрам веће од њих (ССУ).

ПОДУДАРНОСТ ТРОУГЛОВА:

Два троугла су подударна ако један од њих можемо пренети тако да се поклопи са другим.

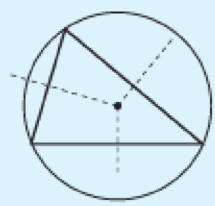
Ставови подударности троуглова. Два троугла су подударна ако су им:

1. једнаке по две странице и њима захваћен угао (СУС);
2. једнаке по једна страница и два на њој налегла угла (УСУ);
3. једнаке све три одговарајуће странице (ССС);
4. једнаке по две странице и угао наспрам веће од њих (ССУ).

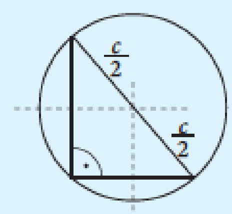
ТРОУГАО И КРУЖНИЦА:

Симетрале страница троугла секу се у једној тачки.

Центар описане кружнице троугла је пресек симетрала страница.

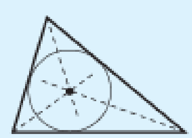


У правоуглом троуглу, центар описане кружнице је средиште хипотенузе.



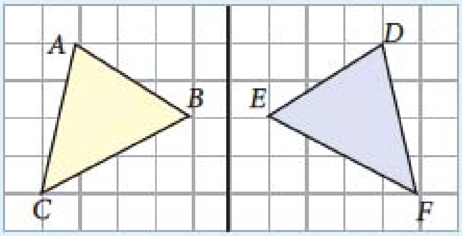
Симетрале углова секу се у једној тачки.

Центар уписане кружнице троугла је пресек симетрала углова.

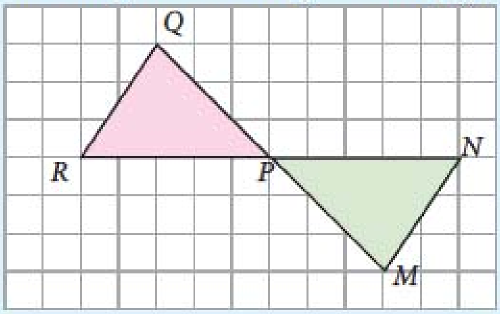


ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

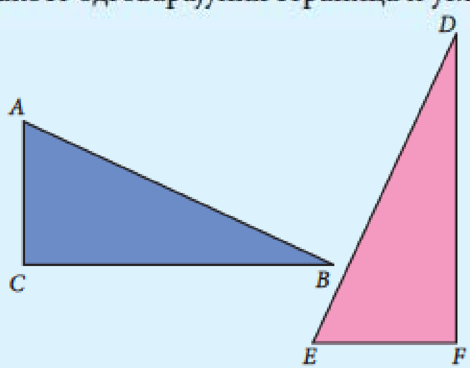
55. Троуглови ABC и DEF су осносиметрични. Да ли су они и подударни. Објасни зашто?



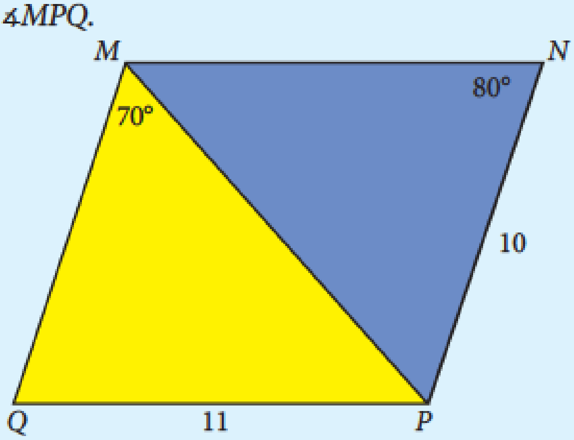
56. Троуглови MNP и QRP су централносиметрични. Објасни зашто су они и подударни.



57. Троуглови ABC и EDF су подударни. Напиши једнакост одговарајућих страница и углова.



58. Троуглови MNP и PQM су подударни. Одреди дужи MN и MQ и углове $\measuredangle MPN$, $\measuredangle MQP$ и $\measuredangle MPQ$.



59. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$), тачка M је средиште странице AB. Докажи да је:
а) $\Delta AMC \cong \Delta BMC$;
б) Дуж CM нормална на дуж AB.

60. Дата је кружница k, чији је центар тачка O. На кружници су дате тачке A, B, C и D, такве да је $AB = CD$. Докажи да је $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$.

61. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$), права p садржи тачку C и нормална је на AB. Докажи да права p полови дуж AB.

62. Дат је угао xOy који је мањи од опруженог. Тачка M је једнако удаљена од кракова угла xOy. Докажи да тачка M припада симетрали угла xOy.

63. Дати су троуглови ABC и MNP, при чему је $AC = MN = 6$ cm, $BC = NP = 4$ cm и $\measuredangle BAC = \measuredangle NMP = 40°$. Да ли је $\Delta ABC \cong \Delta MPN$?

64. Дата је кружница k, чији је центар тачка O. На кружници су дате тачке A, B и C, тако да је $AC = BC$. Докажи да је: а) OC нормално на AB; б) OC полови дуж AB.

65. Дати су подударни троуглови ABC и MNP, при чему је $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm и $CA = 9$ cm. Одреди обим троугла MNP.

66. У једнакостраничном троуглу ABC, тачка M је средиште странице AB. Израчунај угао ACM.

67. У једнакостраничном троуглу ABC, тачка M је средиште странице AC, а тачка N средиште странице BC. Докажи: а) $\Delta ABM \cong \Delta BAN$; б) $\measuredangle AMB = \measuredangle BNA$; в) $AN = BM$.

68. У правоугаонику $ABCD$, тачка M је средиште странице BC. Докажи да је $AM = DM$.

69. У квадрату $ABCD$, тачка M је средиште странице AB, а тачка N средиште странице BC. Докажи: а) $\Delta ADM \cong \Delta CDN$; б) $DM = DN$.

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Свака тачка на симетрали дужи је једнако удаљена од крајева те дужи.	тачно	нетачно
2. Центар кружнице уписане у троугао је у пресеку симетрала страница троугла.	тачно	нетачно
3. Два троугла су подударна ако су углови једног троугла једнаки угловима другог троугла.	тачно	нетачно
4. Ако су два троугла подударна, онда су странице једног троугла једнаке одговарајућим страницама другог троугла.	тачно	нетачно
5. Два троугла су подударна ако су две странице и један угао једног троугла једнаки одговарајућим елементима другог троугла.	тачно	нетачно
6. Центар круга описаног око правоуглог троугла је средиште хипотенузе правоуглог троугла.	тачно	нетачно
7. Ако је угао мањи од опруженог, свака тачка на симетрали тог угла подједнако је удаљена од кракова истог угла.	тачно	нетачно
8. Центар кружнице описане око троугла је у пресеку симетрала страница троугла.	тачно	нетачно
9. Два троугла су подударна ако су две странице и њима захваћен угао једног троугла, једнаки са одговарајућим елементима другог троугла.	тачно	нетачно
10. Центар уписаног круга у троугао је увек у унутрашњој области троугла.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. Странице троугла ABC су 10 cm, 11 cm и 12 cm. Ако је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$, онда је обим троугла MNP једнак:

А) 30 cm; Б) 31 cm; В) 32 cm; Г) 33 cm; Д) 34 cm.

2. Ако је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$, $\measuredangle ABC = 64°$ и $\measuredangle CAB = 56°$, онда је један угао троугла MNP једнак:

А) 60°; Б) 58°; В) 62°; Г) 34°; Д) 26°.

3 У правоуглом троуглу ABC, хипотенуза је $AB = 12$ cm. Полупречник круга описаног око тог правоуглог троугла је:

А) 8 cm; Б) 4 cm; В) 6 cm; Г) 9 cm; Д) 5 cm.

4. Један угао једнакокраког троугла ABC је 100°. Ако је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$, онда у троуглу MNP постоји угао који је једнак:

А) 80°; Б) 70°; В) 60°; Г) 50°; Д) 40°.

5. Обим једнакостраничног троугла ABC је 60 cm. Ако је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$, онда је страница MP троугла MNP једнака:

А) 30 cm; Б) 25 cm; В) 20 cm; Г) 15 cm; Д) 12 cm.

6. Тачка M је на једној од страница једнакокрако правоуглог троугла ABC, а дуж AM дели троугао ABC на два подударна троугла. Ако је хипотенуза троугла ABC једнака 18 cm, онда је дуж AM једнака:

А) 6 cm; Б) 7 cm; В) 8 cm; Г) 9 cm; Д) 10 cm.

7. У једнакокраком троуглу ABC је $AC = BC = 10$ cm и $AB = 8$ cm. Ако симетрала угла ACB сече страницу AB у тачки M, онда је BM једнако:

А) 3 cm; Б) 3,5 cm; В) 4 cm; Г) 5 cm; Д) 5,5 cm.

8. У правоуглом троуглу ABC, угао ABC је 30°, а хипотенуза $AB = 24$ cm. Тада је катета AC једнака:

А) 12 cm; Б) 8 cm; В) 10 cm; Г) 9 cm; Д) 11 cm.

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

Висина троугла

Конструкција угла

Конструкција троугла

Подударност троуглова

Ставови подударности троуглова (СУС, УСУ, ССС, ССУ)

Описана кружница троугла

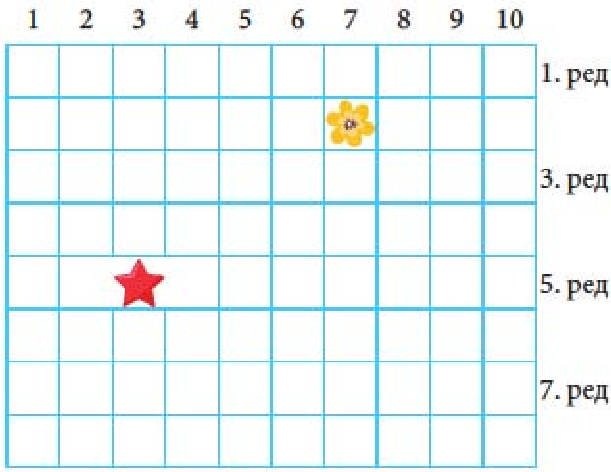
Уписана кружница троугла

ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

1.1.	Конструиши угао од 30°.	15
1.2.	Дат је оштар угао α. Конструиши угао $45° + \alpha$.	20
1.3.	Конструиши угао од 75°.	25
2.1.	Конструиши троугао ABC, ако је $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm и $\measuredangle ABC = 60°$.	15
2.2.	Конструиши правоугли троугао ABC, ако је полупречник круга описаног око троугла једнак 3 cm и $AC = 5$ cm.	20
2.3.	Конструиши правоугли троугао ABC, ако је полупречник круга описаног око троугла једнак 3 cm и $\measuredangle ABC = 15°$.	25
3.1.	У троуглу ABC, тачка M полови дуж AB а дуж CM је нормална на AB. Докажи да су троуглови ACM и BCM подударни.	15
3.2.	Дат је квадрат $ABCD$. Докажи да су дијагонале квадрата AC и BD једнаке.	20
3.3.	Дијагоне AC и BD правоугаоника $ABCD$ секу се у тачки S. Докажи да је $AS = BS = CS = DS$.	25
4.1.	Дат је троугао ABC чије су странице $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm и $CA = 6$ cm. Конструиши кружницу описану око троугла ABC.	15
4.2.	Конструиши једнакокраки троугао ABC, ако је његов крак $AC = 5$ cm и полупречник кружнице описане око троугла ABC једнак 3 cm.	20
4.3.	Конструиши једнакостранични троугао ABC, ако је полупречник кружнице описане око тог троугла једнак 3 cm.	25

5 РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ – *други део*

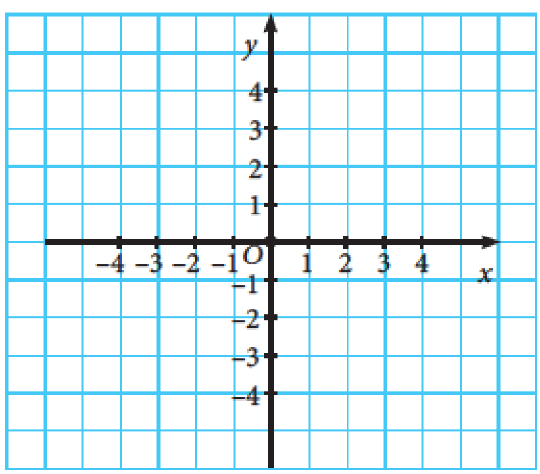
Сви сте се већ сусрели са свескама у којима су уцртани квадратићи. То су такозване свеске „на квадрате” и често се користе као свеске за математику или физику. Исцртани квадрати нам помажу да тачно пренесемо податак речима у свеску. На пример, ако учитељица ђацима 4. разреда каже да уцртају звездицу у 3. квадрат који се налази у 5. реду, сви ђаци ће тачно знати у који квадрат да уцртају звездицу. Једнако тако, биће им јасно где да уцртају цветић ако им учитељица каже да га уцртају у 7. квадрат у 2. реду. Вероватно неће сви ђаци на исти начин нацртати звезду или цветић, али ће сви да их нацртају у тачно одређене квадрате, слично као на слици.



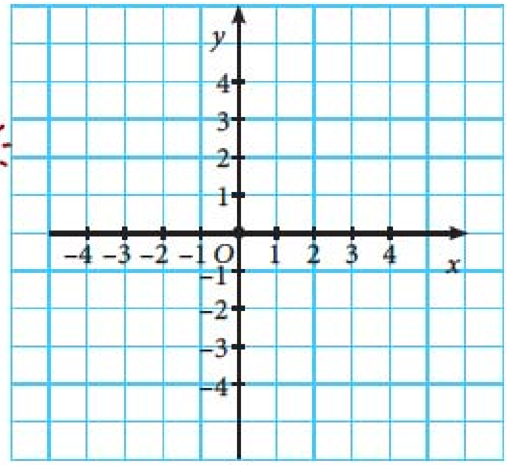
Ово поглавље се бави сличним темама. Укратко, циљ нам је да развијемо математичке методе којима можемо тачно да пренесемо или пресликамо цртеже, бројеве, криве, праве, реке, мора, границе итд. на папир, али тако да их сви једнозначно разумемо и да можемо њима прецизно баратати. Ово што ћемо научити у овом поглављу се користи у изради географских карата, архитектонских цртежа, техничких цртежа, разних макета и минијатурних модела (као на пример модела аутомобила, лутака или чак васионе).

5.1. Координатни систем и приказ тачака у координатном систему

Кроз предходни пример, видели смо да су нам потребна два податка (број реда и број квадрата) да бисмо тачно знали у који квадратић да уцртамо звездицу. Француски математичар, филозоф и физичар Рене Декарт је ово запажање уопштио и увео такозвани **правоугли координатни систем**, који се по овом математичару такође зове и **Декартов координатни систем** и састоји се од две бројевне праве *x* и *y* које се секу под правим углом као на слици. Иако у математици постоје разни други координатни системи, ми их у 6. разреду нећемо изучавати, тако да ћемо правоугли координатни систем називати и једноставнијим именом **координатни систем**.



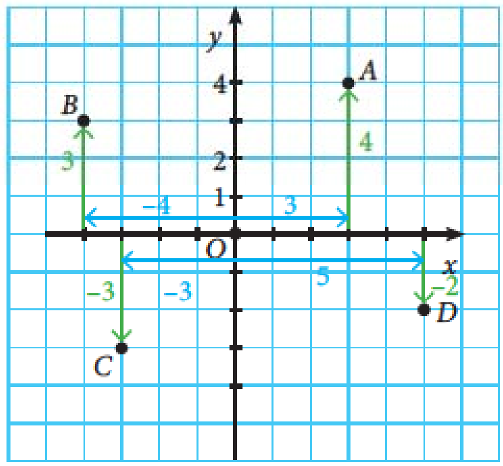
Било које две праве x и y које се секу под правим углом могу да представљају координатни систем, али да бисмо лакше баратали координатним системима, потребно је да усвојимо следећи речник:



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Бројевне праве x и y називамо **координатне осе.**
Осу x називамо **апсцисна оса** (или x-оса).
Осу y називамо **ординатна оса** (или y-оса).
Тачка пресека x-осе и y-осе је **координатни почетак** O.
Раван у којој се налазе координатне осе се назива **координатна раван.**

Посветимо се сада представљању тачака у координатној равни. Погледајмо слику, и уочимо да су на слици представљене 4 тачке A, B, C и D. Свакој од ових тачака можемо приступити из координатног почетка O тако што ћемо се померити прво у правцу x-осе а затим у правцу y-осе. Дакле:



1) Из координатног почетка O стижемо у тачку A тако што се померимо 3 јединичне дужине у правцу x-осе и 4 јединичне дужине у правцу y-осе. Тачку A обележавамо записом $A(3, 4)$.
2) Из O стижемо у B кад се померимо −4 јединичне дужине у правцу x-осе и 3 јединичне дужине у правцу y-осе. Тачку B обележавамо записом $B(-4, 3)$.
3) Из O стижемо у C кад се померимо −3 јединичне дужине у правцу x-осе и −3 јединичне дужине у правцу y-осе. Тачку C обележавамо записом $C(-3, 3)$.
4) Из O стижемо у D кад се померимо 5 јединичних дужина у правцу x-осе и −2 јединичне дужине у правцу y-осе. Тачку D обележавамо записом $D(5, -2)$.

Положај сваке тачке представљамо помоћу два броја. На пример, положај тачке A смо обележили помоћу два броја 3 и 4. Ова два броја стављамо у заграде, и одвајамо зарезом, а добијени запис $(3, 4)$ називамо **уређени пар.** Велико слово латинице, са придруженим уређеним паром бројева, обележава име и положај одређене тачке у координатом систему, на пример $A(3, 4)$ или $D(5, -2)$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако **уређени пар** бројева (a, b) одређује положај тачке T, то обележавамо записом $T(a, b)$.
У запису $T(a, b)$: уређени пар рационалних бројева (a, b) називамо **координате тачке** T;
рационални број a називамо **апсциса** или x **координата** тачке T; а
рационални број b називамо **ордината** или y **координата** тачке T.

Битно је да разумемо да уређени пар (a, b) није исто што и скуп $\{a, b\}$. Када је $a \neq b$, знамо да је скуп бројева $\{a, b\}$ исто што и скуп бројева $\{b, a\}$, дакле када листамо елементе скупа, редослед није битан. Али у уређеном пару редослед **јесте битан** јер уређени пар (a, b) није исто што и уређени пар (b, a). Провери то самостално. Нека је $a = 2$ и $b = -3$. Покажи да важи неједнакост $(2, -3) \neq (-3, 2)$. Најлакше је да одредиш положај тачака $P(2, -3)$ и $R(-3, 2)$ у координатној равни и увериш се да су то различите тачке.

Када је $a \neq b$,

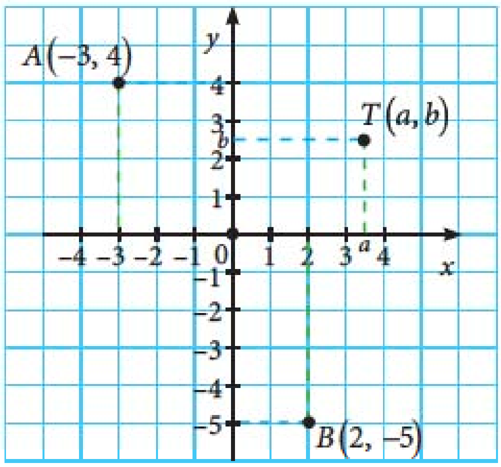
скупови су једнаки,

$\{a, b\} = \{b, a\}$

али уређени парови нису.

$(a, b) \neq (b, a)$

Погледајмо сада тачку $A(-3, 4)$ на слици десно. Ако кроз тачку A конструишемо праву нормалну на апсцисну x-осу, видимо да нормала сече апсцисну x-осу у тачки -3 која одговара вредности апсцисе тачке A. Слично, ако кроз тачку A конструишемо праву нормалну на ординатну y-осу, видимо да нормала сече ординатну y-осу у тачки 4 која одговара вредности ординате тачке A.



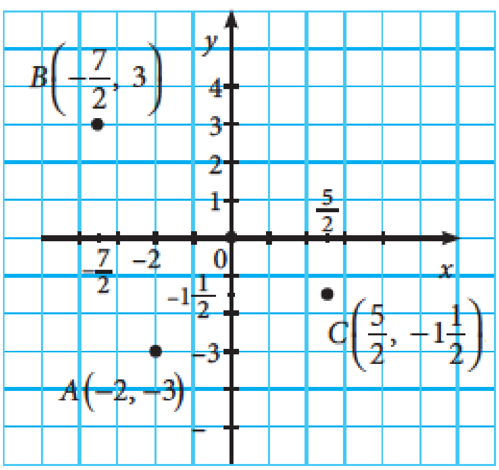
За тачку $B(2, -5)$ важи слично. Нормала на апсцисну x-осу, сече апсцисну x-осу у тачки 2 која одговара вредности апсцисе тачке B, а нормала на ординатну y-осу, сече ординатну y-осу у тачки -5 која одговара вредности ординате тачке B. Уопштимо ово запажање:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Нормала из тачке $T(a, b)$ на x-осу пресеца x-осу у тачки која одговара апсциси a.
Нормала из тачке $T(a, b)$ на y-осу пресеца y-осу у тачки која одговара ординати b.

ПРИМЕР 1. У координатној равни, уцртај тачку $A(-2, -3)$, затим тачке $B\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$ и $C\left(\frac{5}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$.

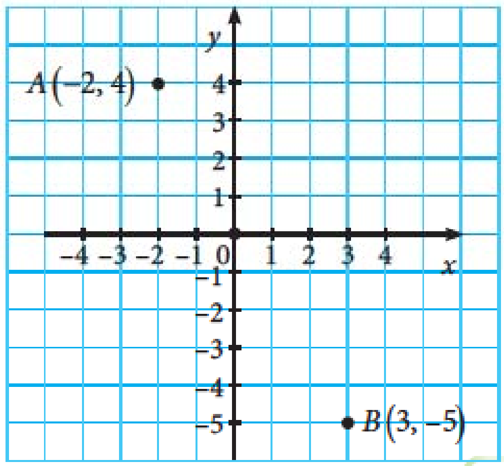
РЕШЕЊЕ



Пошто координатну раван одређују две осе под правим углом, јасно је да те две осе деле раван на 4 дела. Сваки од тих делова се назива **квадрант**. Квадранти су означени бројевима написаним римским цифрама као на слици. Сваки квадрант је скуп тачака које имају апсцису и ординату одређеног предзанака, као на слици. На пример, у II квадранту, вредности апсцисе су негативне „–", а ординате позитивне „+".

ПРИМЕР 2. У II квадранту се налази тачка A чије апсолутне вредности апсцисе и ординате су 2 и 4, а у IV квадранту се налази тачка B чије апсолутне вредности апсцисе и ординате су 3 и 5. Одреди координате тачака A и B, и уцртај их у координатну раван.

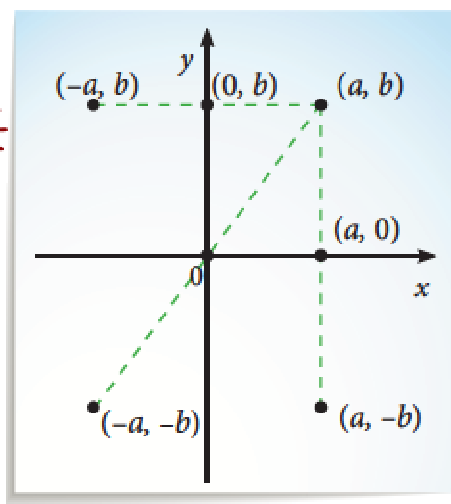
РЕШЕЊЕ Пошто је тачка A у II квадранту, апсциса је негативна, а ордината позитивна, те тачка A мора да има координате $A(-2, 4)$. Тачка B је у IV квадранту, те је њена апсциса позитивна, а ордината негативна, па тачка B мора да има координате.



Уочимо неке карактеристике тачака у координатном систему:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Тачка на x-оси има координате $(a, 0)$.
Тачка на y-оси има координате $(0, b)$.
Тачке:
- $(a, -b)$ и (a, b) су симетричне у односу на x-осу.
- $(-a, b)$ и (a, b) су симетричне у односу на y-осу.
- $(-a, -b)$ и (a, b) су симетричне у односу на координатни почетак O.



ПРИМЕР 3. а) Одреди координате тачке P која се налази на x-оси између II и III квадранта на одстојању $\frac{2}{3}$ од координатног почетка.

б) Одреди координате тачке Q која се налази на y-оси између III и IV квадранта на одстојању $4\frac{2}{5}$ од координатног почетка.

в) Одреди координате тачке R која је симетрична тачки $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ у односу на x-осу.

г) Одреди координате тачке S која је симетрична тачки $\left(-2, -\frac{11}{4}\right)$ у односу на y-осу.

д) Одреди координате тачке T која је симетрична тачки $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}\right)$ у односу на координатни почетак O.

РЕШЕЊЕ Решимо овај задатак без цртања координатних оса, али ако увидите да је потребно да нацртате координатне осе да бисте разумели решење, учините то у својим свескама.

а) Пошто се тачка P налази на x-оси, вредност њене ординате је 0. Пошто се тачка P налази између II и III квадранта, јасно је да се налази у области негативних апсциса, а негативна вредност апсцисе на одстојању $\frac{2}{3}$ од координатног почетка је $-\frac{2}{3}$, те су координате тражене тачке $P\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

б) Пошто се тачка Q налази на y-оси, вредност њене апсцисе је 0. Пошто се тачка Q налази између III и IV квадранта, јасно је да се налази у области негативних ордината, а негативна вредност ординате на одстојању $4\frac{2}{5}$ од координатног почетка је $-4\frac{2}{5}$, те су координате тражене тачке $Q\left(0, -4\frac{2}{5}\right)$.

в) Тачка симетрична тачки $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$ у односу на x-осу има координате $R\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$.

г) Тачка симетрична тачки $\left(-1, -\frac{11}{4}\right)$ у односу на y-осу има координате $S\left(2, -\frac{11}{4}\right)$.

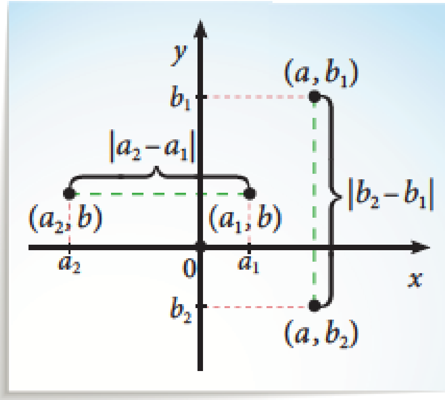
д) Тачка симетрична тачки $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}\right)$ у односу на координатни почетак O има координате $T\left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

Ако две тачке $T_1(a, b_1)$ и $T_2(a, b_2)$ имају исту вредност апсцисе a, тада је растојање између тачака T_1 и T_2 једнако:

$$|b_2 - b_1|.$$

Ако две тачке $Q_1(a_1, b)$ и $Q_2(a_2, b)$ имају исту вредност ординате b, тада је растојање између тачака Q_1 и Q_2 једнако:

$$|a_2 - a_1|.$$



ПРИМЕР 4. Одреди растојање између следећих тачака.

а) $T_1(3,\ 2)$ и $T_2\left(3, -\frac{1}{2}\right)$; б) $Q_1\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$ и $Q_2\left(-\frac{3}{4}, -3\right)$.

РЕШЕЊЕ а) $\left|2 - \frac{-1}{2}\right| = \left|2 + \frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{2}$; б) $\left|-\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

ЗАДАЦИ

1. Попуни следећу таблицу одговарајућим словима ако су слова у поља таблице распоређена на следећи начин:
(1, 1) Д; (3, 4) М; (5, 2) А; (2, 3) А; (4, 4) И;
(3, 2) А: (4, 1) А; (1, 4) Т: (5, 3) Р; (2, 2) Л;
(4, 3) А; (5, 1) В; (2, 4) А; (3, 3) Д; (1, 3) Ј;
(5, 4) Ш; (2, 1) У; (3, 1) Н; (4, 2) В; (1, 2) М.

4					
3					
2					
1					
	1	2	3	4	5

2. Нацртај Декартов координатни систем и у Декартовом координатном систему прикажи тачке A, B, C и D које су дате својим координатама: $A(3, 4)$; $B(-2, 5)$; $C(1, 6)$, $D(-3, 4)$.

3. Тачке A, B, C, D чије су координате: $A(0, 5)$; $B(3, 0)$; $C(0, -5)$ и $D(-3, 0)$ одређују четвороугао $ABCD$. Нацртај дате тачке у координатном систему и одреди којој врсти четвороуглова он припада.

4. Дате су тачке A, B, C, D својим координатама: $A(-9, -7)$; $B(6, -3)$; $C(5, 11)$ и $D(-4, 8)$. Нацртај дате тачке у координатном систему и одреди квадранте у којима се оне налазе.

5. Тачкама $A(2, 1)$, $B(2, 7)$, $C(6, 7)$, $D(6, 1)$, $E(5, 1)$, $F(5, 6)$, $G(3, 6)$, $H(3, 1)$ дефинисано је једно ћирилично слово. Нацртај дате тачке у координатном систему, повежи их редоследом $ABCDEFGHA$ и одреди о ком слову се ради.

6. Тачке A, B, C, D чије су координате: $A(-1, 1)$; $B(-7, 1)$; $C(-5, 5)$ и $D(-2, 5)$ одређују четвороугао $ABCD$. Нацртај дате тачке у координатном систему и одреди о којем четвороуглу се ради.

7. Дата је тачка $A(-2, 3)$. Напиши координате следећих тачака:
а) B је тачка осносиметрична са тачком A у односу на x-осу;
б) C је тачка осносиметрична са тачком A у односу на y-осу;
в) D је тачка централносиметрична са тачком A у односу на координатни почетак.

5.2. Зависности међу величинама

Много тога у природи, а и у друштву, можемо описати бројевима. Не пример, у природи температуру ваздуха, висину планине или количину воде у језеру означавамо бројевима (изражених у степенима, метрима или литрима). У друштвеним збивањима старост особе, цену сладоледа или трајање школског часа такође означавамо бројевима (изражених у годинама, динарима, или минутима). Све што се може изразити бројем, назива се **величина**.

Величине, наравно, могу бити међусобно **зависне**. На пример, сви знамо да су дани дужи лети него зими, дакле дужина дана зависи од броја месеца у години јер је дан дужи у VII месецу него у II месецу. Знамо и да су трогодишњаци нижи од дванаестогодишњака. Дакле, висина детета мења са са годинама старости, или другим речима, висина **зависи** од година старости.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Две величине су зависне ако се променом једне величине мења и друга величина.

Примери зависних величина су: а) висина и старост детета, б) количина кише и водостај реке, в) брзина аутомобила и време трајања пута. У овом поглављу позабавићемо се основним начинима приказивања зависности између величина, а то је најбоље примерима.

ПРИМЕР 1. Приказивање зависности **табелом**. На овај начин представљања зависности смо заправо већ навикли (сетите се табеле прихода и расхода из Поглавља 1). Али сада уместо речима, попунимо табелу бројевима. На пример, у један ред упишимо редни број месеца у години, а у други ред просечну дужину трајања дана (обданице) у граду Београду у датом месецу. Тада табела изгледа овако.

Месец:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Трајање дана (h):	9,3	10,5	12	13,5	14,8	15,5	15,2	14	12,5	11	9,6	8,9

Задатак: У ком месецу је најдужи просечни дан, а у ком месецу је дан (обданица) у просеку дугачак колико и ноћ?

РЕШЕЊЕ Сада из табеле долазимо до решења. У просеку, најдужи дан је у VI месецу (јуну), и то 15,5 h, а у просеку је у III месецу (марту) дужина дана и ноћи иста, 12 h.

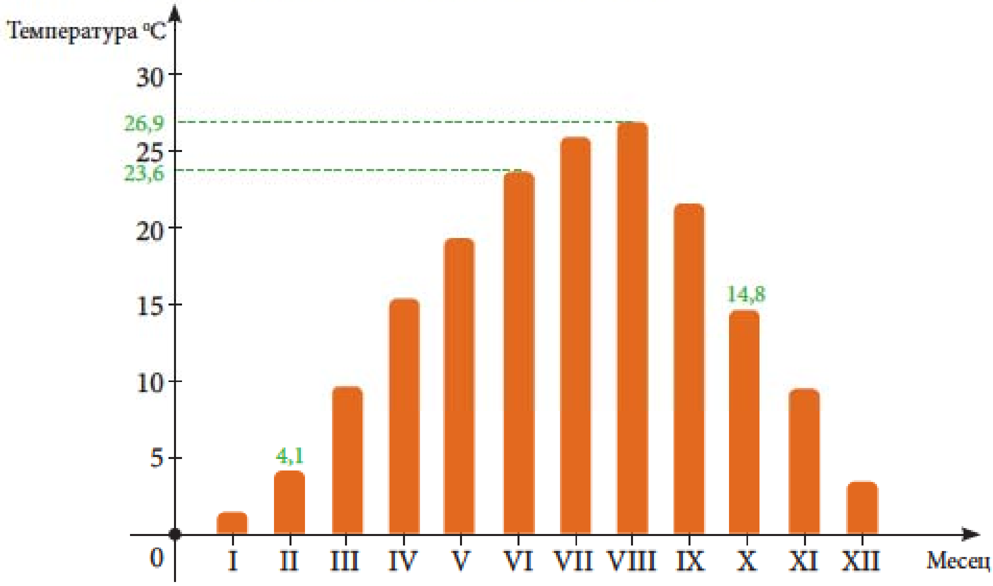
У Примеру 1, кажемо да табела приказује зависност две величине: месец у години и трајање дана (обданице). Или другим речима, табела приказује трајање дана у зависности од месеца у години. Зависност између величина можемо представити и на један други начин, **хистограмом**. Хистограм се састоји од две нормалне осе, слично као у Декартовом координатном систему, али не уписујемо тачке, већ стубиће који означавају вредност зависне величине. Положај стубића одређује прва величина, а висину стубића одређује друга (зависна) величина. Објаснићемо детаљније кроз пример.

ПРИМЕР 2. Приказивање зависности **хистограмом**. Задата је табела која приказује просечну температуру у Београду у зависности од месеца у години.

Месец:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Температура (°C):	1,5	4,1	9,6	15,2	19,1	23,6	25,9	26,9	21,4	14,8	9,5	3,4

Задатак: Прикажи зависност величина у табели помоћу хистограма.

РЕШЕЊЕ На хоризонталну осу уносимо вредности прве величине, месец у години, дакле месеце од I до XII. На вертикалну осу унећемо распон величина зависне величине (температуре у °C), на пример од 0 до 30. На позицији месеца I нацртаћемо стубић висине 1,5. На позицији II нацртаћемо стубић висине 4,1, и тако даље... На тај начин добијамо следећи хистограм.



Зависност величина можемо представити и тачкама у координатном систему. Тада хоризонтална x-оса представља прву (независну) величину а вертикална y-оса представља зависну величину. У неким ситуацијама је произвољно коју ћемо величину означити као независну а коју као зависну. Погледајмо Примере 1 и 2. Из тих примера можемо наћи зависност између просечне дужине дана у месецу и просечне температуре. Тако можемо комбиновати табеле из Примера 1 и 2, и добити нову табелу зависности температуре од дужине дана, ако посматрамо само последња два реда у табели.

Месец:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Трајање дана (h):	9,3	10,5	12	13,5	14,8	15,5	15,2	14	12,5	11	9,6	8,9
Температура (°C):	1,5	4,1	9,6	15,2	19,1	23,6	25,9	26,9	21,4	14,8	9,5	3,4

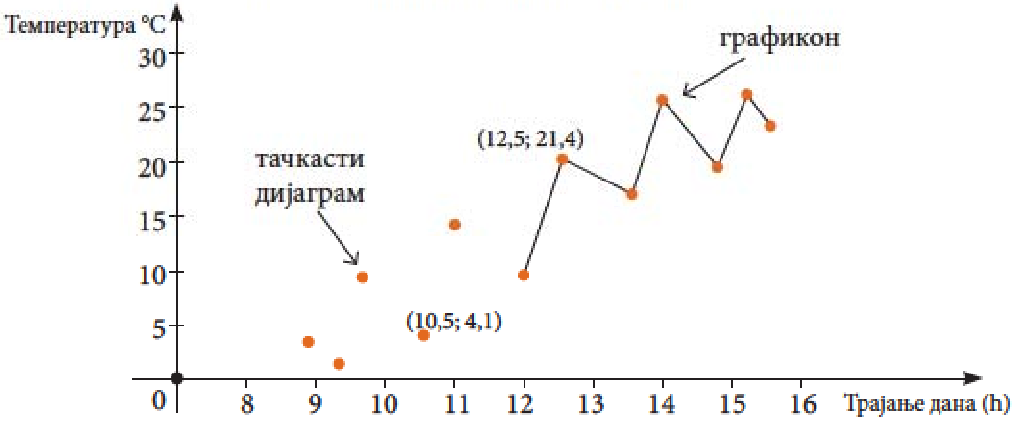
Зависност просечне температуре у месецу можемо сада представити **тачкастим дијаграмом или графиконом.** Тачкасти дијаграм се добија када се само унесу тачке из табеле, а графикон се добија када се тачке у тачкастом дијаграму повежу дужима у изломљену линију. Покажимо то примером.

ПРИМЕР 3. Користећи претходну табелу, прикажи зависност просечне месечне температуре од просечне дужине трајања дана тачкастим дијаграмом и графиконом.

РЕШЕЊЕ Представимо табелу температуре од трајања дана тако да се трајање дана напише у растућем редоследу:

Трајање дана (h):	8,9	9,3	9,6	10,5	11	12	12,5	13,5	14	14,8	15,2	15,5
Температура (°C):	3,4	1,5	9,5	4,1	14,8	9,6	21,4	15,2	26,9	19,1	25,9	23,6

Прву величину (трајање дана) уносимо на x-осу а другу, зависну величину (температуру) на вертикалну y-осу. Видимо да када је дан дугачак у просеку 8,9 h, тада је просечна температура 3,4 °C. Уређени пар (8,9; 3,4) уносимо као тачку у координатни систем. Слично, следећи уређени пар из табеле, дакле пар (9,3; 1,5) уносимо као нову тачку у координатни систем, и тако даље (9,6; 9,5), па (10, 5; 4,1), итд. На овај начин добијамо тачкасти дијаграм. Ако суседне тачке спојимо дужима у изломљену линију, добијамо графикон.



Објединимо сада једним примером све што смо до сада научили.

ПРИМЕР 4. Софија иде у музичку школу, и учи да свира клавир. Пошто јој време за вежбање клавира понекад одузме време од рада на школским задацима, решила је да направи евиденцију колико времена потроши дневно на вежбање клавира у минутима (min). Означила је понедељак као дан 1, а недељу као дан 7, и направила следећу табелу.

Дан у недељи	1	2	3	4	5	6	7
Вежбање (min)	20	75	90	100	110	120	105

Представи зависност ових величина помоћу:

а) хистограма; б) тачкастог дијаграма; в) графикона.

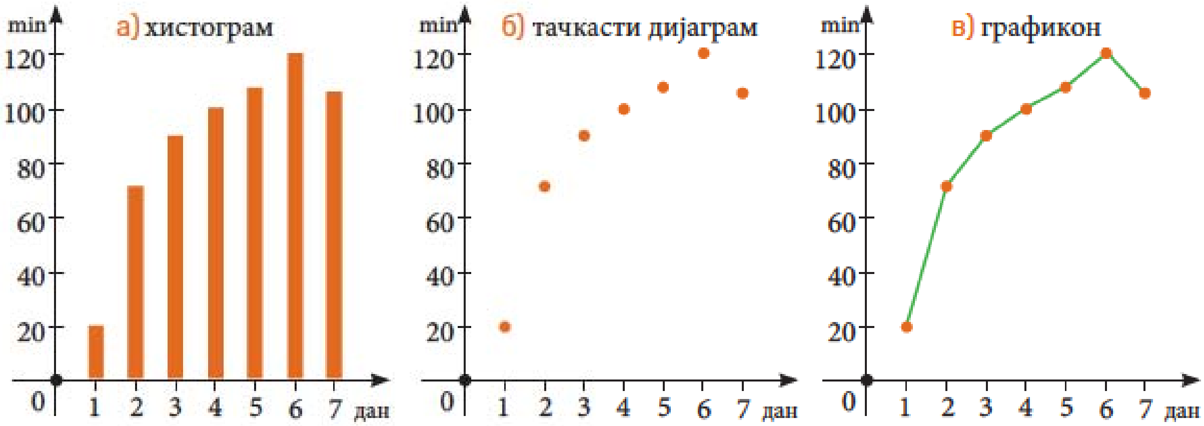
Затим одговори на следећа питања.

г) Ког дана Софија најмање вежба?

д) Ког дана највише вежба?

ђ) Којим данима вежба више од једног и по сата?

РЕШЕЊЕ На различите начине треба унети у координатни систем тачке (1, 20), (2, 75), (3, 90), (4, 100), (5, 110), (6, 120) и (7, 105), те добијамо следећа три решења.



г) Софија најмање вежба понедељком, 20 минута.

д) Софија највише вежба суботом, 120 минута.

ђ) Један и по сат има 90 минута, па пошто четвртком, петком, суботом и недељом Софија вежба више од 90 минута, јасно је да тим данима вежба дуже од једног и по сата.

ЗАДАЦИ

8. Поред сваке тврдње заокружи тачно или нетачно:

Дељивост природног броја са 3 не зависи од последње цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 4 зависи од последње цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 5 зависи од последње цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 6 зависи од последње две цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 9 зависи од збира цифара тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 10 зависи од последње цифре броја.	Тачно	Нетачно

9. Ако је x дужина странице једнакостраничног троугла, а O његов обим допуни следећу табелу:

Дужина странице x	1	4	10	$\frac{4}{3}$				
Обим троугла O					15	21	3,6	23,46

10. Реч „један” ($x = 1$) има пет слова, па је $y = 5$. Реч „два” ($x = 2$) има три слова, па је $y = 3$ слова. Допуни табелу.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5	3							

11. Утврди међусобну зависност бројева x и y и допуни следећу табелу.

x	2	7	−3	0	17	6	−6	
y	8	3	13	10	−7			11

5.3. Директна пропорционалност

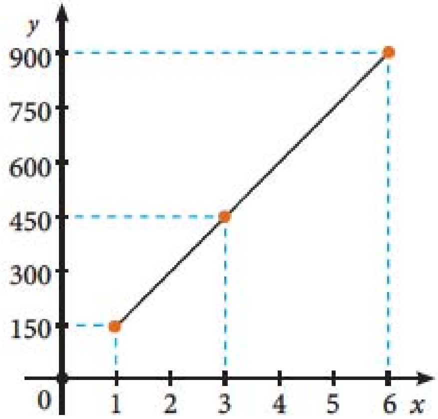
ПРИМЕР 1. Ако килограм парадајза кошта 150 динара, колико кошта три килограма парадајза? А колико кошта шест килограма? Унеси одговоре у табелу, и прикажи одговоре графиком.

РЕШЕЊЕ Означимо словом x количину парадајза, а словом y цену. Пошто је цена једног килограма парадајза $k = 150$ дин., јасно да цена за x килограма износи:

$$y = kx = 150x.$$

Тако добијамо табелу.

x	1	3	6
y	150	450	900



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Величине x и y су **директно пропорционалне** ако постоји број $k \neq 0$, такав да за сваку вредност величине x добијемо вредност величине y формулом:

$$y = kx.$$

Тада број k називамо **коефицијент пропорционалности**.

Подсетимо се: О процентима смо учили у 5. разреду. Подсетимо се дефиниције и неких особина процентног записа директно из уџбеника за 5. разред.

Стоти део неке величине назива се **проценат** и обележава се ознаком „%".
У свакодневном говору често се користе и називи „посто" и „одсто".

Научили смо и да се разломци могу написати у процентном запису.

$$n\% = n \cdot \frac{1}{100} = \frac{n}{100}$$

Директну пропорционалност можемо применити и у задацима са процентима. Покажимо примером како тада израчунавамо коефицијент пропорционалности.

ПРИМЕР 2. Означимо величином x број ђака у једној основној школи. Знамо да не дођу сваког дана сви ђаци у школу, и да ће следећег понедељка 10% ђака изостати из школе. Означимо величином y број оних који ће у понедељак изостати из школе. Да ли су x и y директно пропорционалне величине? Ако јесу, колики је коефицијент пропорционалности?

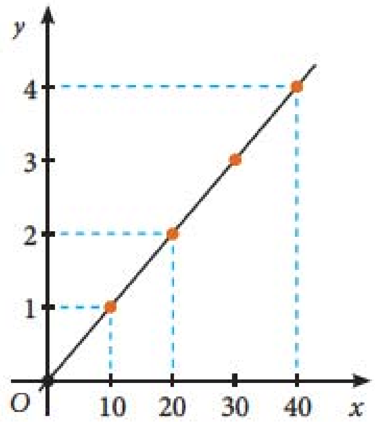
РЕШЕЊЕ Из 5. разреда знамо да се разломак 0,1 може написати у процентима као 10%. Следи да је број ђака који ће у понедељак изостати из школе једнак $y = 0{,}1x$. Дакле, величине x и y су директно пропорционалне, а коефицијент пропорционалности је $k = 0{,}1$.

ПРИМЕР 3. У примеру 2, за четири различите вредности величине x, на пример 10, 20, 30 и 40, одреди различите вредности величине y. Унеси те вредности у табелу зависности величине y од величине x, и нацртај одговарајући графикон. Да ли су тачке на овом графикону на истој правој?

РЕШЕЊЕ Из претходног примера имамо да је $y = 0{,}1x$ и одмах можемо да попунимо табелу.

x	10	20	30	40
y	1	2	3	4

Црвене тачке на графикону се налазе на једној правој (која садржи координатни почетак O).



Уопштимо сада ово запажање.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су x и y директно пропорционалне величине, тада се све вредности тачака (x, y) на графикону налазе на једној правој која пролази кроз координатни почетак O.

Вредности процената могу бити сви рационални бројеви, као на пример

$$12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = \frac{1}{8} \quad \text{или} \quad -0{,}3\% = \frac{-0{,}3}{100} = -0{,}003 \quad \text{или} \quad \frac{1}{7}\% = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{700}.$$

Када нека продавница понуди попуст, како ћеш се снаћи? Погледајмо следећи пример.

ПРИМЕР 4. Током викенда продавница електронске опреме планира да има попуст. Све цене електронских апарата ће током викенда бити ниже за 37,5% у односу на уобичајене цене.

а) Ако је уобичајена цена неког мобилног телефона 45 000 дин., колика ће бити цена током викенда?

б) Ако словом x означимо уобичајену цену неког апарата, а словом y цену тог истог апарта током викенда, да ли су величине x и y директно пропорционалне? Ако јесу, колики је коефицијент пропорционалности k?

в) Милан је у четвртак уочи викенда био у продавници, и свидео му се један рачунар чија је уобичајена цена 33 000 динара. Ако Милан има на располагању 20 000 динара, да ли ће Милан имати довољно новца да купи тај рачунар током викенда, када буде на попусту? Ако неће имати довољно новца, колико ће му тачно недостајати?

г) Ако Милан има на располагању 20 000 динара и тим новцем жели да купи неки апарат на попусту током викенда, колика је највиша уобичајена цена тог апарата да би га Милан могао купити током викенда?

РЕШЕЊЕ а) Попуст од 37,5% значи да треба од уобичајене цене одузети $37{,}5\% = \frac{37{,}5}{100}$ уобичајене цене да би се добила попусна цена. Дакле, попусна цена ће бити

$$45\,000 - \frac{37{,}5}{100} \cdot 45\,000 = 28\,125 \text{ дин.}$$

б) Снижена цена y се добија када се од уобичајене цене x одузме 37,5% уобичајене цене x.

$$\begin{aligned} y &= x - \frac{37{,}5}{100} \cdot x \\ &= \left(1 - \frac{37{,}5}{100}\right) \cdot x \qquad \text{Применили смо закон дистрибутивности.} \\ &= 0{,}625 \cdot x \end{aligned}$$

Пошто је $y = 0{,}625 \cdot x$, величине x и y су директно пропорционалне. Коефицијент пропорционалности је $k = 0{,}625$.

в) Уобичајена цена рачунара је $x = 33\,000$ динара. Означимо словом y попусну цену рачунара. Када у формулу директне пропорционалности $y = 0{,}625 \cdot x$, заменимо $x = 33\,000$, добијамо $y = 0{,}625 \cdot 33\,000 = 20\,625$. Дакле, рачунар ће током викенда коштати 20 625 динара. Пошто Милан има само 20 000 динара на располагању, недостајаће му $20\,625 - 20\,000 = 625$ динара да купи рачунар.

г) Милан ће током викенда моћи да плати највише $y = 20\,000$ динара за неки апарат. Када у формули директне пропорционалности $y = 0{,}625 \cdot x$, заменимо $y = 20\,000$, добијамо једначину $20\,000 = 0{,}625 \cdot x$. Решење ове једначине је $x = 32\,000$. Дакле, Милан ће током викенда моћи себи купити апарат чија уобичајена цена не премашује 32 000 динара.

ЗАДАЦИ

12. Ако 3 бомбоне коштају 7 динара, колико кошта 9 бомбона?

13. Ако 14 дињa тежи 15 килограма, колико тежи 16 дињa?

14. У директној пропорционалности $y = 5x$, одреди x ако је:
а) $y = 10$; б) $y = 50$; в) $y = 240$; г) $y = 60$.

15. Ако 6 свезака кошта 234, колико се свезака може купити за 390 динара?

16. Анка има 7, а Бранка 11 година. Суму од 540 динара треба да поделе директно пропорционално броју својим годинама. Колико новца ће добити Анка, а колико Бранка?

17. Вредност величине y једнака је 35% вредности величине x. Одреди x ако је $y = 6{,}3$.

18. Михаило и Јован имају 60 кликера. Треба да их поделе директно пропорционално броју слова у својим именима. Колико је добио свако од њих?

19. Дуж AB чија је дужина 44 cm подељена је тачком M на две дужи чије дужине су дирктно пропорционалне са коефицијентом пропорционалности $k = 1{,}75$.
Одреди дужину дужи AM и BM.

20. Величине x и y дате су таблицом:

x	12	48	−150	3	−6	21
y	4	16	−50	1	−2	7

Да ли су дате величине x и y директно пропорционалне?

5.4. Обрнута пропорционалност

ПРИМЕР 1. Горан има 1 000 динара, и за тај новац жели да купи освежавајући напитак да подели са другарима. Колико ће литара добити Горан за свој новац ако купи напитак који кошта:

а) 50 дин. по литру? б) 100 дин. по литру?

в) 200 дин. по литру? г) 250 дин. по литру?

РЕШЕЊЕ а) Ако напитак кошта 50 дин. по литру, за 1 000 динара Горан ће добити $1\,000 : 50 = 20$ литара напитка.

б) Ако је цена 100 дин. по литру, Горан ће добити $1\,000 : 100 = 10$ литара.

в) Ако је цена 200 дин. по литру, Горан ће добити $1\,000 : 200 = 5$ литара.

г) Ако је цена 250 дин. по литру, Горан ће добити $1\,000 : 250 = 4$ литра.

У претходном примеру, обележимо величину „цена (у динарима по литру)” словом x, а величину „литара купљеног освежавајућег напитка” словом y. Из примера јасно видимо да када је $x = 50$, онда је $y = 20$. Или, када је $x = 250$, онда је $y = 4$. Унесимо сада неке различите вредности за x и y у табелу.

x	20	25	40	50	100	200	250	500	1 000
y	50	40	25	20	10	5	4	2	1

Запазимо да су бројеви x и y такви да је њихов производ једнак 1 000, дакле $xy = 1\,000$. То можемо и другачије написати и формулом

$$y = \frac{1\,000}{x}.$$

Када су две величине у таквом односу да је њихов производ увек једнак неком броју k (који се не мења), за такве две величине кажемо да су **обрнуто пропорционалне**. Ово можемо такође исказати и на други начин:

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Две величине x и y су **обрнуто пропорционалне** ако постоји број $k \neq 0$ такав да важи

$$y = \frac{k}{x}.$$

Број k тада називамо **коефицијент обрнуте пропорционалности.**

Јасно је да је у нашем претходном примеру, коефицијент пропорционалности једнак $k = 1\,000$.

ПРИМЕР 2. Пред сваку фудбалску утакмицу, фудбалски клуб мора да покоси траву на домаћем терену. Једној косилици је потребно 180 минута да покоси цео терен. За колико минута ће траву покосити:

а) 2 косилице; б) 3 косилице; в) 5 косилица; г) 9 косилица: д) 12 косилица?

РЕШЕЊЕ а) Две косилице ће 2 пута брже покосити терен, тј. за упола мање времена, 90 минута.

б) Три косилице ће 3 пута брже покосити терен, тј. за 3 пута мање времена, 60 минута.

в) Пет косилица ће урадити посао за 5 пута мање времена, тј. 36 минута.

г) Девет косилица ће урадити посао за 9 пута мање времена, тј. 20 минута.

д) Дванаест косилица ће урадити посао за 12 пута мање времена, тј. 15 минута.

***ПРИМЕР 3.** Фабрика има 2 истоветна погона за производњу аутомобила који, радећи истовремено, произведу 30 аутомобила за 5 дана. Колико је фабрици потребно додатних истоветних погона да би сви заједно произвели 36 аутомобила за 4 дана?

РЕШЕЊЕ Знамо да <u>2 погона произведу 30 аутомобила за 5 дана</u>.

Број погона је обрнуто пропорционалан броју потребних дана. Ако преполовимо број погона, морамо дуплирати број дана потребних да се произведе 30 аутомобила. Дакле, $2 : 2 = 1$ погон произведе 30 аутомобила за $5 \cdot 2 = 10$ дана, тј.

<u>1 погон произведе 30 аутомобила за 10 дана</u>.

Ако један погон произведе 30 аутомобила за 10 дана, онда он произведе $30 : 10 = 3$ аутомобила за $10 : 10 = 1$ дан. Дакле,

<u>1 погон произведе 3 аутомобила за 1 дан</u>.

Пошто фабрика жели да произведе 36 аутомобила за <u>4 дана</u>, одредимо сада број аутомобила који 1 погон произведе за 4 дана. Дакле, потребно је учетвоространчити број аутомобила који 1 погон произведе за 1 дан. Ако 1 погон произведе 3 аутомобила за 1 дан, онда он произведе $4 \cdot 3 = 12$ аутомобила за $4 \cdot 1 = 4$ дана, тј.

<u>1 погон произведе 12 аутомобила за 4 дана</u>.

Ако један погон произведе 12 аутомобила за 4 дана, мора се утростручити број погона да би се произвело $12 \cdot 3 = 36$ аутомобила за 4 дана, тј.

<u>3 погона произведу 36 аутомобила за 4 дана</u>.

Пошто фабрика већ има 2 погона, а треба јој укупно 3 погона, фабрици је потребан 1 додатни истоветни погон.

ЗАДАЦИ

21. Ако 4 ученика поједе једну торту за 3 дана, колико ученика поједе ту торту за:
а) 1 дан; б) 2 дана; в) 4 дана; г) 6 дана?

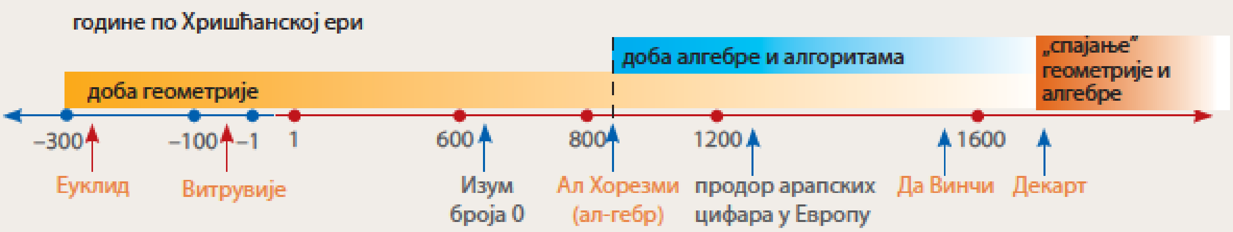
22. За монтирање једног аутомобила једном раднику треба 96 сати рада.
а) За колико сати ће један аутомобил монтирати 3 радника?
б) Колико радника треба да се један аутомобил монтира за један дан (8 радних сати).

23. Мића има 100 оловки. Колико оловки ће добити сваки од његових другова, ако Мића оловке подели са још: а) 3 друга; б) 4 друга; в) 9 другова?

24. Бројеви y и x разликују се за 5. Да ли су x и y обрнуто пропорционалне величине?

Прво техничко-технолошко занимање у античкој Грчкој и Риму је било занимање *архитекте*. Данас се архитекте углавном баве пројектовањем и планирањем саобраћајница, мостова, зграда и насељених места. У античкој Грчкој и Риму су архитекте заправо били инжењери који су поред пројектовања и зидања зграда правили и разне направе (на пример часовнике), као и оружје за потребе држава и војсковођа. При свакој изради неког простора, они су морали прво да нацрају простор у одређеној размери поштујући одређене пропорције, а вероватно је да су по потреби морали да направе и макете у одређеној размери. У 1. веку пре нове ере, познати римски архитекта Витрувије је написао дело од 10 књига *О архитектури* (*De architectura*) с детаљним описом размера и пропорција, према којима је архитекта требало да пројектује здања у античком Риму.
Занимљиво је да је Витрувије такође описао и размере људског тела, нпр. размере дужина ногу, руку, тела, шака, стопала итд. Позната размера је да су висина човека и распон руку отприлике једнаки, тако да ако желиш да знаш колика ти је висина, довољно је да рашириш руке, и то ти је отприлике и висина тела. Познати италијански ренесансни сликар, архитекта, инжењер и научник с почетка 16 века Леонардо да Винчи је био упознат са делима Витрувија, те је и сам нацртао тзв. Витрувијевог човека на једном од својих најпознатијих цртежа.

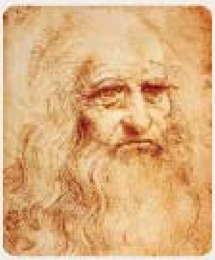
До 17. века нове ере, геометрија и алгебра су биле практично независне гране математике. Рачуна се да је отац геометрије антички грчки математичар Еуклид који је живео око 300. године пре нове ере, а да је отац алгебре средњовековни персијски математичар Ал Хорезми који је живео у 9. веку нове ере. Античке и средњовековне архитекте вероватно нису ни слутили да ће се једног дана геометрија и алгебра „спојити”, те да ће геометрија моћи да се описује једначинама. Тај помак је у 17. веку направио француски математичар и филозоф Рене Декарт који је изумео правоугли координатни систем. Тако смо с временом добили различите представе података као што су хистограми, тачкасти дијаграми и графикони, који се сви заснивају на Декартовом координатном систему. Постало је могуће алгебарским формулама математички изразити линије, фигуре и геометријска тела путем једначина везаних за координатни систем. Да ли сте се икад запитали како данас рачунари, телефони и паметни телевизори успевају да исцртају цртеже и видео анимације? Рачунарско цртање геометријских фигура је могуће управо зато што се црта помоћу алгебарских формула и алгоритама у Декартовом координатном систему. Иначе, поред тога што је био математичар, Декарт је био и филозоф који је утицао на формирање модерне филозофије.
Његова чувена реченица „Мислим, дакле постојим” је и дан-данас инспирација научницима да открију тајну интелигенције и свести.

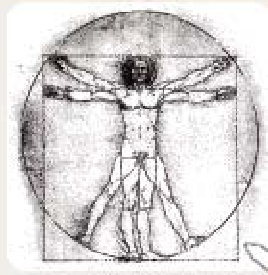


Марко Витрувије Полио живео је и радио у 1. веку пре н. е. у Риму, био је писац, архитекта и инжењер. Аутор је славног списа *О архитектури*. Реч је о десет књига о архитектури.

Трећа књига бави се геометријском методом мерења, а завршава се расправом о тежинама и мерама. Ова књига доноси илустрације људског тела и његових пропорција. Витрувије чак пореди пропорције храмова с пропорцијама људског тела.

Витрувије представља своје дело; графика из 1658. године

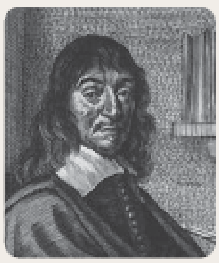




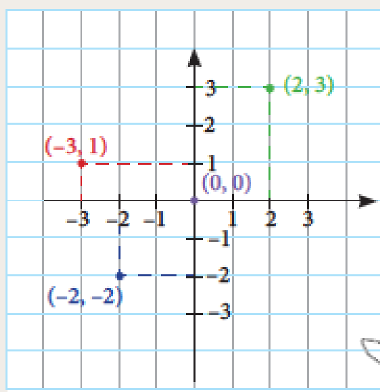
Леонардо да Винчи велики италијански ренесансни сликар, рођен је 1452. године, а живео је до 1519. године. Сликарски занат је учио у радионици Андреа дел Верокиа, тада чувеног сликара, вајара и јувелира. Ту је научио и бројне занатске технике и знања, укључујући металургију, обраду коже, те стекао знања из медицине.

Спој уметности и природних наука може се видети у његовим белешкама: ту су скице грађе људског тела, записи о особинама светлости и сенке, нацрти различитих направа итд. Био је инжењер и иноватор. Осмислио је, на пример, системе подизања барикада за заштиту градова, радио на промени тока реке Арно, конструисао неколико летећих машина, претече данашњих хеликоптера. Леонардо је израдио и нацрт моста за султана Бајазита Другог. Имао је низ идеја које су нам и дан-данас корисне: соларна енергија, калкулатори, зачеци теорије померања тектонских плоча, топографске мапе, падобран.

Уз чувени цртеж *Витрувијевог човека*, Леонардо је саставио и белешке које се односе на пропорције људског тела. Пропорције које је извео Леонардо заснивају се на делу Витрувија. Ево неколико тих пропорција: длан је широк колико и 4 прста; стопало треба да је дугачко колико и 4 длана; дужина шаке је $\frac{1}{10}$ човекове висине; дужина увета је $\frac{1}{3}$ дужине лица; висина човека износи 4 корака (тј. 24 длана); распон човекових раширених руку једнак је његовој висини; дужина човековог стопала износи $\frac{1}{6}$ његове висине итд.



Рене Декарт (1596–1650) био је француски филозоф, математичар и научник. У свом делу *Геометрија* објаснио је геометрију алгебарским методама. Његово најпознатије дело *Расправа о методи* (1637) објављено је на француском језику, а не на латинском учене Европе. Пишући на свом матерњем језику јасно се определио да се не обраћа ученим људима, већ људима *здравог разума*.



Декартов координатни систем

Декартов допринос математици је огроман, а огледа се у успостављању координатног система (тзв. Декартов координатни систем), увођењу појма променљиве величине, свођењу геометријских проблема на алгебарске итд.

У физици је такође оставио дубоког трага: протумачио је настанак дуге, увидевши да се светлост разлаже проласком кроз капљицу воде; уобличио је законе о кретању.

5.5. Размера и пропорција

Сандра и њена мама су решиле да купе исти модел патика, али различитих бројева. Сандрине патике су дужине 20 cm, а мамине патике су дужине 28 cm. Кажемо онда да су дужине њихових патика у **размери** „20 према 28", и ту **размеру** обележавамо количником или разломком $20:28=\frac{20}{28}$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Количник два броја a и b, таква да је $a \neq 0$ и $b \neq 0$, назива се **размера бројева** a и b, и обележава се изразима: $a:b$ или $\frac{a}{b}$.

У истој породици, Саша и тата су купили исти модел патика, али су дужине њихових патика 25 cm и 35 cm. Дужине Сашиних и татиних патика имају размеру $25:35=\frac{25}{35}$.

Приметимо да је разломак $\frac{20}{28}$ једнак разломку $\frac{25}{35}$, што значи да је размера Сандриних и маминих патика једнака размери Сашиних и татиних патика. Једнакост две размере назива се **пропорција**. Пример пропорције је $\frac{20}{28}=\frac{25}{35}$. Уопштимо ово запажање.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако су две размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ једнаке, њихову једнакост $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ називамо **пропорција**.

ПРИМЕР 1. Ако за 324 динара можеш да купиш 180 грама кикирикија, колико новца ти је потребно да купиш 300 грама кикирикија?

РЕШЕЊЕ Обележимо словом x непознату суму новца која је потребна да купимо 300 грама кикирикија. Дакле, за x динара добијемо 300 грама, једнако као што за 324 динара добијемо 180 грама. То можемо изразити пропорцијом:

$$\frac{x}{300}=\frac{324}{180}.$$

Посматрајмо ову пропорцију као једначину коју треба решити, и решимо је (погледај лекцију 3.8 ако треба да се подсетиш како се решава оваква једначина). Решење је:

$x=\frac{324}{180}\cdot 300=540$ динара нам је потребно за 300 грама кикирикија.

Често је потребно баратати пропорцијама да би се из њих извукао одређени закључак. Основна метода је ослобађање од имениоца разломка. То постижемо **унакрсним множењем** на следећи начин (производ левог бројиоца и десног имениоца једнак је производу десног бројиоца и левог имениоца).

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

УНАКРСНО МНОЖЕЊЕ

Ако је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, тада је

$ad=bc$.

МНОЖИ ПРАТЕЋИ ЦРВЕНЕ СТРЕЛИЦЕ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad ad=bc$$

ПРИМЕР 2. Докажи да од једнакости $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ може да се добије једнакост $ad=bc$.

РЕШЕЊЕ Доказаћемо методом клацкалице.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad / \cdot bd$$

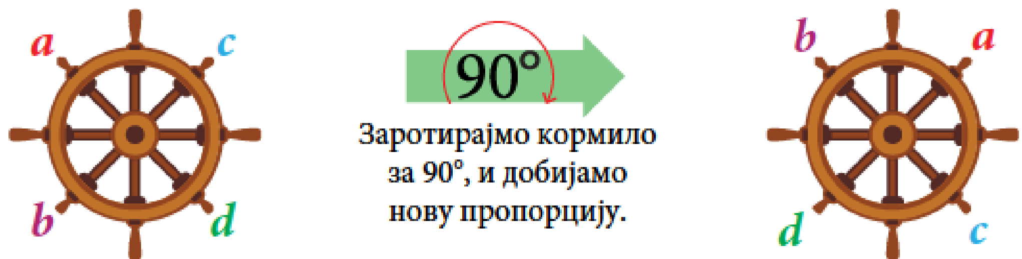
Помножимо обе стране производом bd.

$$\frac{a\cancel{b}d}{\cancel{b}}=\frac{\cancel{d}bc}{\cancel{d}}$$

Скратимо b из левог разломка и d из десног разломка.

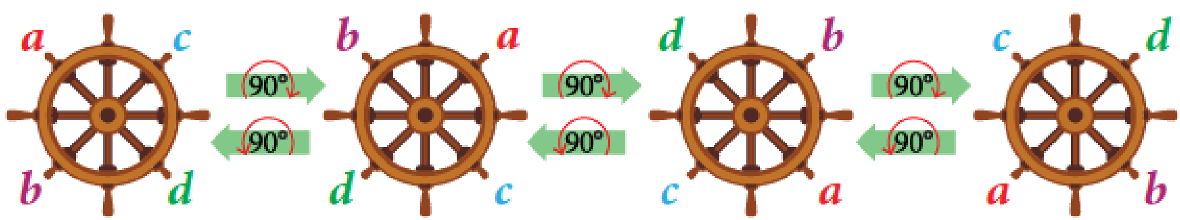
$$ad=bc$$

Метода кормила је још један начин баратања пропорцијама. Замислимо да се пропорција $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ налази на бродском кормилу, па заротирајмо кормило за 90° да бисмо добили нову пропорцију.



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad\qquad \frac{b}{d}=\frac{a}{c}$$

Кормило можемо произвољно ротирати у смеру кретања казаљке на сату, или у супротном смеру за по 90°. На овај начин добијамо 4 различите пропорције простим ротирањем кормила за по 90°.



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{b}{d}=\frac{a}{c} \qquad \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \qquad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$

ПРИМЕР 3. Докажи да се од пропорције $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ може добити заротирана пропорција $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$.

РЕШЕЊЕ Докажимо методом клацкалице како се добија истоветна пропорција $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad / \cdot \frac{b}{c}$ Помножимо обе стране разломком $\frac{b}{c}$.

$\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}c}=\frac{\cancel{c}b}{d\cancel{c}}$ Скратимо b из левог разломка и c из десног разломка.

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ Ова пропорција је истоветна траженој пропорцији $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$.

ПРИМЕР 4. У једном одељењу 6. разреда, број дечака према броју девојчица је у размери 2 : 3. Ако у том одељењу има 10 дечака, колико има девојчица у том истом одељењу?

РЕШЕЊЕ Обележимо словом x непознати број девојчица у одељењу. Из поставке задатка, знамо да је размера $2:3=\frac{2}{3}$ мора бити једнака размери $\frac{10}{x}$. Тако добијамо пропорцију:

$$\frac{2}{3}=\frac{10}{x}$$

која представља једначину коју треба да решимо.

<u>I начин.</u> Унакрсним множењем, од пропорције $\frac{2}{3}=\frac{10}{x}$ добијемо једначину: $2x=3\cdot 10$.
Решење ове једначине је $x=15$.

<u>II начин.</u> Методом кормила, ротацијом за 180°, од пропорције $\frac{2}{3}=\frac{10}{x}$ добијамо нову пропорцију $\frac{x}{10}=\frac{3}{2}$. Другачије написано, добили смо једноставну једначину $\frac{x}{10}=1{,}5$. Решење је наравно опет исто: $x=15$.

ПРИМЕР 5. Зоран и Милена су се договорили да поделе 1400 динара у размери 3 : 4, тако да Зоран добије мањи део. Колико ће новца добити Зоран, а колико Милена?

РЕШЕЊЕ Ако Зоран и Милена деле новац у размери 3 : 4, можемо написати да Зоран добија 3 од 7 делова, а Милена 4 од 7 делова. Свих 7 делова мора бити једнако 1400 динара. Означимо један део словом k. Пошто свих 7 делова мора бити једнако 1400 динара, добијамо једначину:

$7k = 1400$ динара,

чије решење је:

$k = 200$ динара.

Зоранов део је $3k$ а Миленин је $4k$, па имамо:

Зоран: $3k = 600$ динара,

Милена: $4k = 800$ динара.

***ПРИМЕР 6.** Три другарице, Ана, Бранка и Цеца су одлучиле да међу собом поделе 132 јабуке.

Ако одлуче да број Аниних и Бранкиних јабука буде у размери 3 : 4, а број Бранкиних и Цециних јабука буде у размери 4 : 5, колико јабука ће добити свака од три другарице?

РЕШЕЊЕ Означимо број Аниних, Бранкиних и Цециних јабука словима a, b и c, тим редоследом. Из поставке задатка имамо:

пропорцију $a : b = 3 : 4$, одакле следи да ће Ана добити $a = \frac{3}{4}b$ јабука;

пропорцију $b : c = 4 : 5$, одакле следи да ће Цеца добити $c = \frac{5}{4}b$ јабука.

Пошто другарице заједно морају имати 132 јабуке, добијамо једначину

$\frac{3}{4}b + b + \frac{5}{4}b = 132,$ коју даље решавамо.

$\left(\frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4}\right)b = 132$ Применили смо закон дистрибутивности.

$3b = 132$ Дакле, Бранка ће добити $b = 44$ јабуке.

Сада следи да ће Ана добити $a = \frac{3}{4}b = 33$ јабуке

и да ће Цеца добити $c = \frac{5}{4}b = 55$ јабука.

ПРИМЕР 7. Три радника оберу воћњак за 12 сати. Ако сви радници раде истом брзином, за колико ће сати воћњак обрати 8 радника?

РЕШЕЊЕ Обележимо словом x број сати потребан да 8 радника обере воћњак.

<u>I начин.</u> 8 радника ће брже обрати воћњак него 3 радника. Зато број x мора бити мањи од 12. Јасно је да бројеви x и 12 морају пропорцијом бити везани за бројеве 3 и 8. Нађимо сада пропорцију коју мора задовољити размера $x : 12 = \frac{x}{12}$. Пошто бројилац x мора бити мањи од 12, пропорција мора бити таква да је бројилац мањи од имениоца, па имамо пропорцију:

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{8},$$

јер број 3 мора бити бројилац који је мањи од имениоца 8. Ако ову пропорцију посматрамо као једначину, и решимо је, добијамо:

$$x = \frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Дакле, 8 радника ће обрати воћњак за четири и по сата.

<u>II начин.</u> Укупан број сати рада који три радника уложе у брање воћњака је $3 \cdot 12 = 36$. Ако 8 радника треба да обере исти воћњак, и њима ће бити потребно укупно 36 сати рада, али ће тих 36 сати рада поделити на 8 једнаких делова, те ће сваки радник радити:

$$x = 36 : 8 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ сати.}$$

Дакле, 8 радника ће обрати воћњак за четири и по сата.

ЗАДАЦИ

25. Године мајке и кћерке су у размери 7 : 3.
а) Колико година има кћи ако мајка има 42 године?
б) Колико година имају мајка и кћи ако заједно имају 80 година?

26. Света би да орахе подели у размери 10 : 8, а Дуца у размери 9 : 7. Колико најмање, а колико највише ораха може добити један од дечака, ако на располагању имају 144 ораха?

27. У једном поглављу уџбеника за математику има 125 задатака који су подељени у две лекције. Колико задатака има у свакој лекцији, ако су бројеви задатака по лекцијама у размери 2 : 3.

28. Угао од 72° подељена је у размери 5 : 3. Одреди у степенима меру већег и меру мањег угла.

29. На правој p дате су редом тачке A, B, C и D, тако да је $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm и $CD = 5$ cm. Одреди размере:
а) $AB : BD$; б) $AC : BD$; в) $AD : BC$.

30. На правој p дате су редом тачке A, B и C. Ако је $AB : BC = 4 : 3$, одреди размере:
а) $AC : AB$; б) $AC : BC$.

31. Карта је урађена у размери 1 : 200 000. Ако је растојање између два места на карти 3,7 cm, колико је растојање у природи?

32. Карта је урађена у размери 1 : 1 000 000. Ако је ваздушно растојање између града А и града В једнако 200 km, колико ће бити растојање између А и В на карти?

33. Објекти A, B и C су на карти удаљени: $AB = 7$ cm, $BC = 9$ cm, $CA = 11$ cm. Карта је урађена у размери 1 : 300 000. Колика је у природи ваздушна удаљеност $AB + BC + CA$?

34. Браћа Јаша и Раша, имају заједничку собу. Јаша је план своје собе нацртао у размери 1 : 25, а Раша је план исте собе нацртао у размери 1 : 50. Ако је дужина собе 4 m, а ширина 3 m, које димензије соба има на Јашином, а које на Рашином плану?

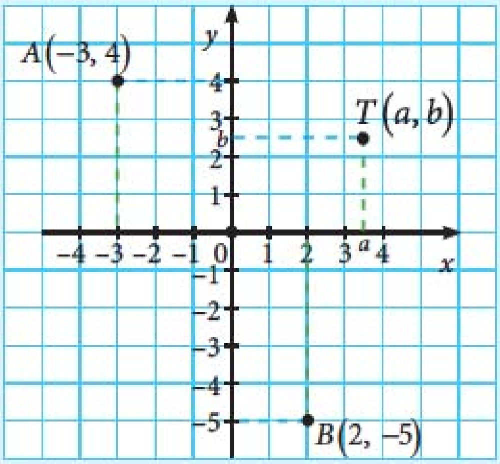
35. Користећи метод кормила, израчунај непознате бројеве у следећим пропорцијама (помоћ: нађи начин да заротираш кормило тако да што мање рачунаш):
а) $\frac{a}{8} = \frac{1}{3}$; б) $\frac{24}{n} = \frac{120}{10}$; в) $\frac{1}{3} = \frac{m}{108}$.

36. Користећи метод кормила докажи да се из пропорције $a : b = c : d$ добија пропорција $d : c = b : a$.

***37.** Ако је $a : b = 3 : 4$, $b : c = 5 : 6$ и $c : d = 7 : 8$, колико је:
а) $\frac{a}{c}$; б) $\frac{b}{d}$; в) $\frac{a}{d}$?

САЖЕТАК
РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ – *други део*

ДЕКАРТОВ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ:



x-оса је апсцисна оса.

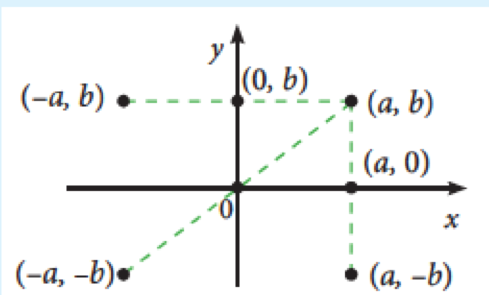
y-оса је ординатна оса.

$T(a, b)$ читамо тачка T чија је апсциса једнака a, а ордината једнака b.

$A(-3, 4)$ читамо тачка A чија је апсциса једнака -3, а ордината једнака 4.

$B(2, -5)$ читамо тачка B чија је апсциса једнака 2, а ордината једнака -5.

Координатна раван се дели на четри квадранта I, II, III и IV.



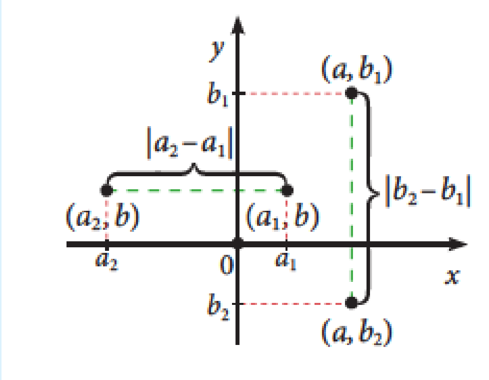
Тачка на x-оси има координате $(a, 0)$.

Тачка на y-оси има координате $(0, b)$.

$(a, -b)$ и (a, b) су симетричне у односу на x-осу.

$(-a, b)$ и (a, b) су симетричне у односу на y-осу.

$(-a, -b)$ и (a, b) су симетричне у односу на координатни почетак O.



Растојање између $T_1(a, b_1)$ и $T_2(a, b_2)$ је

$$|b_2 - b_1|.$$

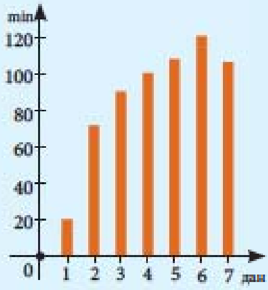
Растојање између $Q_1(a_1, b)$ и $Q_2(a_2, b)$ је

$$|a_2 - a_1|.$$

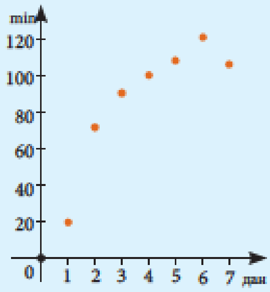
ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПОДАТАКА:

x	-3	-1	1	2
y	2	1	-1	3

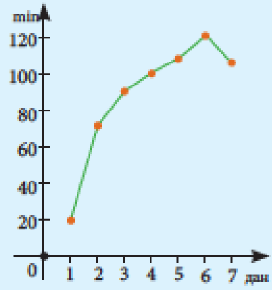
табела



хистограм



тачкасти дијаграм



графикон

ДИРЕКТНА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ:

$y = kx$ $\quad$ k је коефицијент пропорционалности $(x \neq 0)$

ОБРНУТА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ:

$y = \dfrac{k}{x}$ $\quad$ k је коефицијент обрнуте пропорционалности $(x \neq 0)$

РАЗМЕРА:

$a : b$ или $\dfrac{a}{b}$ $\quad$ $(b \neq 0)$

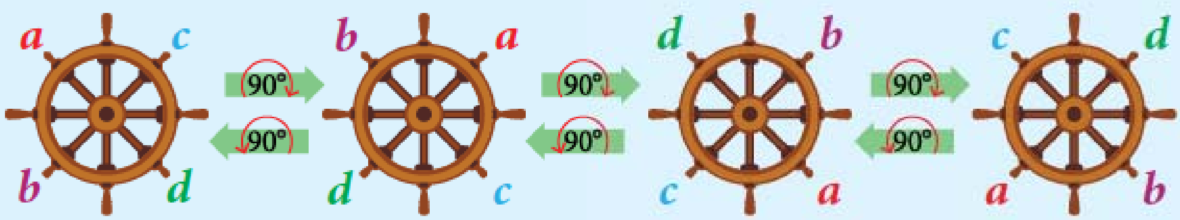
ПРОПОРЦИЈА:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $\quad$ $(b \neq 0, d \neq 0)$

УНАКРСНО МНОЖЕЊЕ:

Ако је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, $\quad$ тада је $ad = bc$.

МЕТОДА КОРМИЛА:

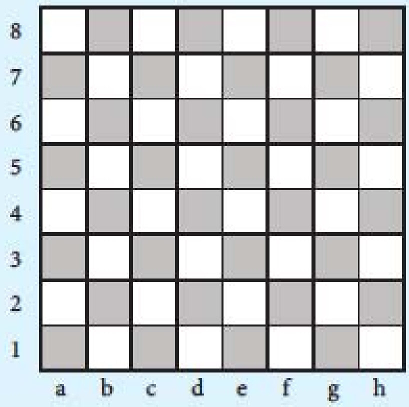


$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $\quad$ $\dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}$ $\quad$ $\dfrac{d}{c} = \dfrac{b}{a}$ $\quad$ $\dfrac{c}{a} = \dfrac{d}{b}$

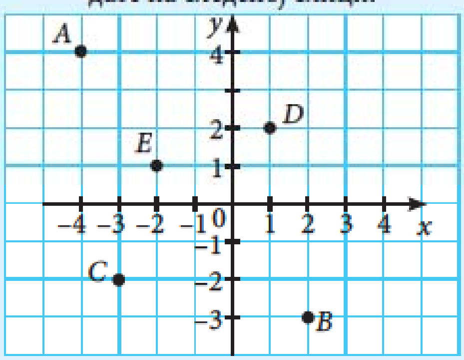
$(a, b, c, d \neq 0)$

ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

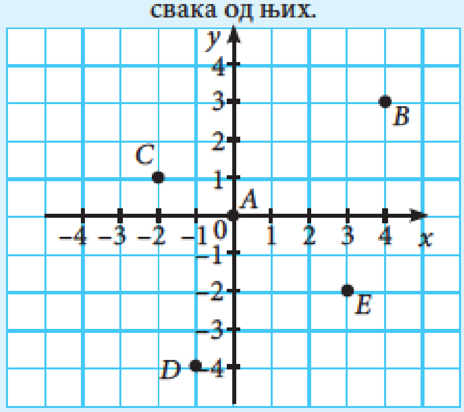
38. На шаховској табли налазе се скакач (S), топ (T), ловац (L) и пешак (P). Словима S, T, L и P обележи на шаховској табли поља на којима се они налазе, ако је скакач на пољу b2, топ на пољу h8, ловац на пољу c8 и пешак на пољу e2.



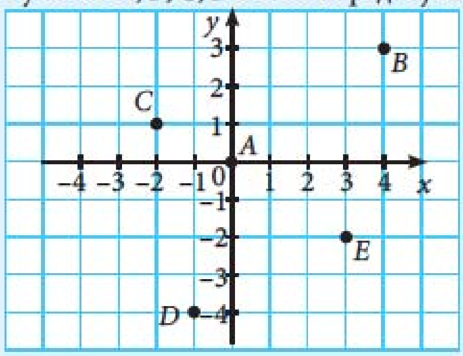
39. Одреди координате тачака A, B, C, D и E које су дате на следећој слици.



40. Дате су тачке A, B, C, D и E. Одреди њихове координате и запишу у ком се квадранту налази свака од њих.



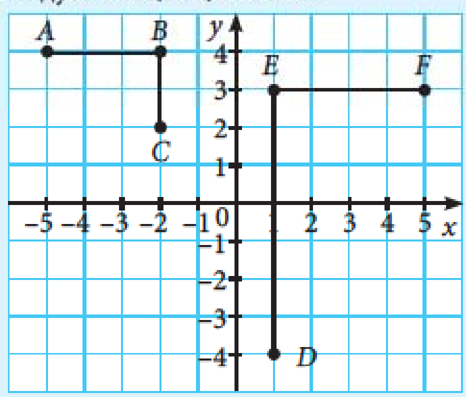
41. Дате су тачке A, B, C, D и E на наредној слици.



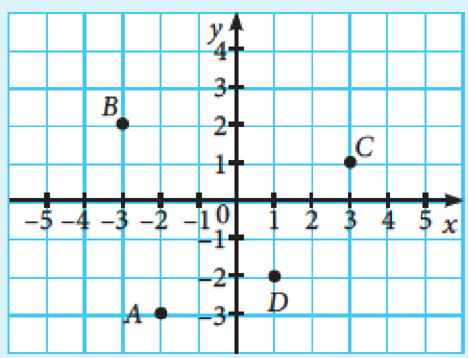
Допуни табелу:

Тачка	Координате		Растојање од	
	x	y	x-осе	y-осе
A				
B				
C				
D				
E				

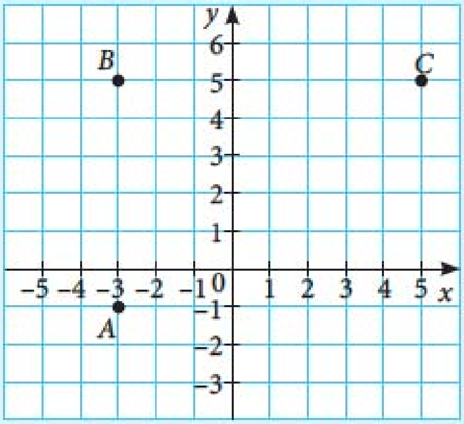
42. На слици су дате тачке A, B, C, D, E и F у Декартовом координатном систему. Одреди дужине дужи: AB, BC, DE и EF.



43. На слици су дате тачке A, B, C, D у Декартовом координатном систему. Одреди координате тачака: а) A_1 је тачка у II квадранту и дуж AA_1 има дужину 6; б) B_1 је тачка у I квадранту и дуж BB_1 има дужину 5; в) C_1 је тачка у IV квадранту и дуж CC_1 има дужину 2; г) D_1 је тачка у III квадранту и дуж DD_1 има дужину 4.



44. Дате су тачке A, B, C на наредној слици.



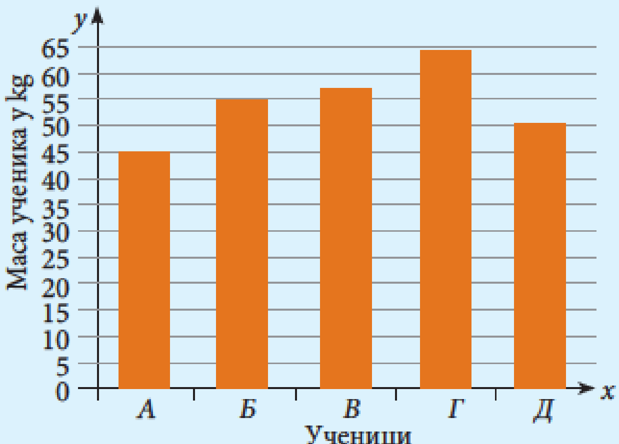
Допуни табелу:

Дуж	Дужина дужи	Координате средишта дужи	
		x	y
AB			
BC			

45. Шест молера окречи једну зграду за 12 дана. Допуни табелу, ако број x представља број молера, а број y представља број дана потребних да се окречи та зграда:

x број молера	1	2		4		9		18
y број дана	72		24		12		6	

46. Масе у килограмима (у свакодневном животу „тежине") ученика шестог разреда Анке, Бранке, Владе, Горана и Дивне приказане су на наредном хистограму.



Попуни табелу:

Ученик	Анка	Бранка	Влада	Горан	Дивна
Маса					

Израчунај просечну масу (аритметичку средину маса) девојчица, дечака и целе групе.

47. Пред вама се налазе званични подаци Републичког хидрометереолошког завода Србије о средњим месечним температурама ваздуха на планини Златибор за 2016. годину. Хистограм даје просечне температуре по месецима у 2016. години, а линијски дијаграм просечне температуре у периоду од 1961-1990. године.

Одговори на следећа питања:

Колико месеци у току 2016. године на Златибору је била просечна температура испод нуле?	
У ком месецу у току 2016. године на Златибору је била просечна температура најнижа?	
У ком месецу у току 2016. године на Златибору је била просечна температура највиша?	
Колико има месеци у току 2016. године у којима је просечна температура између 10°C и 15°C?	
У ком месецу у току 2016. године на Златибору се просечна температура највише разликовала од вишегодишњег просека у истом месецу?	

48. Допуни табелу ако y зависи од x тако што се сваком броју x придружује број y који представља десетицу којој припада x. На пример број 8 припада првој десетици, број 36 припада 4. десетици, број 154 припада 16. десетици итд.

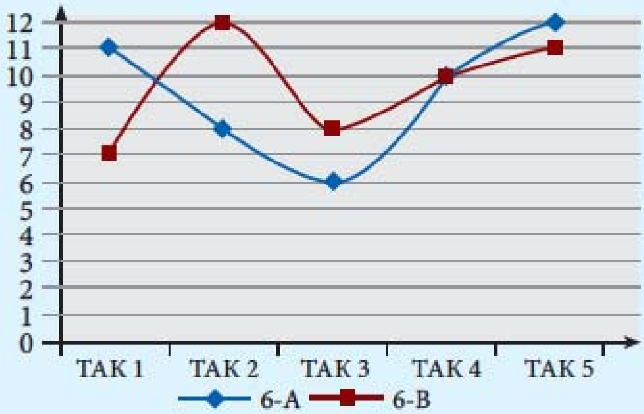
x	8	36	154	17	59	63	77	82	93
y	1	4	16						

49. Напиши формулу која приказује зависност обима O од дужине странице a једнакостраничног троугла.

50. Брзина бициклисте је 12 km/h. Ако је t време (у минутима) које је бициклиста возио бицикл, а s пређени пут (у километрима) допуни таблицу.

t (min)	20	30	45	60				
s (km)					3	18	15	21

51. Ученици 6-А и 6-В одељења Основне школе „Милован Глишић” из Ваљева такмичили су се у решавању задатака са Ревијалног online такмичења ученика основних школа из математике. Међуодељенско такмичење је реализовано тако што је свако одељење одабрало по пет ученика и онда су упоређивани резултати по броју тачно урађених задатака (било је укупно 12 задатака) који су приказани на наредном дијаграму:



Допуни табелу и одговори на следећа питања:

ТАКМИЧАР ЕКИПА	ТАК 1	ТАК 2	ТАК 3	ТАК 4	ТАК 5	УКУПНО
6 - А						
6 - В						
Колика је аритметичка средина броја решених задатака екипе А?						
Колика је аритметичка средина броја решених задатака екипе В?						
Која екипа је победила: А или В?						

53. Кошаркаш Бранко у току једне недеље вежба убацивање слободних бацања, а приказ убачених поена дат је у табели:

Дан	П	У	С	Ч	П	С	Н
Број бацања	180	220	240	230	190	150	130

Прикажи дате податке хистограмом, тачкастим дијаграмом и графиконом.

54. Величине x и y дате су таблицом:

x	7	–5	3	25	–8	6
y	28	–20	12	120	–32	24

Да ли су дате величине x и y директно пропорционалне?

55. Дате су директно пропорционалне величине x и y следећом таблицом:

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	0	–2	–4

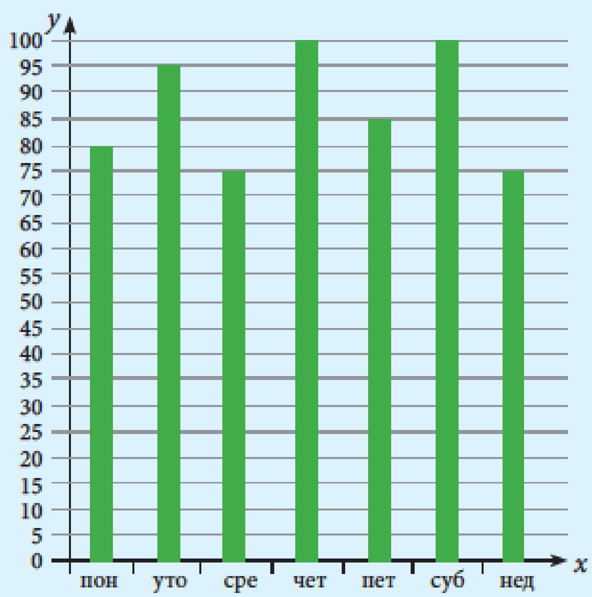
Одреди коефицијент директне пропорционалности.

56. Три сладоледа коштају 450 динара.
а) Колико кошта 7 сладоледа?
б) Колико сладоледа се може купити за 750 динара?

57. Риста бициклиста има масу 70 kg и за 50 минута бициклистичке трке изгуби 1 килограм телесне масе. Колико килограма ће имати Риста после трке која траје 160 минута?

52. Миша сваког дана решава тестове на интернету. Следећи хистограм приказује његове резултате у процентима решених задатака у последњих седам дана. Допуни табелу и одговори на питања у табели.

ДАНИ	ПОН	УТО	СРЕ	ЧЕТ	ПЕТ	СУБ	НЕД
РЕЗУЛТАТ У %							
Колико пута (дана) је Миша имао максималан резултат?							
Који је Мишин најслабији проценат?							
Колики је просечан Мишин резултат?							



58. Браца и Цаца у покретање своје заједничке књижаре уложе, Браца 1 200 000 динара, а Цаца 1 650 000 динара и договоре се да чист приход књижаре деле у односу њихових улагања. У 2023. години књижара је остварила чист приход у износу од 5 700 000 динара. Како су Браца и Цаца поделили остварени приход?

***59.** На располагању су 72 јабуке. Марко, Јанко и Звонко желе да поделе јабуке. Број Маркових и Јанкових јабука треба да буде у размери 2 : 3, а број Јанкових и Звонкових јабука треба да буде у размери 3 : 4. Колико јабука ће добити свако од њих?

***60.** Обим троугла је 30 cm. Дужине страница a и b су у размери 4 : 5, а дужине страница b и c су у размери 5 : 6. Одреди странице тог троугла.

***61.** За унутрашње углове α, β, γ троугла важе следеће пропорције $\alpha : \beta = 3 : 4$; $\beta : \gamma = 2 : 1$. Одреди углове троугла.

***62.** Елементи једне пропорције су бројеви 12, 24, 36 и x, при чему се дати бројеви могу произвољно размештати, тј. дати редослед бројева није обавезан.
а) Колико различитих вредности може узети број x?
б) Одреди најмању и највећу вредност броја x.

63. Зависност величина x и y представљена је следећом таблицом:

x	8	12	24	48	10	5	18	2
y	9	6	3	2	9	16	4	36

Да ли су x и y обрнуто пропорционалне величине?

64. Величине x и y представљене су следећом таблицом:

x	1	2	4	5	10
y	100	50	25	20	10

Да ли су x и y обрнуто пропорционалне величине? Ако јесу, одреди коефицијент обрнуте пропорционалности.

65. Број x представља број молера, а број y број дана који је молерима потребан да окрече једну зграду. Допуни дату таблицу и одговори на питања:
а) Колико молера за 3 дана окрече ту зграду?
б) Колико дана је потребно за кречење ако има 4 молера?

x - број молера	8	12		48		3		1
y - број дана	6		3		8		24	

66. Зависност величина x и y представљена је следећом таблицом:

x	1	2	4	8	10	16	20	25
y	100	50	25	12,5	10	6,25	5	4

Да ли су x и y обрнуто пропорционалне величине?

67. Обим правоугаоника је 40. а) Ако је a дужина једне странице, а b дужина друге странице правоугаоника, допуни следећу табелу; б) да ли су a и b обрнуто пропорционалне величине?

Дужина странице a	2	3	5	6				
Дужина странице b					11	12	16	17

68. Доставу математичког часописа за ученике основних школа 8 радника реализује за 3 дана.
а) Ако је x број радника, а y број дана рада допуни табелу:

x - број радника	8	12	6	48			
y - број дана	3				1	2	8

б) Која формула повезује величине x и y?
в) Да ли су x и y обрнуто пропорционалне величине?

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Тачке $A(3, 4)$ и $B(4, 3)$ се у координатној равни поклапају.	тачно	нетачно
2. Ако је $A(7, 2)$ и $B(7, 7)$, дуж AB има дужину 5.	тачно	нетачно
3. Ако је $x : y = 6 : 12$, онда је $y : x = 2 : 1$.	тачно	нетачно
4. Ако је $y = 3x$, онда су x и y директно пропорционалне величине.	тачно	нетачно
5. Ако је $x + y = 13$, онда су x и y обрнуто пропорционалне величине.	тачно	нетачно
6. Ако је $3 : 4 = 9 : x$, онда је $x = 11$.	тачно	нетачно
7. План је урађен у размери 1 : 100. Ако је у плану дуж $AB = 7$ cm, онда је у приоди растојање између A и B једнако 7 km.	тачно	нетачно
8. Посао који 3 молера ураде за 8 дана, 4 молера ће урадити за 6 дана.	тачно	нетачно
9. Тачкама $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$, $D(4, 0)$ одређен је квадрат.	тачно	нетачно
10. Ако се 48 динара подели у размери 5 : 7, онда се добију износи од 23 динара и 25 динара.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. У координатној равни су дате тачке $A(1, 3)$ и $B(1, 11)$. Средиште дужи AB је тачка M која има координате:

А) (3, 11); Б) (3, 8); В) (2, 7); Г) (1, 7); Д) (7, 1).

2. Ако је $3 : 5 = x : 10$, онда је x једнако:

А) 4; Б) 5; В) 6; Г) 8; Д) 10.

3. Тачка M дели дуж $AB = 120$ cm у размери $AM : BM = 3 : 5$. Тада је дуж AM једнака:

А) 8 cm; Б) 12 cm; В) 45 cm; Г) 60 cm; Д) 75 cm.

4. Карта је урађена у размери 1 : 1 000 000. Колико је ваздушно растојање између Ваљева и Шапца, ако на карти то растојање износи 5,3 cm?

А) 53 km; Б) 64 km; В) 46 km; Г) 60 km; Д) 57 km.

5. Једну машину 6 радника монтирају за 12 дана. Ако има 8 радника онда ће они ту машину монтирати за:

А) 7 дана; Б) 8 дана; В) 9 дана; Г) 10 дана; Д) 11 дана.

6. Ако 7 свески кошта 273 динара, онда 11 свески кошта:

А) 440 динара; Б) 431 динар; В) 451 динар; Г) 429 динара; Д) 468 динара.

7. Легура садржи 40% бакра и 60% цинка. Ако је маса легуре 240 kg, онда је маса бакра садржаног у легури једнака:

А) 120 kg; Б) 144 kg; В) 96 kg; Г) 100 kg; Д) 160 kg.

8. Ако је $a : b = c : d$, онда је:

А) $a : d = c : b$; Б) $a : b = d : c$; В) $b : d = a : c$; Г) $a : d = b : c$; Д) $b : c = d : a$.

$(a, b, c, d \neq 0)$

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

Декартов координатни систем
Координатне осе
Апсциса
Ордината
Координатни почетак
Координатна раван
Уређени пар
Квадрант
Зависне величине
Хистограм
Тачкасти дијаграм
Графикон
Директно пропорционалне величине
Коефицијент пропорционалности
Обрнуто пропорционалне величине
Коефицијент обрнуте пропорционалности
Размера
Пропорција
Унакрсно множење
Метода кормила

ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

1.1.	У координатној равни нацртај троугао ABC, ако су тачке A, B и C дате координатама: $A(3, 2)$, $B(-2, 3)$ и $C(0, 7)$.	**15**
1.2.	Израчунај обим правоугаоника $ABCD$ чија су темена у координатној равни дефинисана тачкама: $A(2, 2)$, $B(7, 2)$, $C(7, 5)$.	**20**
1.3.	Тачке $A(1, 1)$ и $B(4, 1)$ дефинишу једну страницу квадрата $ABCD$. Одреди координате тачака C и D.	**25**
2.1.	Одреди број x, ако је $x : 7 = 126 : 6$.	**15**
2.2.	Одреди број y, ако је $3{,}6 : 4{,}8 = y : 24$.	**20**
2.3.	Израчунај бројеве x и y, ако је $x : y = 4 : 3$, а $x - y = 123$.	**25**
3.1.	Ако 13 оловака кошта 195 динара, колико оловака се може набавити за 300 динара?	**15**
3.2.	Помешано је 100 литара воде и 25 литара сирупа поморанџе. Колико процената воде садржи добијени сок од поморанџе?	**20**
3.3.	Збир бројева a, b и c је 770. Одредити бројеве a, b и c, ако је $a : b = 2 : 3$ и $b : c = 4 : 5$.	**25**
4.1.	Пет девојчица поделе чоколаду тако да свака од њих добије по 12 коцкица чоколаде. Колико коцкица чоколаде ће добити свака од девојчица, ако се чоколада подели на 6 девојчица?	**15**
4.2.	Четири мајстора монтирају машину за 18 дана. За колико дана би ту машину монтирало 6 мајстора? Колико мајстора треба ангажовати да се машина монтира за 8 дана?	**20**
4.3.	Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова, колико станова ће окречити 7 молера за 24 дана.	**25**

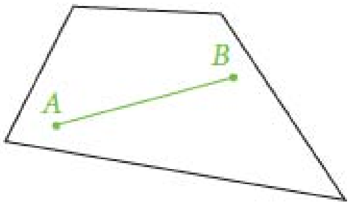
6 ЧЕТВОРОУГАО

Настављамо наше путовање кроз геометрију. И овде треба поштовати нека правила, као и у саобраћају. Где постоје знакови обавештења, који су углавном облика четвороугла.

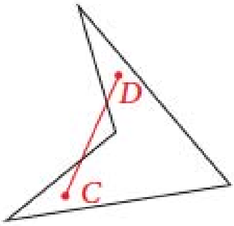
Обавештавамо вас да ћемо се у овој области упознати са особинама четвороугла које ће нам бити значајне у даљем школовању, као и у свакодневном животу.

6.1. Основни елементи четвороугла

Подсетимо се: Четвороугао је унија свих тачака четвороугаоне линије и њене унутрашње области. Четвороугао може бити конвексан и неконвексан.



конвексан



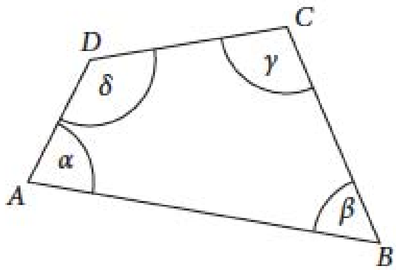
неконвексан

У конвексном четвороуглу, када спојимо било које две тачке, дуж припада том четвороуглу.

У неконвексном четвороуглу можемо изабрати две тачке тако да дуж једним делом „излази" ван четвороугла (дуж CD на слици).

Ми ћемо се бавити искључиво конвексним четвороугловима.

Сада ћемо се упознати са основним елементима четвороугла.



На слици је конвексан четвороугао $ABCD$. Тачке A, B, C и D су темена четвороугла. Дужи AB, BC, CD и DA су **странице** четвороугла. Странице можемо обележавати и малим латиничним словима, али не постоје уобичајена правила за обележавање као што су била код троугла, тако да код четвроугла обележавамо углавном темена.

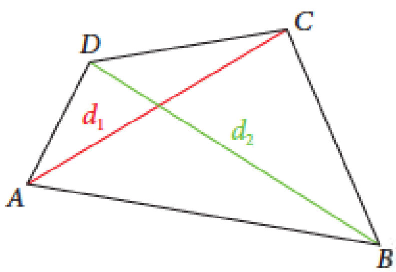
Унутрашњи углови четвороугла су $\measuredangle DAB$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$ и $\measuredangle CDA$. Уобичајено је да се за њихово обележавање користе мала слова грчког алфабета, па је $\measuredangle DAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCD = \gamma$ и $\measuredangle CDA = \delta$. Такође, углове можемо означавати и користећи темена $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$, $\measuredangle C = \gamma$, $\measuredangle D = \delta$.

Темена која су крајеви једне странице су **суседна.** Ако нису суседна, темена су **наспрамна.** Нпр. A и B су суседна, а A и C наспрамна темена.

Странице које имају заједничко теме су **суседне.** Ако нису суседне, странице су **наспрамне.** Нпр. странице AB и BC су суседне, а BC и DA су наспрамне.

Сигурно сте много пута уживали гледајући Новака Ђоковића како форхенд и бекхенд **дијагоналама** осваја битне поене.

> Дуж која спаја два наспрамна темена четвороугла је **дијагонала.** Четвороугао има две дијагонале: AC и BD. Често се за дијагонале користе ознаке d_1 и d_2.



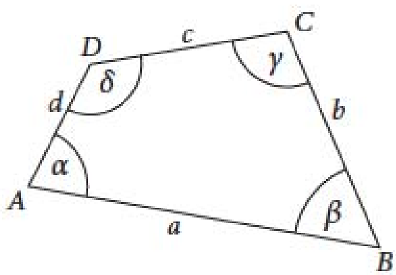
Унутрашњи углови су **суседни,** ако су њихова темена суседне тачке. У противном, углови су **наспрамни.**

Нпр. β и γ су суседни, а β и δ наспрамни углови.

Сада имамо потпуну слику четвороугла $ABCD$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

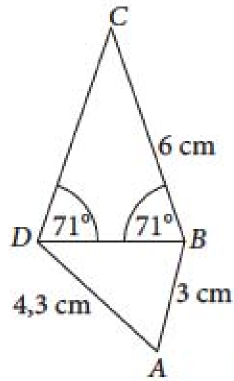
> Основни елементи сваког четвороугла су странице и унутрашњи углови.



Обим четвороугла

Обим четвороугла је збир дужина његових страница, тј. $O = a + b + c + d$.

ПРИМЕР 1. Израчунај обим четвороугла $ABCD$ на слици.



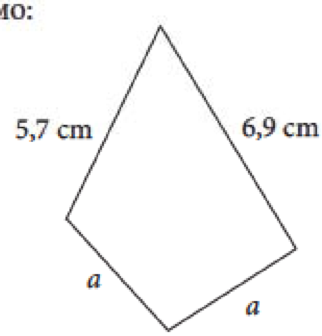
РЕШЕЊЕ ΔDBC је једнакокраки, па је $DC = 6$ cm.

Сада имамо: $O = AB + BC + CD + DA$

$$O = 3\text{ cm} + 6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 4{,}3\text{ cm}$$

$$O = 19{,}3\text{ cm}.$$

ПРИМЕР 2. Обим четвороугла је 18 cm. Две странице су 5,7 cm и 6,9 cm, а преостале две странице су једнаке. Одреди дужину непознате странице.



РЕШЕЊЕ Ако дужину непознате странице означимо са a, имамо:

$$O = a + a + 5{,}7\text{ cm} + 6{,}9\text{ cm}$$

$$18\text{ cm} = 2a + 12{,}6\text{ cm}$$

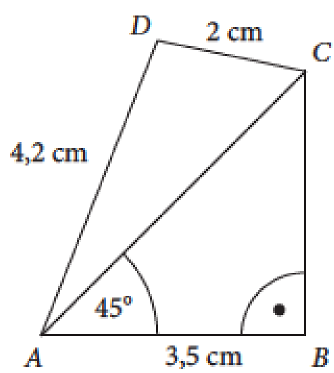
$$2a = 18\text{ cm} - 12{,}6\text{ cm}$$

$$2a = 5{,}4\text{ cm}$$

$$a = 5{,}4\text{ cm} : 2$$

$$a = 2{,}7\text{ cm}.$$

ПРИМЕР 3. Израчунај обим четвороугла $ABCD$ на слици.



РЕШЕЊЕ Посматрамо ΔABC и закључујемо да је $\measuredangle BCA = 45°$. Јасно је да је ΔABC једнакокраки, па је $BC = 3{,}5$ cm. Сада је обим четвороугла $ABCD$ једнак збиру његових страница.

$$O = 3{,}5\text{ cm} + 3{,}5\text{ cm} + 2\text{ cm} + 4{,}2\text{ cm}$$

$$O = 13{,}2\text{ cm}$$

ЗАДАЦИ

1. Обим четвороугла је 20 cm, а све његове странице су једнаке. Колика је дужина једне странице тог четвороугла?

2. Обим четвороугла *ABCD* је 26 cm. Одреди странице тог четвороугла ако су дужине његових страница у центиметрима 4 узастопна природна броја.

*3. Обим четвороугла је 180 cm. Одреди дужине страница a, b, c и d тог четвороугла ако важе пропорције $a : b = 3 : 4$, $a : c = 3 : 5$ и $a : d = 3 : 6$.

4. Странице троугла *ABC* имају дужине: $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm и $CA = 7$ cm. Колики је обим четвороугла који се добија када се два троугла подударна троуглу *ABC* саставе тако да имају једну заједничку страницу?

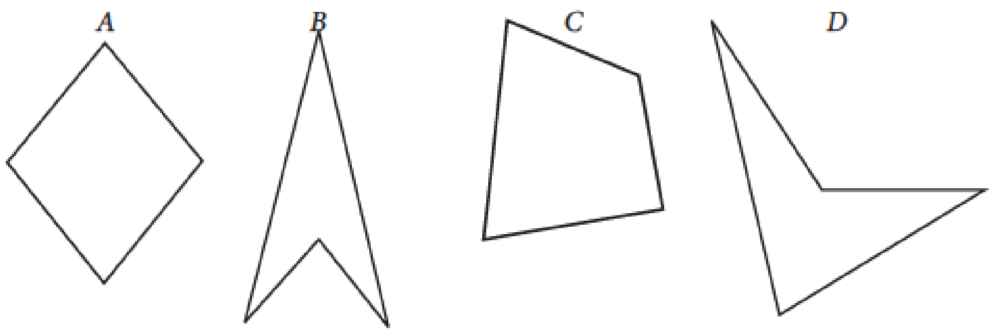
5. Четвороуглови *ABCD* и *MNPQ* имају једнаке странице. Да ли су они подударни?

6. Постоје ли бар три неподударна четвороугла чије су странице 4 cm, 5 cm, 6 cm и 7 cm?

7. Нацртај један неконвексан четвороугао *MNPQ*, а затим објасни како добити конвексан четвороугао *ABCD* чије су странице једнаке страницама четвороугла *MNPQ*.

8. Израчунај обим четвороугла *MNPQ*, ако је $MN = 6$ cm, $NQ = 10$ cm, $QM = 8$ cm и ако је $\measuredangle NPQ = \measuredangle PQN = 60°$.

9. Дати су четвороуглови на следећој слици. Који су од њих конвексни, а који неконвексни?



10. Исеци од картона два подударна једнакокрако правоугла троугла чије катете имају дужину 8 cm. Постави их у раван стола тако да имају једну заједничку страницу и да се при томе добије квадрат. Колики је обим тог квадрата?

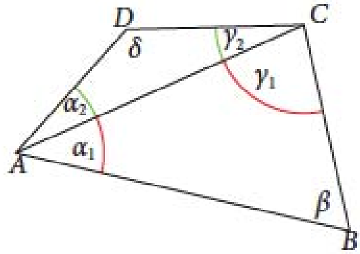
11. Исеци од картона два подударна правоугла троугла чије катете имају дужину 6 cm и 8 cm. Постави их у раван стола тако да имају заједничку хипотенузу и да се при томе добије четвороугао. Колики је обим тог четвороугла?

12. Постоји ли четвороугао чије су странице 2 cm, 3 cm, 4 cm и 8 cm?

13. Постоји ли конвексан четвороугао чије странице имају дужину 7 cm, 8 cm, 9 cm и 25 cm?

14. Постоји ли четвороугао *ABCD* такав да је $AB = BC = CD = DA = AC$?

6.2. Унутрашњи углови четвороугла



Од раније нам је познат правоугаоник. Његови унутрашњи углови су по 90°, па је збир унутрашњих углова био 360°. Исто то важи и за квадрат. Да ли то важи за било који четвороугао? Брзо ћемо отклонити сваку сумњу.

Дијагоналом AC поделили смо четвороугао на два троугла. Видимо да је:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ и } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

У ΔABC је $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°$, а у ΔACD је $\alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180°$.

Сабраћемо ове две једнакости:

$$(\alpha_1 + \beta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2 + \delta) = 180° + 180°$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + \delta = 360°$$

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.}$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Збир унутрашњих углова четвороугла је 360°.

ПРИМЕР 1. У четвороуглу $ABCD$ дати су унутрашњи углови $\alpha = 86°$, $\beta = 44°$ и $\gamma = 125°$. Одреди величину четвртог унутрашњег угла тог четвороугла.

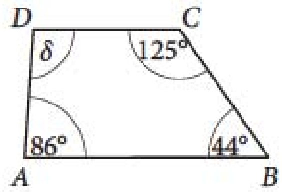
РЕШЕЊЕ Пошто је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$,

то значи да је: $\delta = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$

$\delta = 360° - (86° + 44° + 125°)$

$\delta = 360° - 255°$

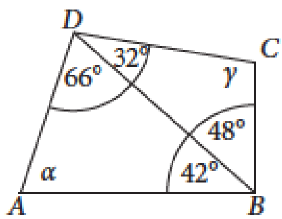
$\delta = 105°$.



ПРИМЕР 2. Дијагонала BD дели $\measuredangle ABC$ на углове од 42° и 48°, а $\measuredangle ADC$ на углове од 66° и 32°. Одреди унутрашње углове четвороугла $ABCD$.

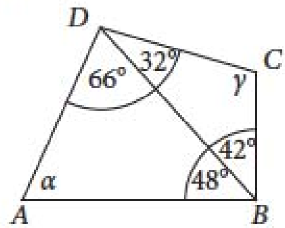
РЕШЕЊЕ Постоје два случаја.

Први случај.



Углови четвороугла су:
$\alpha = \measuredangle A = 72°$, $\measuredangle ABC = 90°$,
$\gamma = \measuredangle C = 100°$ и $\measuredangle ADC = 98°$.

Други случај.

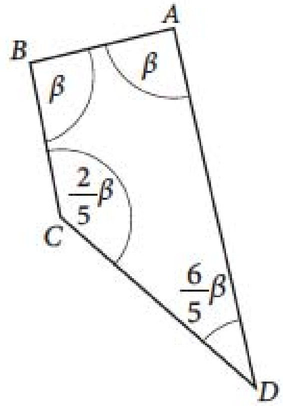


Углови четвороугла су:
$\alpha = \measuredangle A = 66°$, $\measuredangle ABC = 90°$,
$\gamma = \measuredangle C = 106°$ и $\measuredangle ADC = 98°$.

***ПРИМЕР 3.** Унутрашњи углови четвороугла задовољавају следеће пропорције:

$\alpha : \beta = 1 : 1; \quad \beta : \gamma = 5 : 2; \quad \alpha : \delta = 5 : 6.$

РЕШЕЊЕ



Из пропорције $\alpha : \beta = 1 : 1$ добијамо $\alpha = \beta$.

Из пропорције $\beta : \gamma = 5 : 2$ добијамо $\gamma = \frac{2}{5}\beta$.

Из пропорције $\alpha : \delta = 5 : 6$ добијамо $\delta = \frac{6}{5}\alpha = \frac{6}{5}\beta$.

Сада из једнакости

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

добијамо једначину

$$\beta + \beta + \frac{2}{5}\beta + \frac{6}{5}\beta = 360°.$$

Решење је: $\beta = 100°$.

Следи: $\alpha = \beta = 100°; \quad \gamma = \frac{2}{5}\beta = 40°; \quad \delta = \frac{6}{5}\beta = 120°.$

ЗАДАЦИ

15. Нацртај четвороугао $ABCD$ и запиши његове унутрашње углове помоћу:
а) њихових темена и кракова; б) њихових темена; в) почетних слова грчког алфабета.

16. У четвороуглу $ABCD$ дати су унутрашњи углови $\alpha = 56°$, $\beta = 72°$ и $\gamma = 123°$. Одреди угао δ.

17. У четвороуглу $MNPQ$ три унутрашња угла су 70°, 80° и 90°. Колики је четврти унутрашњи угао четвороугла?

18. У четвороуглу $ABCD$ три унутрашња угла су једнака 75°. Израчунај четврти унутрашњи угао у том четвороуглу.

19. Унутрашни углови четвороугла се разликују за 20°. Одреди збир најмањег и највећег унутрашњег угла четвороугла.

20. У четвороуглу $MNPQ$, $\measuredangle MNP = 108°$ и $\measuredangle PQM = 132°$. Израчунај остале унутрашње углове у том четвороуглу, ако је дијагонала NQ симетрала оба дата угла.

***21.** Унутрашњи углови четвороугла задовољавају три пропорције: $\alpha : \beta = 3 : 4$; $\beta : \gamma = 4 : 5$ и $\gamma : \delta = 5 : 6$. Одреди разлику између највећег и најмањег угла четвороугла.

22. Одреди унутрашње углове четвороугла, ако је: $\alpha = 2\beta$, затим $\beta = \gamma - 20°$ и $\delta = \alpha - 20°$.

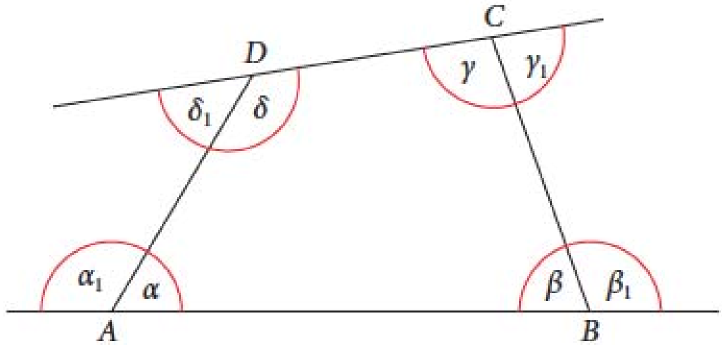
23. Исеци од картона три подударна једнакостранична троугла. Постави их у раван стола тако да се при том добије четвороугао. Одреди углове тог четвороугла.

24. У четвороуглу $ABCD$ је $AB = BC$, $CD = DA$, $\measuredangle ABC = 30°$ и $\measuredangle CDA = 70°$. Одреди унутрашње углове четвороугла $ABCD$.

6.3. Спољашњи углови четвороугла

Бавили смо се спољашњим угловима троугла, па ћемо и код четвороугла.

Спољашњи угао четвороугла упоредан је одговарајућем унутрашњем углу.



Према ознакама на претходној слици, важе следеће једнакости:

$$\alpha + \alpha_1 = 180°, \qquad \beta + \beta_1 = 180°, \qquad \gamma + \gamma_1 = 180°, \qquad \delta + \delta_1 = 180°.$$

Очигледно је: $(\alpha + \alpha_1) + (\beta + \beta_1) + (\gamma + \gamma_1) + (\delta + \delta_1) = 180° + 180° + 180° + 180°$

$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 + \delta + \delta_1 = 720°.$$

Групишимо унутрашње и спољашње углове четвороугла.

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 720°$$

$$360° + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 720°$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 720° - 360°$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360°}$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Збир спољашњих углова четвороугла је 360°.

ПРИМЕР 1. Израчунај све углове четвороугла $ABCD$, ако је $\alpha = 88°$, $\beta = 77°$, $\gamma_1 = 133°$.

РЕШЕЊЕ

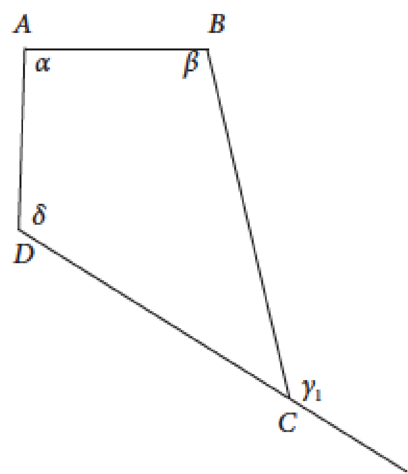
$\alpha_1 = 180° - \alpha = 180° - 88° = 92°$

$\beta_1 = 180° - \beta = 180° - 77° = 103°$

$\gamma = 180° - \gamma_1 = 180° - 133° = 47°$

$\delta = 360° - (\alpha + \beta + \gamma) = 360° - 212° = 148°$

$\delta_1 = 180° - \delta = 32°$



ПРИМЕР 2. Одреди све углове четвороугла ако су два унутрашња угла 59° и 113°, а друга два су једнака.

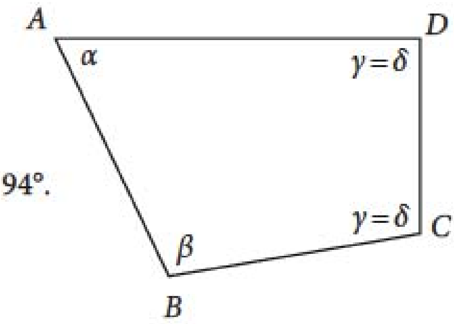
РЕШЕЊЕ Нека је $\alpha = 59°$, $\beta = 113°$, $\gamma = \delta$.

Сада је: $59° + 113° + 2\delta = 360°$

$$2\delta = 360° - 172°$$

$$2\delta = 188°$$

$$\delta = 94°, \text{ па је и } \gamma = 94°.$$



Спољашњи углови су:

$\alpha_1 = 180° - 59° = 121°$

$\beta_1 = 180° - 113° = 67°$

$\gamma_1 = 180° - 94° = 86°$

$\delta_1 = 86°$.

ЗАДАЦИ

25. Нацртај четвороугао $ABCD$ и напиши његове спољашње углове α_1, β_1, γ_1 и δ_1 помоћу њихових темена и кракова.

26. У четвороуглу $ABCD$ дати су унутрашњи углови $\alpha = 65°$, $\beta = 52°$ и $\gamma = 114°$. Одреди спољашње углове датог четвороугла.

27. У четвороуглу $MNPQ$ три спољашња угла су 100°, 110° и 120°. Израчунај унутрашње углове тог четвороугла.

28. У четвороуглу $ABCD$ три спољашња угла су једнака 99°. Израчунај унутрашње углове датог четвороугла.

29. Спољашњи углови четвороугла се разликују за 16°. Одреди збир најмањег и највећег унутрашњег угла четвороугла.

***30.** Спољашњи углови четвороугла задовољавају три пропорције: $\alpha_1 : \beta_1 = 6 : 7$; $\beta_1 : \gamma_1 = 7 : 8$; $\gamma_1 : \delta_1 = 8 : 9$. Одреди разлику између највећег и најмањег унутрашњег угла четвороугла.

31. Спољашњи углови у четвороуглу $ABCD$ су $\alpha_1 = 85°$ и $\beta_1 = 95°$, а унутрашњи угао $\gamma = 70°$. Израчунај све унутрашње и спољашње углове тог четвороугла.

32. У четвороуглу $ABCD$ дати су унутрашњи углови $\alpha = 56°$ и $\beta = 72°$ и спољашњи угао $\gamma_1 = 123°$. Одреди унутрашње углове γ и δ и спољашње углове α_1, β_1 и γ_1.

33. Докажи да је збир унутрашњих углова четвороугла $ABCD$ једнак збиру спољашњих углова тог четвороугла.

34. Постоји ли четвороугао код кога су сви унутрашњи и сви спољашњи углови једнаки?

***35.** Унутрашњи углови четвороугла задовољавају три пропорције: $\alpha : \beta = 2 : 3$; $\beta : \gamma = 3 : 4$; $\gamma : \delta = 4 : 6$. Одреди следеће размере спољашњих углова: $\alpha_1 : \beta_1$, $\beta_1, : \gamma_1$ и $\gamma_1 : \delta_1$.

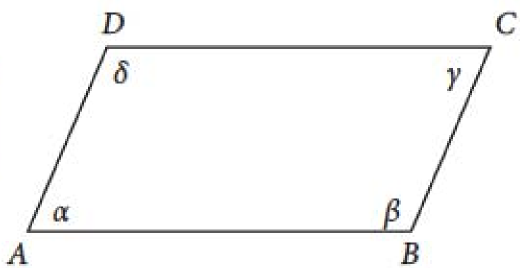
6.4. Паралелограм

Подсетимо се: На слици су углови са паралелним крацима (краци једног угла паралелни су одговарајућим крацима другог угла).

На слици лево α и β су оштри углови, па је $\alpha = \beta$.

На слици десно, γ је оштар угао, а δ туп, па су они суплементни $\gamma + \delta = 180°$.

Паралелограм је четвороугао чије наспрамне странице су паралелне.



Паралелне странице обележавамо симболом „||”. Тако су странице AB и CD паралелне што обележавамо $AB||CD$. Такође $BC||DA$.

Сада ћемо извести битна својства паралелограма.

1. **Наспрамни углови паралелограма су једнаки** ($\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$).
2. **Суседни углови паралелограма су суплементни** (нпр. $\alpha + \beta = 180°$).

Ова два својства су јасна због дефиниције паралелограма и особина углова са паралелним крацима. Код четвороугла морали смо знати 3 унутрашња угла, да бисмо могли израчунати преостали угао. Како је то код паралелограма?

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Довољно је знати један унутрашњи угао паралелограма да бисмо могли израчунати све преостале.

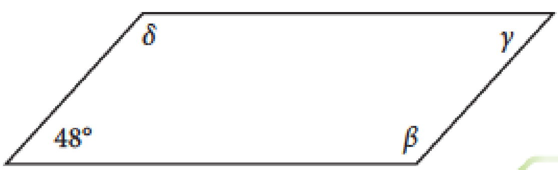
ПРИМЕР 1. Унутрашњи угао паралелограма је 48°. Одреди остале унутрашње углове.

РЕШЕЊЕ Нека је $\alpha = 48°$. Тада је и $\gamma = 48°$.

$\alpha + \beta = 180°$,

па је $\beta = 180° - 48° = 132°$.

Јасно је и да је $\delta = 132°$.

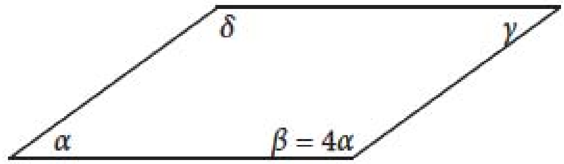


ПРИМЕР 2. Један унутрашњи угао паралелограма је четири пута мањи од другог. Одреди све унутрашње углове.

РЕШЕЊЕ Јасно је да то морају бити суседни углови. Угао α је четири пута мањи од β, али због лакшег рачунања узимамо да је β четири пута већи од α, тј. $\beta = 4\alpha$.

Сада имамо $\alpha + \beta = 180°$

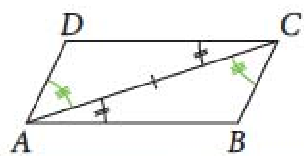
$$\alpha + 4\alpha = 180°$$
$$5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 180° : 5$$
$$\alpha = 36°.$$



Следи: $\alpha = \gamma = 36°$, $\beta = \delta = 144°$.

3. Наспрамне странице паралелограма су једнаке.

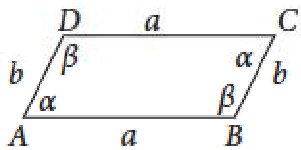
Из доказа на десној страни имамо да су ΔABC и ΔCDA подударни. Одатле следи: $\boldsymbol{AB = CD}$ **и** $\boldsymbol{BC = DA}$.



1. $AC = CA$ (заједничка страница)
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ (наизменични углови)
3. $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (наизменични углови)

(УСУ)
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta CDA$

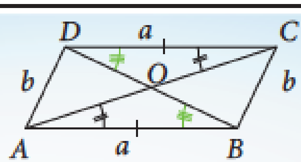
Сада имамо потпуну слику паралелограма $ABCD$.



4. Дијагонале паралелограма се полове (секу једна другу у средишту).

Ако се дијагонале AC и BD секу у тачки O, треба доказати да је $AO = CO$ и $BO = DO$.

Из подударности ΔABO и ΔCDO (види десно) следи да је $\boldsymbol{AO = CO}$ и $\boldsymbol{BO = DO}$.



1. $AB = CD$ (наспрамне странице паралелограма)
2. $\measuredangle BAO = \measuredangle DCO$ (наизменични углови)
3. $\measuredangle OBA = \measuredangle ODC$ (наизменични углови)

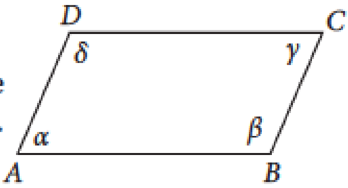
(УСУ)
$\Rightarrow \Delta ABO \cong \Delta CDO$

Ако бисмо паралелограм $ABCD$ пресликавали централном симетријом у односу на тачку O, тачка A би се пресликала у тачку C, тачка B у D, тачка C у A, а тачка D у B. Темена би променила своја места, али се паралелограм не би „померио".

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Паралелограм је централносиметрична фигура.
Центар симетрије је пресечна тачка дијагонала.

Поред исказаних својстава паралелограма, можемо показати да важе и обрнута тврђења. То су **услови да четвороугао буде паралелограм.**



I **Ако су свака два суседна угла четвороугла суплементна, онда је тај четвороугао паралелограм.**

Ако је $\alpha + \beta = 180°$, а углови α и β имају један заједнички крак, мора бити $\boldsymbol{AD \parallel BC}$. Слично, из $\beta + \gamma = 180°$ следи $\boldsymbol{AB \parallel CD}$, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

II **Ако су свака два наспрамна угла четвороугла једнака, онда је тај четвороугао паралелограм.**

Ако је $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, онда је $2\alpha + 2\beta = 360°$, тј. $\alpha + \beta = 180°$. Слично је и $\beta + \gamma = 180°$, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм (на основу I) .

III **Ако су сваке две наспрамне странице четвороугла једнаке, онда је тај четвороугао паралелограм.**

Доказ иде супротним смером од доказа 3. својства паралелограма. Прво докажемо да је $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ССС). Одатле је $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ и $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$, па су наспрамне странице паралелне.

IV **Ако се дијагонале четвороугла полове, онда је тај четвороугао паралелограм.**

Доказ иде супротним смером од доказа 4. својства паралелограма. Прво докажемо да је $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ (СУС). Одатле је $AB = CD$. Слично, из подударности ΔBCO и ΔDAO следи $BC = DA$. Пошто су наспрамне странице једнаке, то је паралелограм (на основу III).

Можемо показати да важи још један услов да четвороугао буде паралелограм.

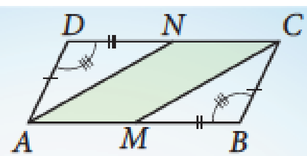
V **Ако су две наспрамне странице четвороугла паралелне и једнаке, онда је тај четвороугао паралелограм.**

Нека су у четвороуглу $ABCD$ странице AB и CD паралелне и једнаке. Потпуно исто као код 4. својства паралелограма, долазимо до тога да је $AO = CO$ и $BO = DO$. То значи да се дијагонале четвороугла $ABCD$ полове, па је он паралелограм (на основу IV).

***ПРИМЕР 3.** Дат је паралелограм $ABCD$. Тачке M и N су, редом, средишта страница AB и CD. Докажи да је четвороугао $AMCN$ паралелограм.

РЕШЕЊЕ Из подударности ΔNDA и ΔMBC следи да је $NA = MC$. Такође, $AM = CN$ (као половине наспрамних страница паралелограма).

Пошто су наспрамне странице четвороугла $AMCN$ једнаке, то значи да је он паралелограм, што је и требало доказати.



1. $AD = CB$ (наспрамне странице паралелограма)
2. $DN = BM$ (половине наспрамних страница паралелограма)
3. $\measuredangle ADN = \measuredangle CBM$ (наспрамни углови паралелограма)

(СУС)
$\Rightarrow \Delta NDA \cong \Delta MBC$

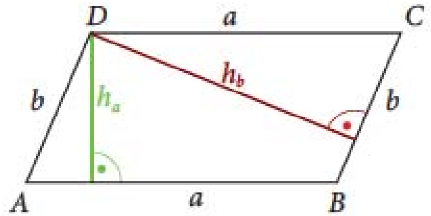
Слично као код троугла, и овде истичемо висину, као битан елемент код рачунања површине.

Висина паралелограма је дуж чија једна крајња тачка је теме паралелограма, а друга је подножје нормале из тог темена на праву која садржи наспрамну страницу.

У пракси је уобичајено да кад кажемо висина мислимо на дужину те дужи. Паралелограм има две висине из једног темена.

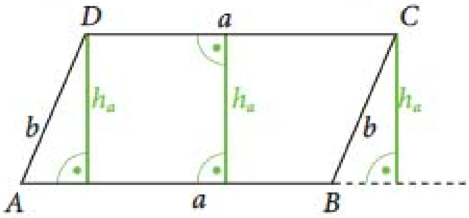
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Висина паралелограма је најкраће растојање између наспрамних страница.



На слици су обележене висине h_a и h_b из темена D.

Пошто је висина растојање између две паралелне странице, јасно је да су висине из темена C и D на праву која садржи страницу AB једнаке. У пракси се и нормала спуштена из било које тачке странице CD на праву која садржи наспрамну страницу AB може сматрати висином.



ПРИМЕР 4. Висине конструисане из темена једног од тупих углова паралелограма граде угао од 65°. Одреди унутрашње углове тог паралелограма.

РЕШЕЊЕ Из темена D повучене су висине DE и DF, а $\measuredangle EDF = 65°$. Посматрајмо четвороугао $EBFD$. Имамо да је $\beta = 360° - (65° + 2 \cdot 90°)$.

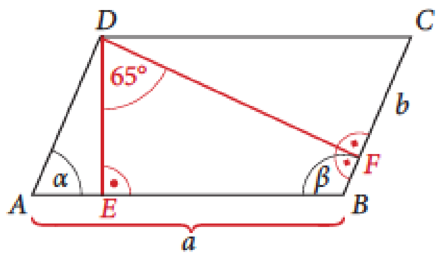
$\beta = 360° - 245°$

$\beta = 115°$.

Сада је лако одредити остале углове паралелограма.

$\beta = 115°$

$\alpha = 180° - \beta = 65°$



ЗАДАЦИ

36. Израчунај све углове паралелограма $ABCD$, ако је: а) $\alpha = 63°$; б) $\delta = 123°$.

37. Одреди углове паралелограма, ако је збир два његова угла једнак: а) 220°; б) 142°.

38. Израчунај углове паралелограма, ако је разлика два његова угла једнака: а) 54°; б) 118°.

39. Одреди углове паралелограма, ако је један од њих три пута већи од другог.

40. Израчунај углове паралелограма, ако је један од њих једнак половини другог.

41. У паралелограму $ABCD$ дијагонала AC је симетрала $\measuredangle BAD$. Одреди углове паралелограма, ако је $\measuredangle BAC = 33°$.

42. Израчунај углове паралелограма $MNPQ$, ако се његове дијагонале секу под правим углом, а $\measuredangle MNQ = 36°$.

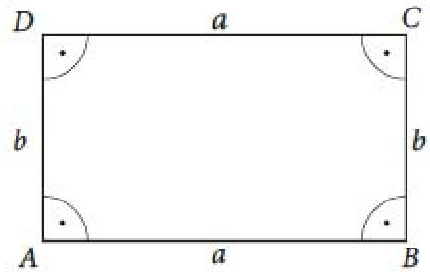
6.5. Врсте паралелограма

Посебне врсте паралелограма су правоугаоник, квадрат и ромб. Поред већ поменутих својстава паралелограма, свака од ових фигура има и неке своје специфичне особине.

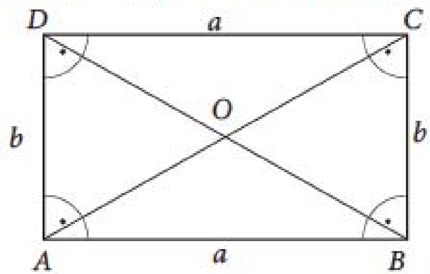
Правоугаоник

Облици правоугаоника су свуда око нас: свеска у којој пишемо, мобилни телефон који превише користимо, кошаркашки терен... Упознајмо се са особинама правоугаоника.

Правоугаоник је паралелограм чији углови су прави.



Знамо да се дијагонале полове, а да ли су једнаке? Доказаћемо подударност ΔABC и ΔBAD.



1. $AB = BA$
2. $BC = AD$ (наспрамне странице)
3. $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$ (90°)

СУС
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta BAD$

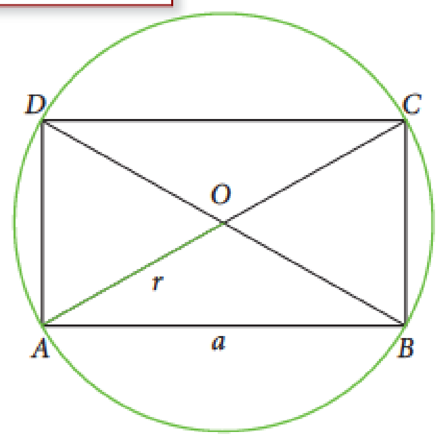
Следи $AC = BD$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Дијагонале правоугаоника су међусобно једнаке.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Око правоугаоника се може описати кружница.

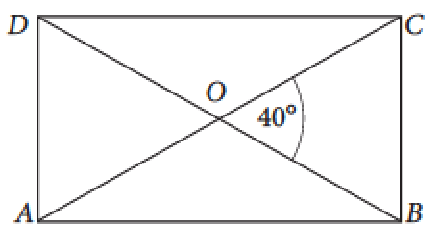


Пошто су дијагонале једнаке, а полове се, мора бити $OA = OB = OC = OD$, па постоји кружница која садржи сва темена правоугаоника. Њен центар O је пресек дијагонала, а полупречник r је половина дијагонале.

ПРИМЕР 1. Дијагонале правоугаоника $ABCD$ образују угао од 40°. Колики угао заклапа дијагонала AC са дужом страницом правоугаоника?

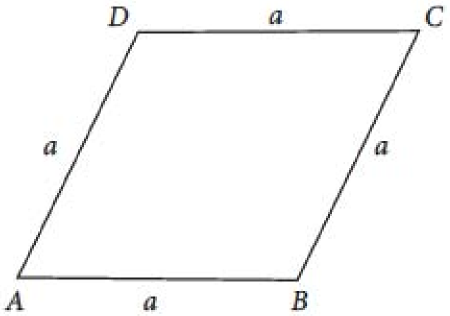
РЕШЕЊЕ ΔBCO је једнакокраки, па је $\measuredangle OBC = \measuredangle BCO = 70°$.

Сада посматрамо правоугли ΔABC, па је тражени $\measuredangle BAC = 20°$.



Ромб

Некада су били модерни џемпери са дезеном на коме су представљени ромбови.

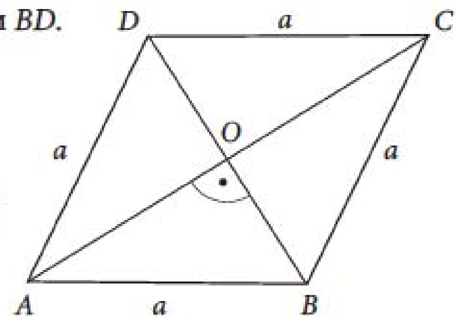


Ромб је паралелограм чије странице су једнаке.

Пошто је $AB = AD$, следи да A припада симетрали дужи BD.

Такође $CB = CD$, па и C припада симетрали дужи BD.

Дакле, AC је симетрала дужи BD.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Дијагонале ромба секу се под правим углом.

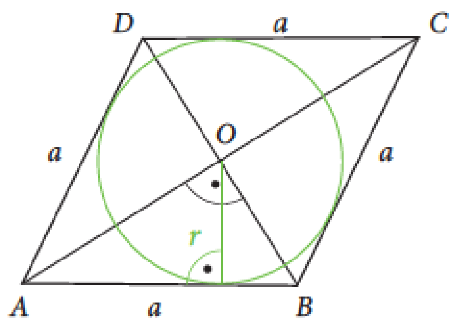
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Дијагонале ромба полове унутрашње углове (дијагонале су симетрале углова ромба).

Јасно је да је $\Delta ABO \cong \Delta ADO$ по ставу СУС ($AO = AO$, $\measuredangle BOA = \measuredangle DOA$, $BO = DO$),

па је одатле и $\boldsymbol{\measuredangle BAO = \measuredangle DAO}$.

Дакле, тачка O је једнако удаљена од страница ромба, па постоји кружница која додирује све странице ромба.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

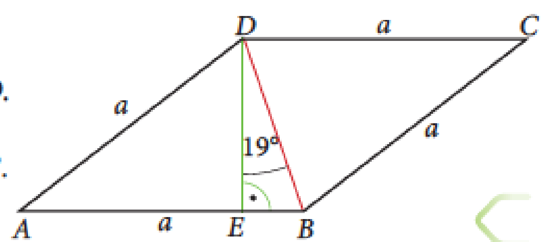
У ромб се може уписати кружница.

Центар уписане кружнице је пресек дијагонала, а полупречник је половина висине.

ПРИМЕР 2. Висина и дијагонала ромба, повучене из истог темена, граде угао од 19°. Одреди унутрашње углове ромба.

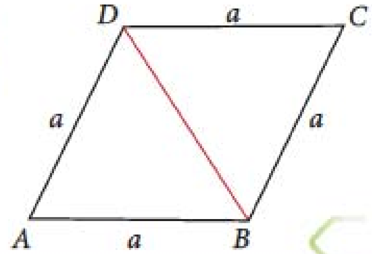
РЕШЕЊЕ Посматрамо правоугли ΔEBD.

$\measuredangle EBD = 71°$. Пошто је BD симетрала угла β, закључујемо да је $\beta = 2 \cdot \measuredangle EBD$. Сада лако одређујемо остале углове ромба. Дакле, $\alpha = \gamma = 38°$, $\beta = \delta = 142°$.



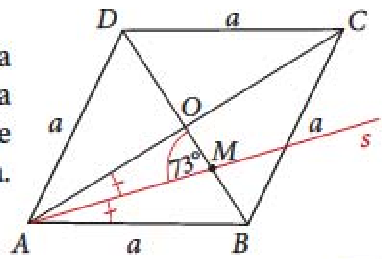
ПРИМЕР 3. Одреди унутрашње углове ромба ако је краћа дијагонала једнака страници.

РЕШЕЊЕ Пошто је дијагонала BD једнака страници ромба, закључујемо да је ΔABD једнакостранични, па су му углови по 60°. Дакле, ромб има два угла по 60° и два угла по 120°.



ПРИМЕР 4. Одреди унутрашње углове ромба $ABCD$ ако симетрала $\measuredangle BAC$ сече дијагоналу BD под углом од 73°.

РЕШЕЊЕ Конструисали смо симетралу $\measuredangle BAC$ и њен пресек са BD је тачка M. Тада је $\measuredangle AMO = 73°$.



Посматрајмо ΔAMO. Јасно је да је $\measuredangle OAM = 17°$, па је $\measuredangle BAO = 34°$ (због симетрале). Пошто дијагонала AC дели угао α на два једнака дела, закључујемо да је $\alpha = 68°$. Сада је лако одредити и остале углове ромба.

$\alpha = \gamma = 68°$

$\beta = \delta = 112°$

ОРИГАМИ – квадрат, правоугаоник, троугао

Оригами је вештина савијања листа папира да би се добио жељени облик. Ова вештина води порекло са Далеког истока. Назив је настао од јапанске речи „ори", што значи – савити и јапанске речи „ками" која значи – папир.

Не може се тачно одредити када је ова вештина настала, али је јасно да не може бити старија од две хиљаде година, јер је тада човек изумео папир.

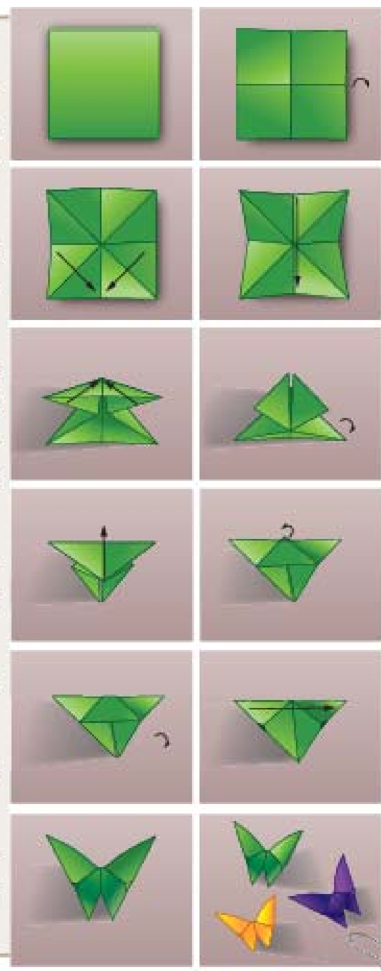
Иако има јапанско име, многи сматрају да је оригами потекао из Кине. Најстарија књига, која садржи упутства за израду предмета који личе на оригами, настала је у 17. веку. Најстарија књига о оригамију „Тајна техника савијања хиљаду ждралова" написана је 1797. године.

Немац Фредерик Вилхелм Фребел (1782–1852), који је осмислио боравак деце у вртићима и предшколским установама, је први увео учење европске деце предшколског узраста овој вештини.

Погледај како се од квадратног, преко троугластог облика, папир обликује у лептира.

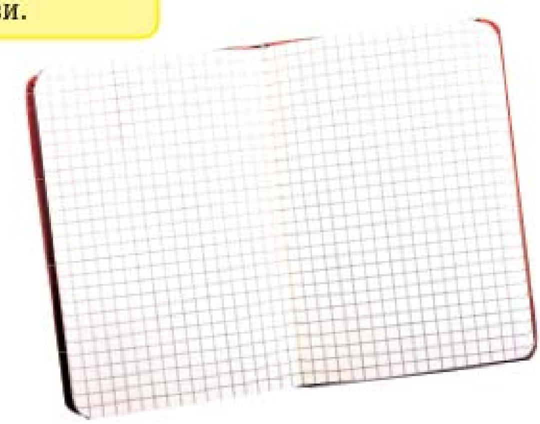
Од краја Другог светског рата оригами је почео да се шири из Јапана по целом свету.

Један од најпознатијих оригами уметника је Американац Џонатан Бакстер. Он је направио низ огромних костура диносауруса у САД-у. У пуној величини достижу 30 метара!



Квадрат

Квадрат је паралелограм чије странице су међусобно једнаке, а углови су прави.

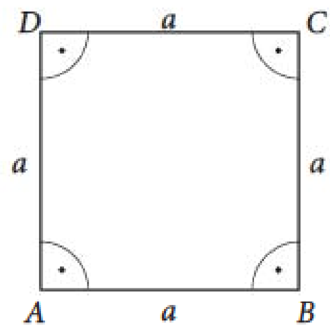


Можемо рећи и овако: квадрат је правоугаоник чије странице су једнаке. Сигурно пишеш у свесци на квадрате и можеш се уверити у ову тврдњу.

Или овако: квадрат је ромб чији углови су једнаки.

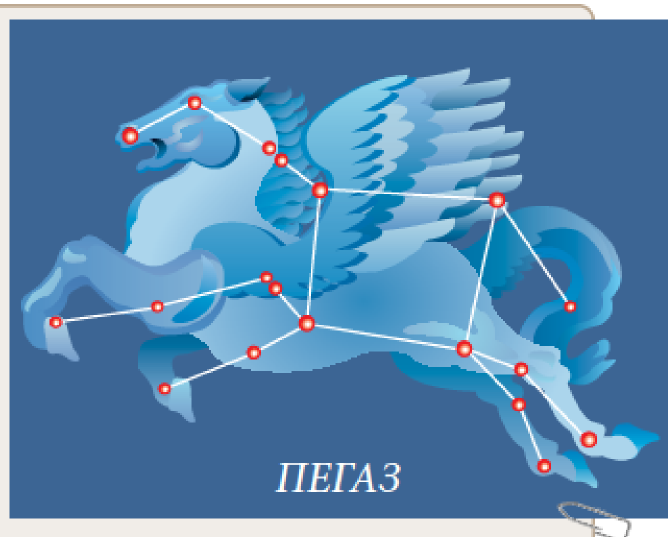
Свакако, квадрат има сва својства правоугаоника и сва својства ромба.

Особине квадрата:
- Све странице су једнаке.
- Сваки угао је прав.
- Дијагонале су једнаке.
- Дијагонале се секу под правим углом.
- Дијагонале су симетрале углова.
- Око квадрата се може описати кружница.
- У квадрат се може уписати кружница.



Као што је скуп звезда **Летњи троугао** обележје летњег неба, тако је **Велики Пегазов четвороугао** обележје јесењег неба. Познато ти је из грчке митологије да је Медузу убио Персеј, одсекавши јој главу. Из крви Медузине главе родио се крилати коњ Пегаз. Зауздао га је краљ Белерофонт и уз помоћ Пегаза је убио Химеру, чудовиште с главом лава, телом козе и репом змаја.

Сазвежђе Пегаз у себи садржи велики четвороугао (види слику). Појављује се изван центра Млечног пута, на северном небу, током јесени. Главна звезда Пегаза је Маркаб, што у преводу с арапског значи – седло. Плавичаста звезда (Algenib) смештена је на Пегазовом крилу и њен назив потиче од арапске речи која значи – крило. Најсветлија звезда се назива Ениф, а звезда Бета Пег налази се на Пегазовој нози.



ЗАДАЦИ

43. Којој врсти паралелограма припада четвороугао $ABCD$ чије странице имају дужину $AB = CD = 5$ cm и $BC = AD = 3$ cm, а бар један угао је прав?

44. Којој врсти паралелограма припада четвороугао $MNPQ$ чије странице имају дужину $MN = NP = PQ = QM = 7$ cm?

45. У четвороуглу $ABCD$, дато је: $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 120°$. Да ли је четвороугао $ABCD$ паралелограм?

46. У четвороуглу $MNPQ$ је $\measuredangle MNP + \measuredangle NPQ = 180°$. Да ли је дати четвороугао паралелограм?

47. Допуни следећу таблицу тако што ћеш у празна поља уписати којој врсти паралелограма припада четвороугао који има одговарајуће особине.

Паралелограм	Сви углови су једнаки
Све странице су једнаке	
Све странице нису једнаке	

48. Дате су две дужи једнаких дужина AB и CD такве да је $ABCD$ конвексан четвороугао. Да ли је четвороугао $ABCD$ паралелограм?

49. Нацртај две паралелне праве p и q. На правој p изабери тачке A и B, а на правој q тачке C и D тако да граде четвороугао $ABCD$. Да ли је $ABCD$ паралелограм?

50. Како се назива једнакостранични, правоугли паралелограм?

51. Како се назива паралелограм чије су дијагонале нормалне, а унутрашњи углови нису прави?

52. Да ли је сваки правоугли паралелограм квадрат?

53. Да ли је сваки једнакостранични правоугаоник квадрат?

54. Колико оса симетрије има: а) квадрат; б) правоугаоник; в) ромб?

55. У равни су дате тачке A, B, C, D, E, такве да је E средиште дужи AB и E средиште дужи CD. Да ли је четвороугао $ACBD$ паралелограм?

56. Дата је кружница на којој су уочена два пречника AB и CD. Докажи да је четвороугао $ACBD$ правоугаоник.

57. Дат је правоугаоник $ABCD$. Средишта страница правоугаоника су тачке M, N, P и Q. Докажи да је четвороугао $MNPQ$ ромб.

58. Дат је квадрат $MNPQ$. Средишта страница квадрата су тачке A, B, C и D. Докажи да је четвороугао $ABCD$ такође квадрат.

59. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека су M, N, P и Q средишта страница AB, BC, CD и DA. Докажи да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

60. Дијагонале четвороугла $MNPQ$ су нормалне. Да ли је тај четвороугао ромб?

6.6. Конструкција паралелограма

Подсетимо се: За конструкцију троугла су нам потребна три елемента у различитим комбинацијама (СУС, УСУ, ССС, ССУ).

Поставља се питање колико елемената је потребно за конструкцију паралелограма. Знамо да дијагонала дели паралелограм на два подударна троугла, па ћемо конструкцију паралелограма сводити на конструкцију троугла. Наравно, елементи који су нам потребни не смеју да зависе један од другог. Нпр. сувишно је дати податке $AB = 6$ cm и $CD = 6$ cm (то су наспрамне странице, па знамо да су једнаке).

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За конструкцију паралелограма потребна су три независна елемента.

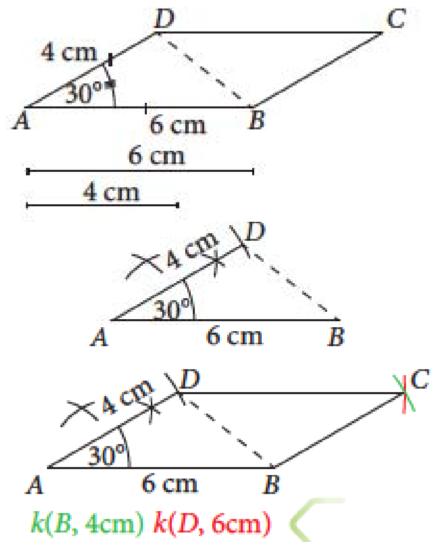
ПРИМЕР 1. Конструиши паралелограм $ABCD$, ако је $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm, $\alpha = 30°$.

РЕШЕЊЕ Слично као и код троугла, прво урадимо анализу.

Из особина паралелограма, знамо да је $CD = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $\gamma = 30°$, $\beta = \delta = 150°$.

Јасно је да можемо конструисати ΔABD (СУС). Прво нацртамо $AB = 6$ cm, па конструишемо угао од 30°. На другом краку угла одредимо D, тако да је $AD = 4$ cm.

Остаје нам још да одредимо тачку C. Пошто је $BC = 4$ cm и $DC = 6$ cm, најлакше је C наћи у пресеку $k(B, 4 \text{ cm})$ и $k(D, 6 \text{ cm})$.



ПРИМЕР 2. Конструиши паралелограм чија страница је 6 cm , а дијагонале 10 cm и 4 cm.

РЕШЕЊЕ Нека је $ABCD$ тражени паралелограм, коме је:

$AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm и $BD = 4$ cm.

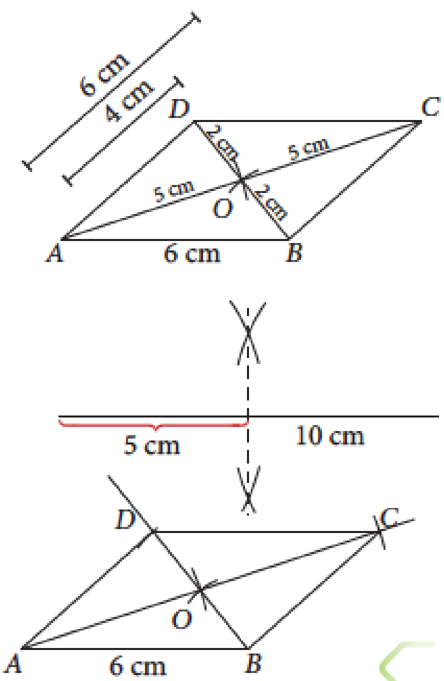
Дијагонале се полове, па знамо да је:

$AO = CO = 5$ cm и $BO = DO = 2$ cm.

Дакле, можемо конструисати ΔABO (ССС).

Половине дијагонала добијамо конструкцијама симетрала дужи. На слици је симетрала дужи дужине 10 cm.

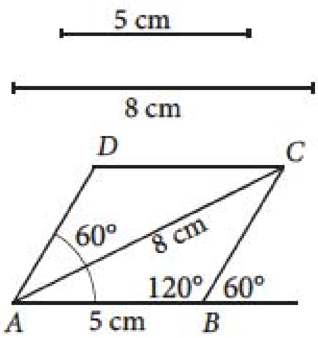
После конструкције ΔABO, тачке C и D се лако налазе на продужецима страница AO и BO.



ПРИМЕР 3. Конструиши паралелограм $ABCD$ ако је $AB = 5$ cm и $\measuredangle BAD = 60°$ тако да је:

а) дијагонала $AC = 8$ cm; б) дијагонала $BD = 8$ cm.

РЕШЕЊЕ



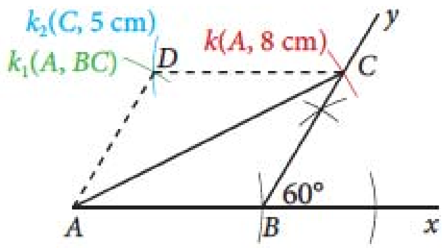
а) Нацртајмо полуправу Ax и на њој одредимо тачку B тако да је $AB = 5$ cm.

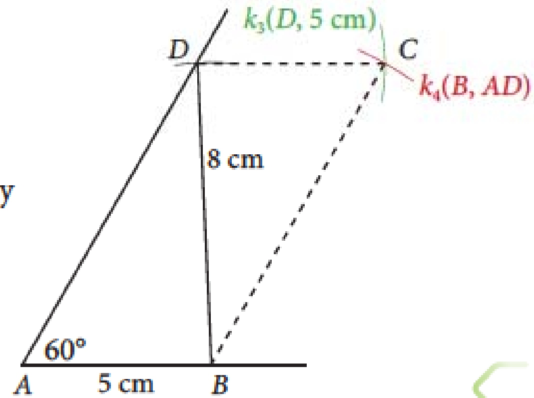
Конструишимо крак By тако да је $\measuredangle xBy = 60°$.

Теме C добијамо у пресеку кружнице $k(A, 8 \text{ cm})$ и крака By.

Напомена: Могли смо одмах конструисати ΔABC на основу података: $AB = 5$ cm, $\measuredangle ABC = 120°$ и $AC = 8$ cm (ССУ). Зашто?

Четврто теме D добијамо у пресеку кружница $k_1(A, BC)$ и $k_2(C, 5 \text{ cm})$.





б) Конструишимо прво ΔABD где је $AB = 5$ cm, $\measuredangle BAD = 60°$ и $BD = 8$ cm (ССУ).

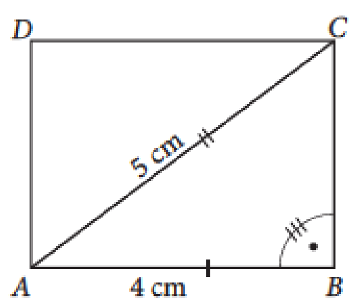
Четврто теме C добијамо у пресеку кружница $k_3(D, 5 \text{ cm})$ и $k_4(B, AD)$.

Правоугаоник и ромб имају неке специфичне особине па је за њихову конструкцију довољно знати мање елемената.

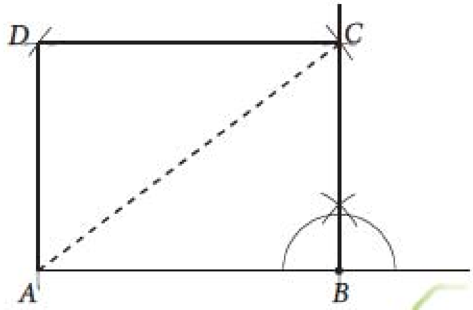
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За конструкцију правоугаоника и ромба потребна су два независна елемента.

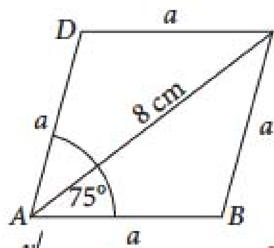
ПРИМЕР 4. Конструиши правоугаоник чија страница је 4 cm, а дијагонала 5 cm.



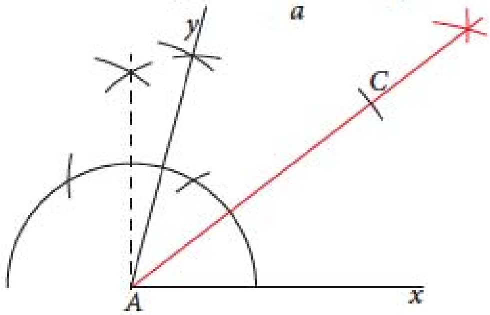
РЕШЕЊЕ У ΔABC имамо $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $\measuredangle B = 90°$, па га можемо конструисати (ССУ). Тачку D можемо одредити на више начина. Нпр. у пресеку кружнице са центром у A, полупречника дужине странице BC и кружнице са центром у B, полупречника 5 cm.

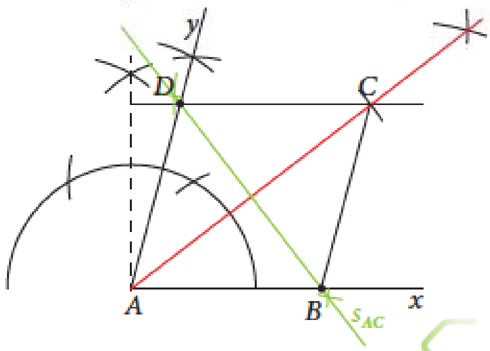


*ПРИМЕР 5. Конструиши ромб чија дужа дијагонала је 8 cm, а један угао 75°.



РЕШЕЊЕ На слици је ромб $ABCD$. Сетимо се да је дијагонала ромба уједно и симетрала угла. Конструишемо $\measuredangle xAy = 75°$ и на симетрали тог угла одредимо тачку C, тако да је $AC = 8$ cm. Тачке B и D се налазе редом на Ax и Ay. Знамо да су дијагонале ромба међусобно нормалне и да се полове. Довољно је да конструишемо симетралу дужи AC. Њен пресек са Ax и Ay даје тачке B и D.





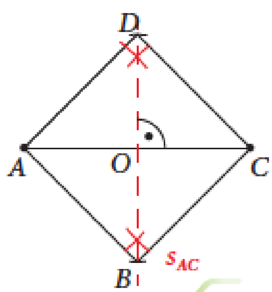
Већ смо рекли да је квадрат у себи спојио особине правоугаоника и ромба.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За конструкцију квадрата потребна је само једна дуж.

ПРИМЕР 6. Конструиши квадрат чија дијагонала је 7 cm.

РЕШЕЊЕ Знамо да се дијагонале квадрата полове, међусобно су нормалне и једнаке су дужине. Конструкцију крећемо од дијагонале $AC = 7$ cm. Затим конструишемо њену симетралу и на њој одредимо тачке B и D тако да је $OB = OD = OA = OC$ (тачка O је пресечна тачка дијагонала). На тај начин, добили смо тражени квадрат $ABCD$.



ЗАДАЦИ

61. Конструиши квадрат, ако је дужина његове: а) странице 3 cm; б) дијагонале 4 cm.

62. Конструиши правоугаоник чије странице имају дужине 5 cm и 3 cm.

63. Конструиши ромб ако његова страница има дужину 4 cm, а један његов угао је 45°.

64. Конструиши паралелограм чије странице имају дужину 3 cm и 5 cm, а један угао је 120°.

65. Конструиши паралелограм $MNPQ$, ако је $MN = 6$ cm, $MP = 7$ cm и $MQ = 4$ cm.

66. Конструиши ромб ако његове дијагонале имају дужину 4 cm и 7 cm.

67. Конструиши паралелограм ако његове странице имају дужине 4 cm и 6 cm, а један његов угао је 30°.

***68.** Конструиши паралелограм чија је страница 6 cm, дијагонала 8 cm и један угао једнак 45°.

69. Конструиши паралелограм чије дијагонале имају дужине 6 cm и 8 cm, ако се дијагонале паралелограма секу под углом од 60°.

70. Дате су тачке A, B и C. Конструиши паралелограм $ABCD$.

71. Дате су тачке A, B и O, при чему тачка O не припада правој AB. Конструиши паралелограм $ABCD$, ако су A и B темена, а O пресек дијагонала паралелограма.

72. Дате су тачке A и O. Конструиши квадрат $ABCD$, ако је A теме, а O пресек дијагонала квадрата.

73. Дате су тачке A, O и M. Конструиши правоугаоник $ABCD$ ако је A теме правоугаоника, O пресек дијагонала, а M тачка која припада правој на којој се налази страница BC правоугаоника.

74. Конструиши правоугаоник, ако је једна његова страница 8 cm, а полупречник кружнице описане око правоугаоника 5 cm.

75. У координатној xOy равни дате су тачке $A(2, 0)$, $B(6, 0)$. Одреди координате тачака C и D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде квадрат. Колико има решења?

76. У координатној xOy равни дате су тачке $A(5, 2)$, $B(5, -3)$, $C(1, -3)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде правоугаоник. Колико има решења?

77. У координатној xOy равни дате су тачке $A(1, 0)$, $B(6, 0)$, $C(8, 4)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде паралелограм.

78. У координатној xOy равни дате су тачке $A(4, 0)$, $B(0, 4)$. Одреди координате тачака C и D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде квадрат. Колико има решења?

79. Конструиши ромб чија страница $a = 3$ cm и дијагонала ромба заклапају угао од 30°.

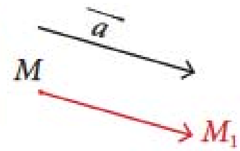
6.7. Операције са векторима

Подсетимо се: У 5. разреду уведен је појам вектор (усмерена дуж).

На слици је вектор $\overrightarrow{AB}$. Тачка A је почетна тачка, а B крајња тачка вектора $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ одређен је правцем, смером и интензитетом. Његов правац је права одређена тачкама A и B (права p на слици), а смер је од тачке A ка тачки B.

Интензитет вектора је дужина вектора $\overrightarrow{AB}$. Пише се $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектори на слици припадају паралелним правама, па се каже да имају исти правац. Користићемо и израз паралелни вектори. Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су једнаки и то пишемо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Они имају исти правац, исти смер и исту дужину (интензитет).



Помоћу вектора смо дефинисали транслацију (паралелно померање за дати вектор). Дата је тачка M и вектор $\vec{a}$. Цртамо праву паралелну са правом којој припада вектор $\vec{a}$. Затим, у одговарајућем смеру, преносимо дужину вектора $\vec{a}$. Добили смо тачку M_1 тако да је $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$.

О векторима је сигурно било речи и на часовима физике.
Ветар би могао да се опише као хоризонтално кретање ваздуха. Ако метеоролог каже да ветар дува 10 m/s нисмо све рекли о ветру. Не знамо правац и смер дувања ветра. Брзина ветра је, у ствари, вектор па зато и не можемо да га изразимо само једним податком – бројем. Правац и смер ветра одређују се помоћу тзв. руже ветрова. То је важан податак за све поморце, па због тога на компасима можемо запазити цртеж који личи на ружу по томе што су правци ветрова обележени слично положају ружиних латица.

Компас са обележеним странама света

Сабирање вектора

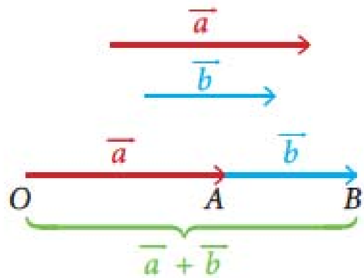
Посматраћемо два случаја: 1) када вектори имају исти правац, или 2) немају исти правац.

1. **Вектори имају исти правац** (припадају истој правој или се налазе на паралелним правама).

Подсетимо се: Приликом сабирања целих бројева смо се из почетне тачке померали у одређеном смеру за неколико јединичних дужина. Крајња тачка, добијена тим померањем, представља збир бројева.

Дати су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сабирамо их тако што крајњу тачку вектора $\vec{a}$ поклопимо са почетном тачком вектора $\vec{b}$. Кажемо да смо вектор $\vec{b}$ надовезали на вектор $\vec{a}$. На слици је

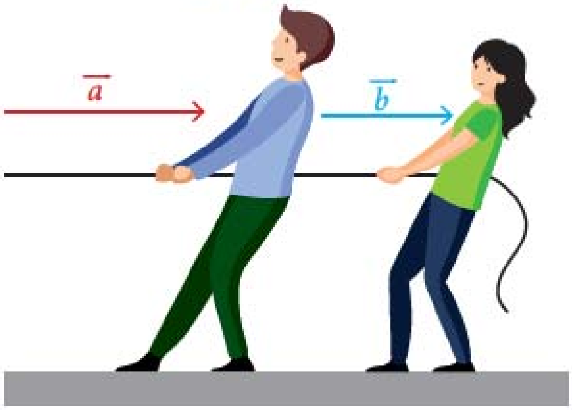
$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$



Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су истог смера, па је интензитет вектора $\vec{a} + \vec{b}$ једнак збиру интензитета вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Веза са физиком

Векторе истог правца и смера можемо замислити као силе којима две особе делују на конопац тако што га вуку у истом смеру. Силе којима прва и друга особа делују на конопац представљају векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Заједнички оне представљају збир $\vec{a} + \vec{b}$.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

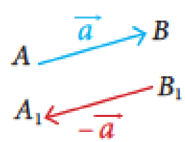
Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ добијамо тако што вектор $\vec{b}$ надовежемо на вектор $\vec{a}$. Почетна тачка вектора $\vec{a} + \vec{b}$ је почетак првог вектора $\vec{a}$, а крајња тачка је крај другог вектора $\vec{b}$.

Подсетимо се: Супротни бројеви су нпр. 8 и –8. Њихова апсолутна вредност је једнака (једнако су удаљени од 0). Знамо и да је збир супротних бројева једнак 0.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

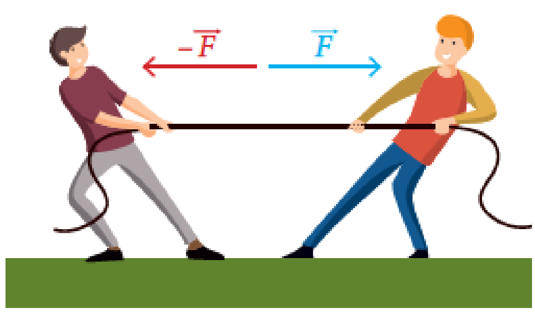
Супротни вектори имају исти правац и интензитет, а супротан смер.

Вектор супротан вектору $\vec{a}$ означавамо записом $-\vec{a}$. Погледај слику. Дати су супртни вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$ истог правца и истог интензитета али супротних смерова. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, тада је $\overrightarrow{B_1A_1} = -\vec{a}$. Јасно је да се вектор $\overrightarrow{B_1A_1}$ може написати и као $\overrightarrow{BA}$. Следи $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.



Примећујемо да је $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.

Почетна тачка првог и крајња тачка другог вектора су се поклопиле, односно интензитет тог вектора $\overrightarrow{AA}$ је 0 и пишемо $|\overrightarrow{AA}| = 0$. Уводимо ознаку $\vec{0}$ (нула вектор).



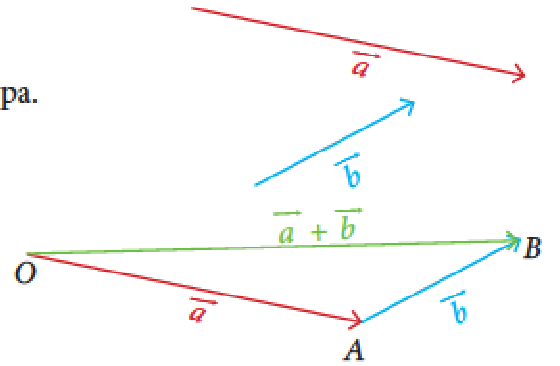
Аналогија са физиком: на тело делују супротне силе $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, па тело мирује.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Збир два супротна вектора је нула вектор, тј. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

2. Вектори немају исти правац

Сабирамо их као и у случају паралелних вектора.

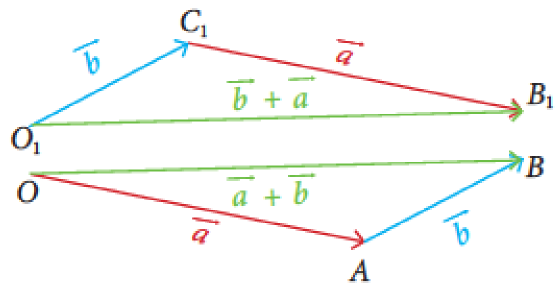


На слици су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Транслирамо вектор $\vec{b}$ тако да се његов почетак поклопи са крајем вектора $\vec{a}$ (вектор $\vec{b}$ смо надовезали на вектор $\vec{a}$).

Ако спојимо почетак првог вектора и крај другог вектора добили смо њихов збир. Дакле,

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Овакво сабирање вектора надовезивањем назива се и сабирање вектора **по правилу троугла.** Приметимо да би исто било да смо вектор $\vec{a}$ надовезивали на вектор $\vec{b}$.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За било која два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи:

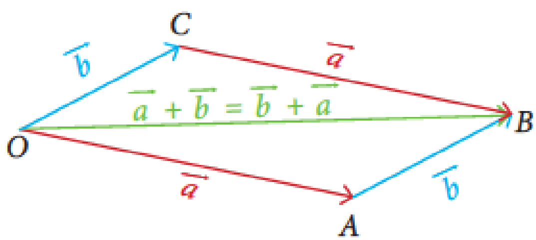
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

(сабирање вектора је комутативно).

Можемо размишљати и овако. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имају заједнички почетак O. Тада је:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

па је збир ових вектора одређен дијагоналом OB паралелограма $OABC$. Овакво сабирање вектора назива се и сабирање **по правилу паралелограма.**

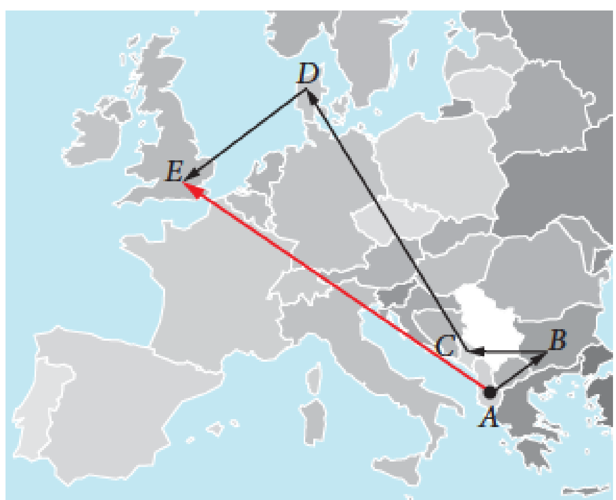


Збир више вектора одређујемо тако што их редом надовезујемо (почетак другог вектора на крај првог, почетак трећег на крај другог и тако редом). Почетак првог вектора је почетак збира вектора а крај последњег вектора је крај њиховог збира.

На слици је

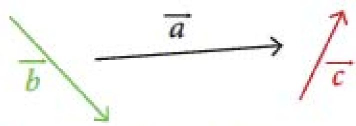
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

(Кренули смо из Албаније за Енглеску, али смо успут „свратили" до Бугарске, Црне Горе и Данске).

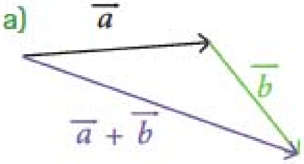


ПРИМЕР 1. На слици су дати вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

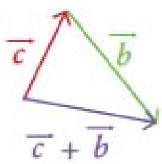
Одреди: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{c}+\vec{b}$; в) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}$.



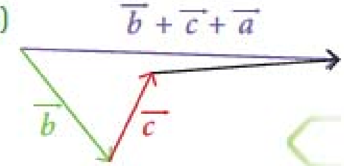
РЕШЕЊЕ а)



б)



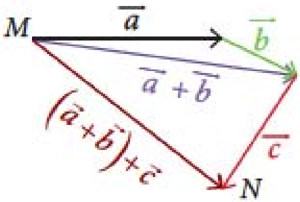
в)



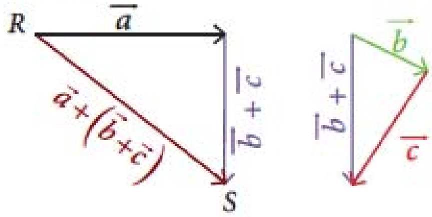
ПРИМЕР 2. На слици су дати вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Одреди: а) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$; б) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

РЕШЕЊЕ а)



б)



Приметимо да је $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RS}$ то јест.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

За било која три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
(сабирање вектора је асоцијативно).

Одузимање вектора

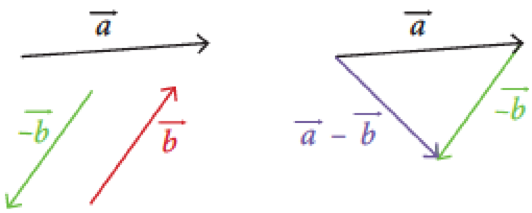
Подсетимо се: Од броја a одузети број b значи броју a додати број који је супротан броју b. На пример, $-4-(+10)=-4+(-10)=-14$.

Слично одузимању бројева одузимамо и векторе. Ако су дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тада је

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Од вектора $\vec{a}$ одузимамо вектор $\vec{b}$ тако што вектор $\vec{a}$ саберемо са вектором који је супротан вектору $\vec{b}$.

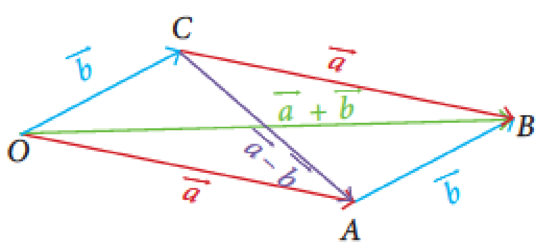


Вратимо се на слику код сабирања вектора правилом паралелограма. Видимо да је:

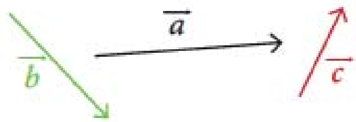
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}.$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Ако вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређују паралелограм тада једна дијагонала представља збир, а друга разлику тих вектора.

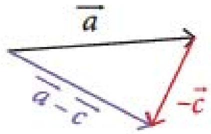


ПРИМЕР 3. Дати су вектори, као на слици.

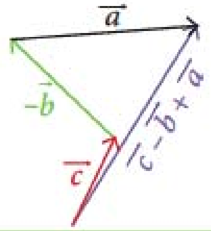


Одреди: а) $\vec{a}-\vec{c}$; б) $\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}$.

РЕШЕЊЕ а)

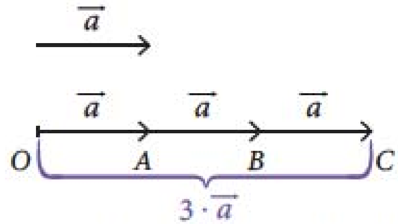


б)



Множење вектора бројем

Подсетимо се: У млађим разредима смо учили множење природних бројева. Знамо да $3 \cdot 4$ значи да на 3 места имамо по 4, односно $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$.



Слично множењу броја другим бројем, множимо и вектор бројем. На слици је

$$3 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Подразумева се да је $3 \cdot \vec{a} = 3\vec{a}$.

Видимо да добијени вектор $3\vec{a}$ има исти правац и смер као и вектор $\vec{a}$, а да му је интензитет 3 пута већи.

Ако желимо да представимо $-3\vec{a}$, добијени вектор има исти правац као вектор $\vec{a}$, супротан смер, а интензитет 3 пута већи. На слици је $-3\vec{a} = \overrightarrow{CO}$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Производ броја k и вектора $\vec{a}$ је вектор $k\vec{a}$, чији правац је исти као правац вектора $\vec{a}$.

Интензитет вектора $k\vec{a}$ једнак је производу апсолутне вредности броја k и интензитета вектора $\vec{a}$.

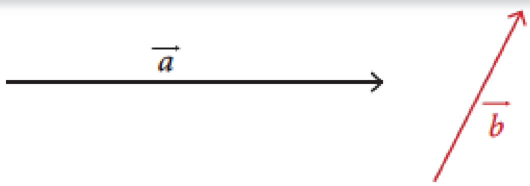
$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$$

Ако је $k > 0$, вектор $k\vec{a}$ има исти смер као и вектор $\vec{a}$.

Ако је $k < 0$, вектор $k\vec{a}$ има супротан смер од смера вектора $\vec{a}$.

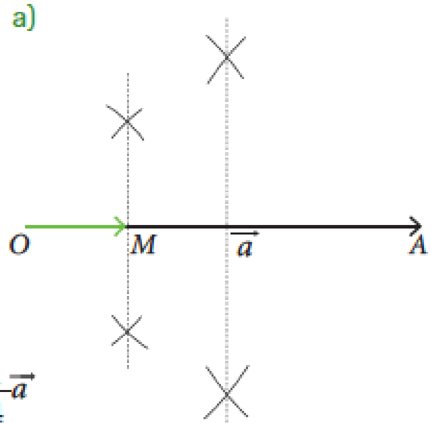
Ако је $k = 0$, тада је $k\vec{a} = \vec{0}$.

ПРИМЕР 4. Дати су вектори као на слици.



Одреди: а) $\frac{1}{4}\vec{a}$; б) $-2\vec{b}$.

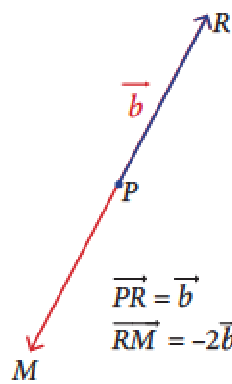
РЕШЕЊЕ а)



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\vec{a}$

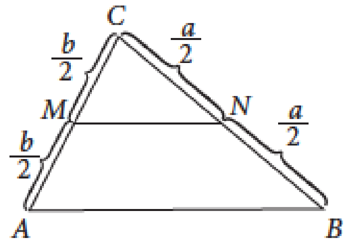
б)



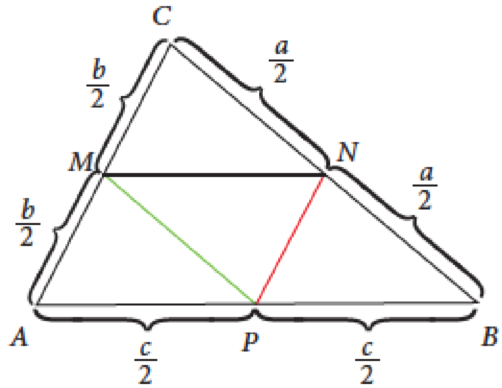
$\overrightarrow{PR} = \vec{b}$

$\overrightarrow{RM} = -2\vec{b}$

Средња линија троугла



Средња линија троугла је дуж чије крајње тачке су средишта две странице троугла.



Јасно је да троугао има три средње линије.

Користећи сабирање вектора доћи ћемо до неких веома битних особина које има средња линија троугла. Од тачке M до тачке N можемо доћи на два начина. Један је са „горње” стране, преко тачке C, а други са „доње” стране, преко тачака A и B. Имамо једнакости:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

Ако саберемо ове једнакости, добијамо

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\right)+\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BN}\right).$$

Вектори $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MA}$, као и $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{BN}$ су супротни, па је $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN} = \vec{0}$.

Сада имамо $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, тј. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Слично је и $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, као и $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Средња линија троугла је паралелна наспрамној страници и два пута је краћа од ње.

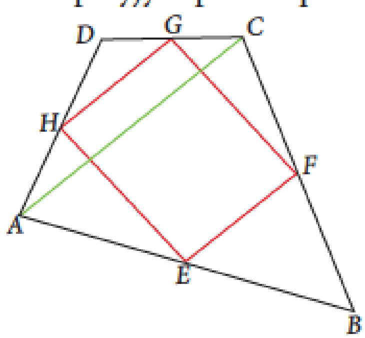
Пошто је $MN = \frac{c}{2}$, $MP = \frac{a}{2}$ и $PN = \frac{b}{2}$, видимо да средње линије деле троугао на четири подударна троугла (ССС). Јасно је да су странице тих троуглова $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$.

ПРИМЕР 5. Дужине средњих линија троугла су 3 cm, 5 cm и 6 cm. Одреди обим тог троугла.

РЕШЕЊЕ Странице троугла су два пута дуже од одговарајућих средњих линија, па су њихове дужине 6 cm, 10 cm и 12 cm.
Дакле, $O = 6\text{ cm} + 10\text{ cm} + 12\text{ cm} = 28\text{ cm}$.

***ПРИМЕР 6.** Доказати да средишта страница било ког четвороугла образују паралелограм.

РЕШЕЊЕ На слици је четвороугао $ABCD$. Тачке E, F, G и H су, тим редом, средине страница AB, BC, CD и DA. Приметимо да је EF средња линија ΔABC, па је $EF = \frac{1}{2}AC$ и $EF \parallel AC$. Такође је GH средња линија ΔCDA, па је $GH = \frac{1}{2}AC$ и $GH \parallel AC$. Дакле, у четвороуглу $EFGH$ наспрамне странице EF и GH су паралелне и једнаке, па је он паралелограм, што је и требало доказати.



ЗАДАЦИ

80. На правој p дате су редом тачке A, B, C и D тако да је $AB = BC = CD$. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, одреди векторе: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$.

81. Дат је квадрат $ABCD$. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, одреди векторе: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$.

82. На страницама AB, BC и CA једнакостраничног троугла ABC, дате су тачке M, N и P такве да је $AM = MB$, $BN = NC$ и $CP = PA$. Ако је $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BN} = \vec{b}$, одреди векторе: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$.

83. На страницама AB, BC, CD и DA правоугаоника $ABCD$ дате су тачке M, N, P и Q, такве да је $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PD$ и $DQ = QA$. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, одреди векторе: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QM}$.

84. Користећи векторе докажи да је средња линија троугла: а) паралелена са страницом троугла којој одговара; б) има дужину једнаку половини дужине одговарајуће странице троугла.

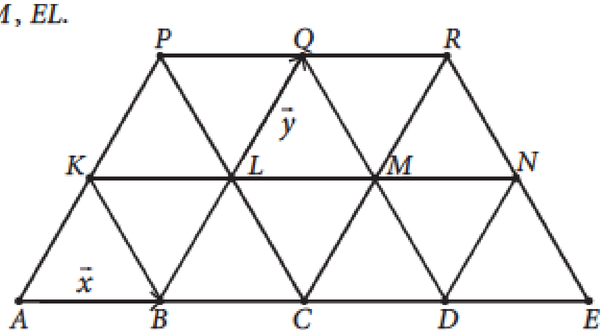
85. Ако је тачка M средина дужи AB и T произвољна тачка ван те дужи, онда је $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} = 2 \cdot \overrightarrow{TM}$. Докажи.

86. На правој p дате су тачке A, B и C такве да је $AB = BC$. Ван праве p дата је тачка M. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$, одреди векторе $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MC}$.

87. Сви троуглови на датој слици су једнакостранични. Ако су вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{LQ} = \vec{y}$, израчунај векторе:

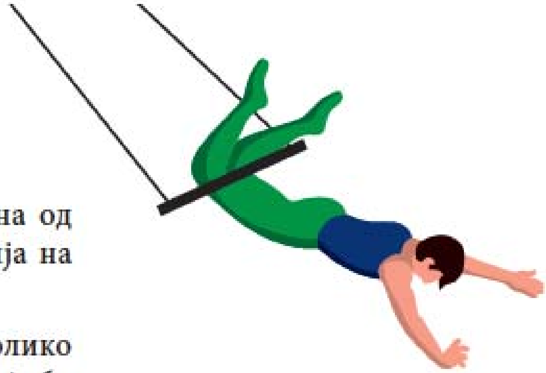
а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{QB}$;

б) $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{EL}$.



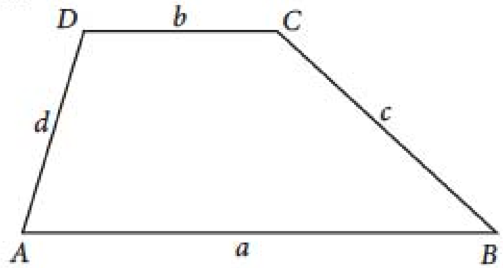
88. На правој p дате су тачке A и B. Постоји ли на тој правој тачка M таква да је $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

6.8. Трапез



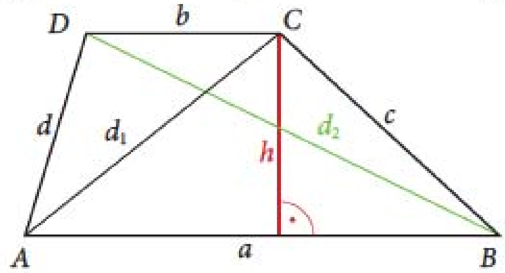
Вероватно сте некада били у циркусу. Једна од најузбудљивијих тачака је извођење акробација на трапезу.

У математичком смислу, трапез није баш толико узбудљив, али има неке интересантне особине које би требало проучити.



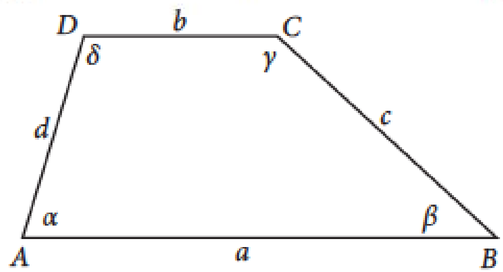
Трапез је четвороугао који има тачно један пар паралелних страница.

На слици је трапез $ABCD$. Паралелне странице AB и CD су **основице.** Оне су увек различите дужине, а обично их означавамо са a и b. Преостале две странице BC и DA су **краци.** Уобичајене ознаке за краке су c и d. **Дијагонале** трапеза су $d_1 = AC$ и $d_2 = BD$. **Висина** трапеза је дуж чија дужина је једнака растојању између правих које садрже основице, а обележава се са h.



Ако унутрашње углове трапеза обележимо са α, β, γ и δ, тада, као и за сваки други четвороугао, важи:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$



Посматрајмо углове α и δ. Основице су паралелне, па ти углови морају бити суплементни. Исто важи за углове β и γ. Дакле:

$$\alpha + \delta = 180° \quad \text{и} \quad \beta + \gamma = 180°.$$

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Углови трапеза који леже на истом краку су суплементни.

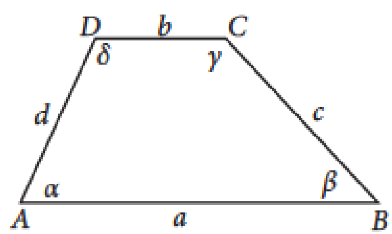
ПРИМЕР 1. Два унутрашња угла трапеза су 54° и 111°. Одреди преостале унутрашње углове.

РЕШЕЊЕ Нека је $\beta = 54°$. Пошто је $54° + 111° \neq 180°$,

значи да је $\delta = 111°$.

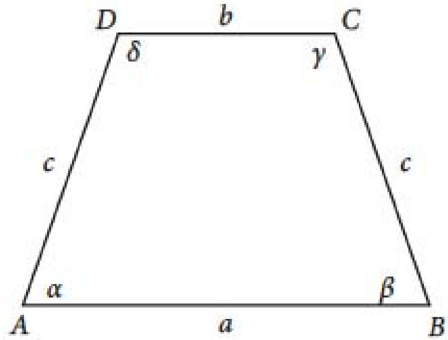
Сада имамо $\gamma = 180° - 54° = 126°$

$\alpha = 180° - 111° = 69°$.



Врсте трапеза

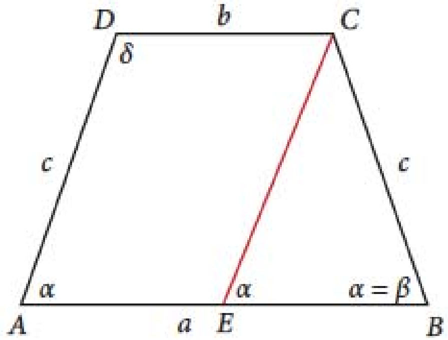
1. Једнакокраки трапез



Једнакокраки трапез је трапез чији краци су једнаки.

На слици је $BC = AD = c$.

Сетите се да смо до неких особина паралелограма долазили користећи троугао. Сада ћемо искористити знања о троуглу и паралелограму да бисмо извели закључке о трапезу.

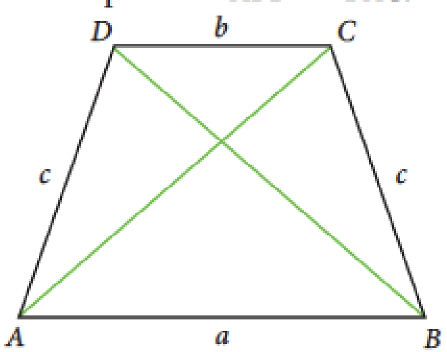


Дуж CE је паралелна са AD. На тај начин смо трапез $ABCD$ разложили на паралелограм $AECD$ и ΔEBC. Пошто је $AD \| CE$, знамо да је $\alpha = \measuredangle BEC$. Такође, ΔEBC је једнакокраки, па су углови на основици једнаки, тј. закључујемо да је $\alpha = \beta$. Како су углови на крацима суплементни, мора бити и $\gamma = 180° - \beta$ и $\delta = 180° - \alpha$ па имамо $\gamma = \delta$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Углови на истој основици једнакокраког трапеза су једнаки.

Чини се и да су дијагонале једнакокраког трапеза једнаке. То можемо да докажемо. Посматраћемо ΔABD и ΔBAC.



1. $AB = BA$ (заједничка страница)
2. $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC$ (углови на основици трапеза)
3. $AD = BC$ (краци једнакокраког трапеза)

(СУС)

$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta BAC$

Следи $BD = AC$

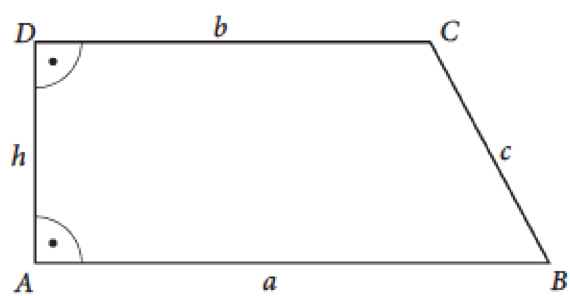
УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Дијагонале једнакокраког трапеза су међусобно једнаке.

2. Правоугли трапез

Правоугли трапез је трапез који има тачно 2 права угла.

Краћи крак AD уједно је и висина правоуглог трапеза.



ПРИМЕР 2. Збир два унутрашња угла једнакокраког трапеза је 210°. Одреди све унутрашње углове тог трапеза.

РЕШЕЊЕ Углови γ и δ, на краћој основици, дају збир 210°. Пошто је трапез једнакокрак, следи $\gamma = \delta = 210° : 2 = 105°$,

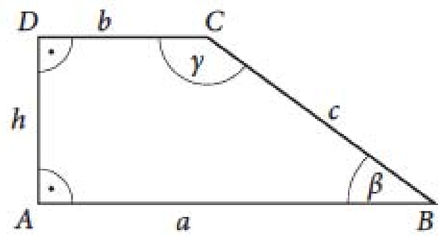
па је $\alpha = \beta = 75°$.

ПРИМЕР 3. Туп унутрашњи угао правоуглог трапеза је 4 пута већи од оштрог угла. Одреди те углове.

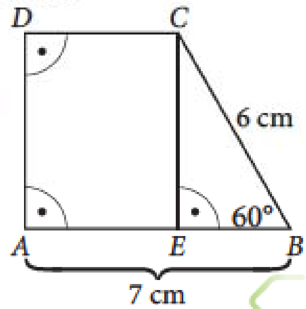
РЕШЕЊЕ На слици је $\alpha = \delta = 90°$, а $\gamma = 4\beta$. Пошто је $\beta + \gamma = 180°$, имамо:

$$\beta + 4\beta = 180°$$
$$5\beta = 180°$$
$$\beta = 36°$$

$$\gamma = 4 \cdot 36° = 144°.$$

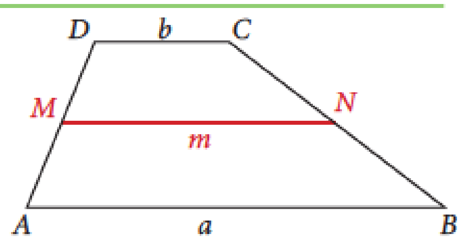


ПРИМЕР 4. Израчунај краћу основицу трапеза према подацима са слике.

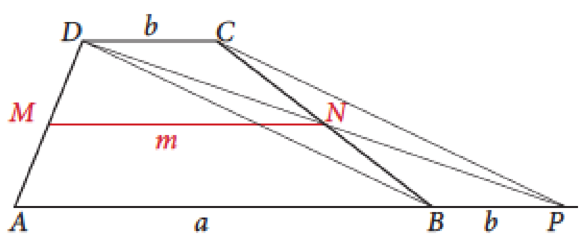


РЕШЕЊЕ Висина CE је разложила трапез $ABCD$ на правоугаоник $AECD$ и правоугли троугао EBC. У том троуглу $\measuredangle BCE = 30°$, па је катета наспрам њега два пута краћа од хипотенузе, тј. $EB = 3$ cm. Сада имамо: $AE = AB - EB = 7 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 4$ cm. У правоугаонику $AECD$ је $AE = CD$. Следи $b = CD = 4$ cm.

Средња линија трапеза



Средња линија трапеза је дуж чије крајње тачке су средишта кракова трапеза.



На слици су M и N средишта кракова AD и BC, а MN је средња линија. Обично је обележавамо са m. Покажимо да је:

$m = \dfrac{a+b}{2}$. На продужетку доње основице је тачка P, тако да је $BP = b$. Четвороугао $BPCD$ је паралелограм, па му се дијагонале полове. Дакле, тачка N је на средини PD, па дуж MN представља средњу линију ΔAPD. Због тога је $MN \| AP$, тј. $m \| a$ и $MN = \dfrac{1}{2} AP$.

Последњу једнакост можемо записати као $\boldsymbol{m} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ зато што је $AP = a + b$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Средња линија трапеза је паралелна основицама и једнака половини збира основица.

Користећи **сабирање вектора** доћи ћемо до истог закључка за средњу линију трапеза.

Од тачке M до тачке N можемо доћи на два начина. Један је са „горње" стране, преко тачака C и D, а други са „доње" стране, преко тачака A и B. Имамо једнакости:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN} \text{ и } \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}.$$

Ако саберемо ове једнакости, добијамо:

$$\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BN}\right).$$

Пошто је $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BN}=\vec{0}$, имамо:

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}.$$

Ако је $\overrightarrow{MN}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, горња једнакост гласи $2\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$, односно $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

Ово значи да вектор $\vec{m}$ има исти правац као и $\vec{a}+\vec{b}$, а самим тим као и вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тј. **средња линија је паралелна основицама**. Такође, интензитет вектора $\vec{m}$ је два пута мањи од интензитета вектора $\vec{a}+\vec{b}$, тј. **средња линија је упола краћа од збира основица.**

ПРИМЕР 5. Краћа основица трапеза је 6 cm, а средња линија 8,5 cm. Одреди дужу основицу трапеза.

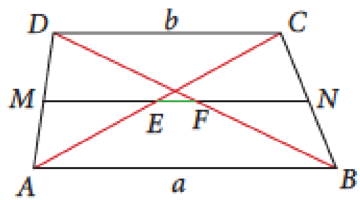
РЕШЕЊЕ Нека је b = 6 cm и m = 8,5 cm. Пошто је $2m = a + b$, имамо:

$2 \cdot 8{,}5\text{ cm} = a + 6\text{ cm}$

$17\text{ cm} = a + 6\text{ cm}$

$a = 11\text{ cm}.$

ПРИМЕР 6. Дат је трапез $ABCD$ чије основице су 8 cm и 6 cm. Дијагонале AC и BD секу средњу линију MN у тачкама E и F. Одреди дужину дужи EF.



РЕШЕЊЕ ME је средња линија ΔACD, па је $ME=\dfrac{b}{2}=3$ cm.

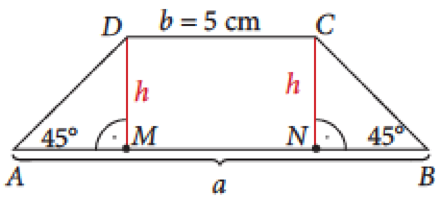
MF је средња линија ΔABD, па је $MF=\dfrac{a}{2}=4$ cm.

Сада је $EF = MF - ME = 1$ cm.

Могла је да се израчуна и средња линија трапеза (MN = 7 cm) и средња линија ΔBCD (FN = 3 cm), па је:

$EF = MN - (ME + FN) = 7\text{ cm} - 6\text{ cm} = 1\text{ cm}.$

ПРИМЕР 7. У једнакокраком трапезу краћа основица је b = 5 cm, висина је h = 3 cm, а оштар угао је 45°. Одреди дужу основицу тог трапеза.



РЕШЕЊЕ Повукли смо висине из темена C и D. Јасно је да је $\measuredangle MDA=45°$. Исто важи и за $\measuredangle BCN$. Тако је трапез разложен на два једнакокрака троугла (ΔAMD и ΔNBC) и правоугаоник $MNCD$. Из једнакокраких троуглова имамо $AM = DM = h$ и $CN = BN = h$, а из правоугаоника имамо $MN = b$, па лако закључујемо да је $AB = AM + MN + NB$

$a = 3\text{ cm} + 5\text{ cm} + 3\text{ cm}$

$a = 11\text{ cm}.$

ЗАДАЦИ

89. Права p пресеца наспрамне странице AB и CD паралелограма $ABCD$ у тачкама M и N. Нацртај одговарајућу слику и напиши све трапезе које уочаваш на добијеној слици.

90. Углови четвороугла $ABCD$ су $\alpha = 56°$, $\beta = 74°$ и $\gamma = 106°$. Да ли је четвороугао $ABCD$ трапез?

91. Нацртај трапез $ABCD$ чије су основице AB и CD. Означи неопходне тачке и допуни празна места у следећим реченицама, тако да оне буду исправне:

а) Краци трапеза су ________ и __________;

б) Висина трапеза је дуж __________;

в) Средња линија трапеза је дуж __________;

г) Дијагонале трапеза су __________ и __________;

д) Углови на основици AB трапеза су ________ и ________;

ђ) Углови на основици CD трапеза су ________ и ________.

92. У трапезу $ABCD$ углови на већој основици су $\alpha = 65°$, $\beta = 78°$. Одреди остале углове трапеза $ABCD$.

93. У трапезу $ABCD$ наспрамни углови су $\alpha = 58°$ и $\gamma = 104°$. Одреди остале углове трапеза $ABCD$.

94. Нацртај правоугаоник $MNPQ$. Пресеци правоугаоник $MNPQ$ правом a тако да добијеш два правоугла трапеза.

95. Нацртај паралелограм $ABCD$. Пресеци паралелограм $ABCD$ правом p тако да добијеш два једнакокрака трапеза.

96. У једнакокраком трапезу $MNPQ$ ($MQ = NP$) један угао је 68°. а) Одреди остале углове трапеза; б) Докажи да су дијагонале трапеза MP и NQ једнаке.

97. У правоуглом трапезу $ABCD$, чије су основице AB и CD, угао $\alpha = 70°$. Одреди остале углове трапеза $ABCD$.

98. Основице једнакокраког трапеза $ABCD$ имају дужину $AB = 18$ cm и $CD = 12$ cm, а један оштар угао трапеза је 60°. Израчунај обим трапеза.

99. Основице правоуглог трапеза $ABCD$ имају дужину $AB = 24$ cm и $CD = 16$ cm, а оштар угао трапеза је 45°. Израчунај дужину висине трапеза.

100. Нацртај једнакокраки трапез $ABCD$ и одреди његову осу симетрије. Да ли је трапез $ABCD$ централносиметрична фигура?

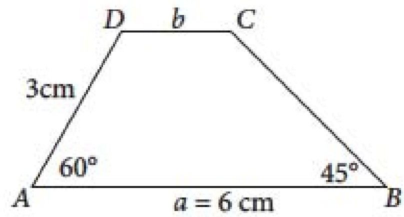
101. Да ли је правоугли трапез $MNPQ$ осносиметрична фигура?

102. Користећи векторе докажи да је дужина средње линије трапеза једнака половини збира дужина основица трапеза.

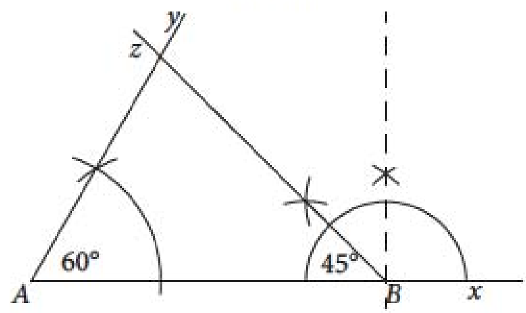
6.9. Конструкција трапеза

За конструкцију трапеза су нам потребна четири независна елемента. У неким ситуацијама ћемо трапез разложити на троугао и паралелограм или на два троугла, па то користимо при конструкцији. Некада ће лакше бити да трапез директно конструишемо.

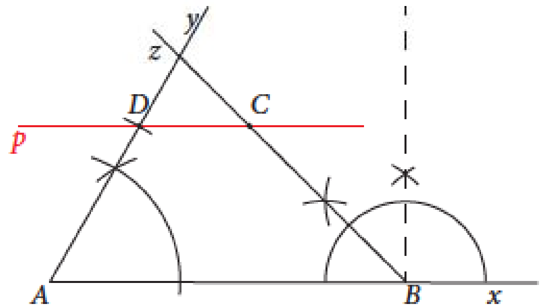
ПРИМЕР 1. Конструисати трапез $ABCD$ чија основица $AB = 6$ cm, крак $AD = 3$ cm, а углови $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$.



РЕШЕЊЕ Нацртајмо полуправу Ax и на њој одредимо тачку B тако да је $AB = 6$ cm. Затим конструишимо углове од 60° и 45°, чија темена су A и B.

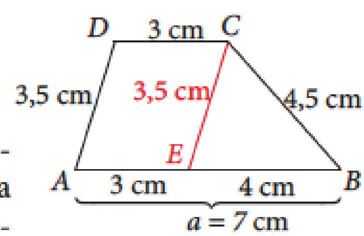


На краку Ay одредимо тачку D, тако да је $AD = 3$ cm. На крају, тачку C добијамо као пресек полуправе Bz и праве кроз D, паралелне са AB.

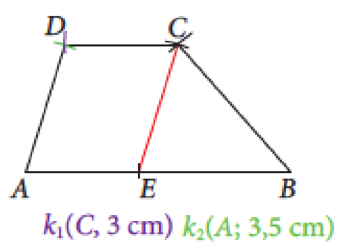


Конструисани трапез задовољава почетне услове.

ПРИМЕР 2. Конструисати трапез чије основице су 7 cm и 3 cm, а краци 4,5 cm и 3,5 cm.

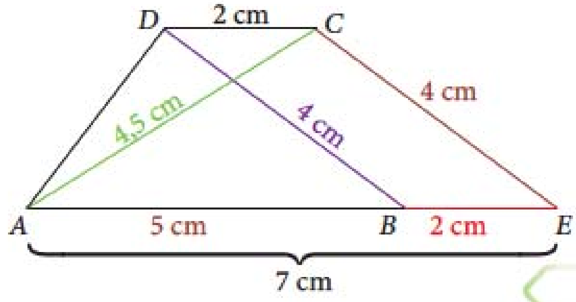


РЕШЕЊЕ На слици је $CE \| AD$. Трапез смо разложили на паралелограм $AECD$ и ΔEBC. Нацртајмо дуж AB и на њој тачку E, тако да је $AE = 3$ cm. Можемо конструисати ΔEBC (ССС). Остаје нам да одредимо тачку D, као четврто теме паралелограма $AECD$. Добијамо је у пресеку кружница $k_1(C, 3\text{ cm})$ и $k_2(A; 3{,}5\text{ cm})$.



ПРИМЕР 3. Конструисати трапез чије основице су 5 cm и 2 cm, а дијагонале 4,5 cm и 4 cm.

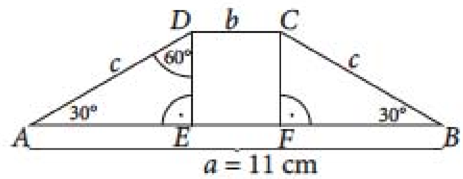
РЕШЕЊЕ Продужимо страницу $AB = 5$ cm тако да је $BE = CD = 2$ cm. Тада је четвороугао $BECD$ паралелограм. Можемо конструисати ΔAEC (ССС). Остаје још да одредимо тачку D као четврто теме паралелограма $BECD$. Конструкцију остављамо за самосталан рад ученика.



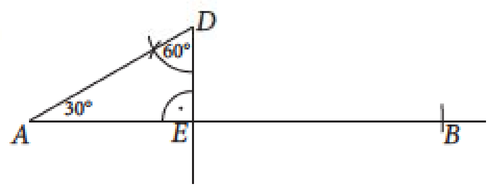
Једнакокраки и правоугли трапез имају своје специфичне особине, па су за њихове конструкције потребна три независна елемента.

ПРИМЕР 4. Конструиши једнакокраки трапез, ако је дужа основица $a = 11$ cm, угао $\alpha = 30°$ и крак $c = 5$ cm.

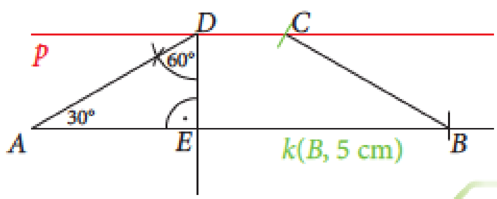
РЕШЕЊЕ Спустимо висине из темена D и C. На тај начин смо трапез поделили на два правоугла троугла (ΔAED и ΔFBC) и правоугаоник $EFCD$.



Прво конструишимо ΔAED користећи УСУ ($DA = 5$ cm, $\measuredangle A = 30°$, $\measuredangle D = 60°$), а затим продужимо страницу AE преко тачке E, тако да је $AB = 11$ cm.

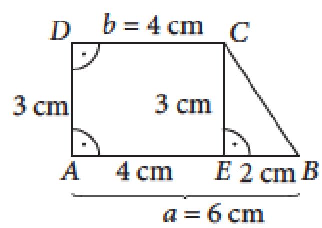


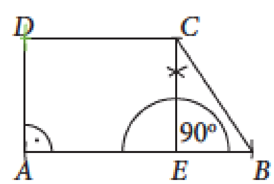
Тачку C можемо добити на више начина. Нпр. кроз D повучемо праву p, паралелну са AB. У пресеку праве p и кружнице $k(B, 5\text{ cm})$ добијамо тачку C.



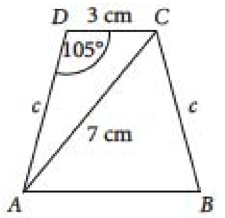
ПРИМЕР 5. Конструиши правоугли трапез чије основице су 6 cm и 4 cm, а краћи крак 3 cm.

РЕШЕЊЕ Трапез разложимо на правоугаоник $AECD$ и правоугли ΔEBC. Нацртамо дуж AB и тачку E, тако да је $AE = 4$ cm. Конструишемо ΔEBC (СУС), а онда лако и тачку D.

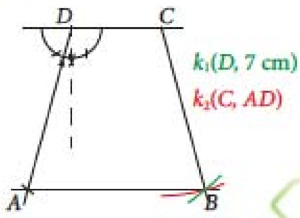




ПРИМЕР 6. Конструиши једнакокраки трапез чија краћа основица $b = 3$ cm, дијагонала $d = 7$ cm, а $\delta = 105°$.



РЕШЕЊЕ Можемо конструисати ΔACD (ССУ). Због особина једнакокраког трапеза тачку B добијамо у пресеку кружница $k_1(D, 7\text{ cm})$ и $k_2(C, AD)$.



ЗАДАЦИ

103. Конструиши трапез $ABCD$ ако су његове основице $AB = 6$ cm и $CD = 3$ cm, крак $BC = 4$ cm и дијагонала $AC = 5$ cm.

104. Конструиши трапез $ABCD$ ако су његове основице $AB = 8$ cm и $CD = 4$ cm, крак $BC = 5$ cm и крак $AD = 6$ cm.

105. Конструиши трапез $ABCD$ ако је његова основица $AB = 7$ cm, крак $BC = 4$ cm, а углови на основици $\measuredangle ABC = 60°$ и $\measuredangle BAD = 75°$.

106. Конструиши трапез $ABCD$ ако су његове основице $AB = 9$ cm и $CD = 6$ cm, а углови $\alpha = 60°$ и $\beta = 60°$.

107. Конструиши правоугли трапез ако су његове основице 6 cm и 4 cm и ако је крак наспрам правог угла једнак 3 cm.

108. Конструиши једнакокраки трапез, ако његове основице имају дужине 7 cm и 5 cm, а крак има дужину 4 cm.

109. Конструиши трапез ако његове основице имају дужине 7 cm и 4 cm, а краци имају дужине 3 cm и 5 cm.

110. Конструиши трапез $ABCD$ чије су дијагонале $AC = 6$ cm и $BD = 7$ cm, основица $AB = 8$ cm и карак $BC = 5$ cm.

111. Дате су тачке A, B и C. Конструиши трапез $ABCD$, ако је основица $CD = 5$ cm.

112. Дате су тачке A, B и C такве да је угао ABC туп. Конструиши правоугли трапез $ABCD$, ако је угао $\alpha = 90°$.

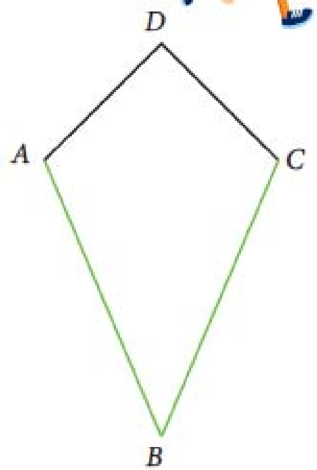
113. Ако се продуже краци једнакокраког трапеза $MNPQ$ онда се они секу под углом од 60°. Конструиши трапез $MNPQ$, ако су његове основице $MN = 7$ cm и $PQ = 4$ cm.

114. У координатној xOy равни дате су тачке $A(2, 0)$, $B(8, 0)$, $C(6, 3)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде:
а) правоугли трапез; б) једнакокраки трапез.

6.10. Делтоид

Четвороугао на слици, који има облик „змаја” зове се **делтоид**.

> **Делтоид** је четвороугао који има два пара једнаких суседних страница.

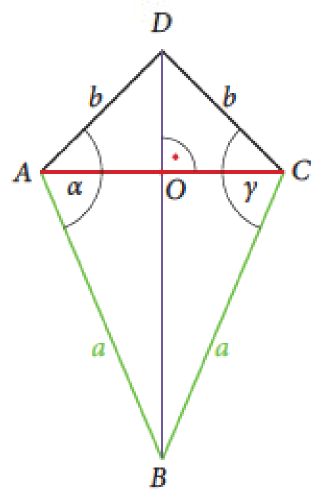


На слици је делтоид $ABCD$, код кога је $AB = BC$ и $CD = DA$. Можемо рећи и да се делтоид састоји од два једнакокрака троугла (ΔABC и ΔCDA) који имају заједничку основицу AC. Пошто је тачка B једнако удаљена од A и C, она се налази на симетрали дужи AC. Исто закључујемо и за тачку D. То значи да дијагонала BD припада симетрали дијагонале AC.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Дијагонале делтоида се секу под правим углом, а дијагонала BD полови дијагоналу AC.

На слици је $AO = OC$.



Због особина једнакокраког троугла знамо да је $\measuredangle CAD = \measuredangle ACD$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle ACB$. Одатле закључујемо да је и $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$, тј. $\alpha = \gamma$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

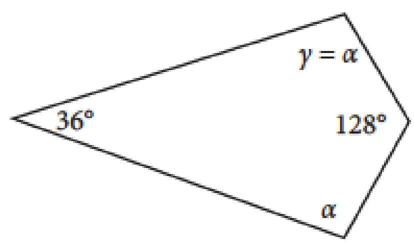
Неједнаке странице делтоида граде једнаке углове.

Делтоид је осносиметрична фигура, а оса симетрије садржи једну дијагоналу. То је дијагонала BD.

ПРИМЕР 1. Углови између једнаких страница делтоида су 36° и 128°. Одреди преостала два угла делтоида.

РЕШЕЊЕ Ако погледамо горњу слику, јасно је да је $\beta = 36°$, затим $\delta = 128°$, и $\alpha = \gamma$.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$
$$2\alpha + 36° + 128° = 360°$$
$$2\alpha = 360° - 164°$$
$$2\alpha = 196°$$
$$\alpha = 98°.$$

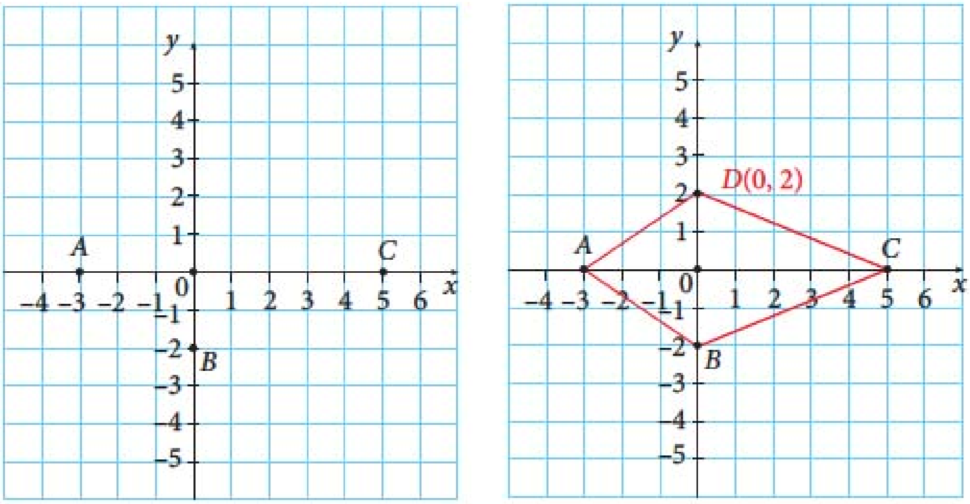


Дакле, преостала два угла су по 98°.

ПРИМЕР 2. У координатном систему нацртај тачке $A(-3, 0)$, $B(0, -2)$ и $C(5, 0)$.

Одреди координате тачке D тако да четвороугао $ABCD$ буде делтоид.

РЕШЕЊЕ



Дијагонале делтоида се секу под правим углом, па је јасно да ће тачка D бити на y оси једнако удаљена од координатног почетка као и тачка B. Закључујемо да је $D(0, 2)$.

ЗАДАЦИ

115. Одреди странице конвексних делтоида $ABCD$, који се добијају „слепљивањем” два подударна правоугла троугла чије су странице 3 cm, 4 cm и 5 cm.

116. Одреди углове делтоида ако су два његова угла 70° и 80°.

117. Постоји ли делтоид чији су углови 80°, 90° и 100°?

118. Колико има различитих делтоида чији су углови 110° и 120°?

119. Нацртај кружницу и на њој тачке A и B. Ако симетрала дужи AB сече кружницу у тачкама C и D, докажи да је четвороугао $ACBD$ делтоид.

120. Могу ли у делтоиду два угла бити права?

121. Да ли се око делтоида може описати кружница?

122. Да ли се у делтоид може уписати круг?

123. Постоји ли делтоид чија су три унутрашња угла једнака?

***124.** Да ли постоји делтоид $ABCD$ ако је $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm и дијагонала $AC = 6$ cm?

***125.** Да ли постоји делтоид $ABCD$ ако је $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm и дијагонала $BD = 4$ cm?

***126.** Да ли постоји делтоид $ABCD$ ако су дијагонале делтоида $AC = 7$ cm, $BD = 8$ cm и страница $AB = 4$ cm?

127. У координатној xOy равни дате су тачке $A(0, 0)$, $B(6, -4)$ и $C(10, 0)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде делтоид.

САЖЕТАК
ЧЕТВОРОУГАО

УГЛОВИ ЧЕТВОРОУГЛА:

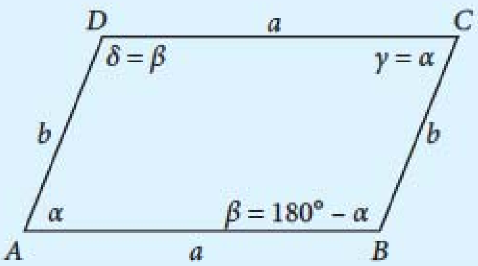
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ Збир унутрашњих углова четвороугла је 360°.

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360°$ Збир спољашњих углова четвороугла је 360°.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \alpha_1 = 180° \\ \beta + \beta_1 = 180° \\ \gamma + \gamma_1 = 180° \\ \delta + \delta_1 = 180°\end{array}\right\}$$

Збир унутрашњег угла и њему суседног спољашњег угла је 180°.

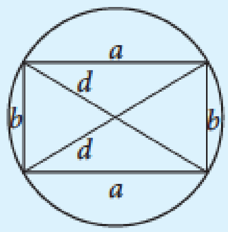
ПАРАЛЕЛОГРАМ:



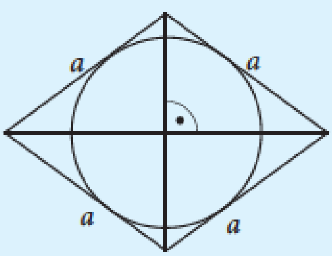
Наспрамне странице су паралелне и једнаке.
Наспрамни углови су једнаки.
Суседни углови су суплементни.
Дијагонале се полове.
Услови да четвороугао буде паралелограм:

1. свака два суседна угла суплементна;
2. свака два наспрамна угла једнака;
3. сваке две наспрамне странице једнаке;
4. дијагонале се полове;
5. две наспрамне странице паралелне и једнаке.

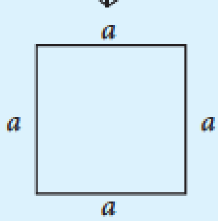
ВРСТЕ ПАРАЛЕЛОГРАМА:



Правоугаоник
Сви углови су прави.
Дијагонале су једнаке.
Може да се опише кружница.



Ромб
Све странице су једнаке.
Дијагонале се секу под правим углом.
Дијагонала је уједно и симетрала угла.
Може да се упише кружница.

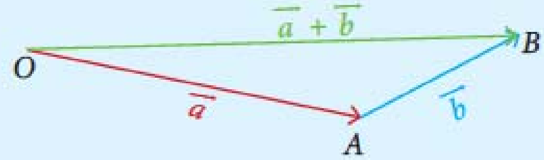


Квадрат
Има све особине правоугаоника и све особине ромба.

ОПЕРАЦИЈЕ СА ВЕКТОРИМА:

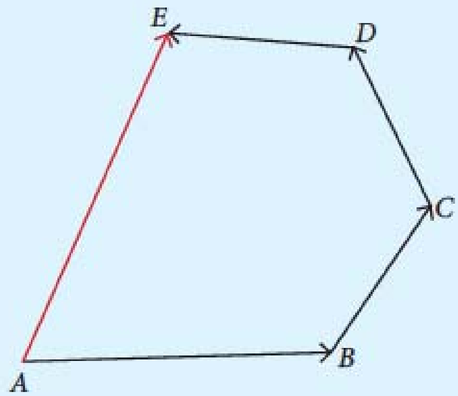
Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ добијамо тако што вектор $\vec{b}$ надовежемо на вектор $\vec{a}$. Почетна тачка вектора $\vec{a}+\vec{b}$ је почетак првог вектора $\vec{a}$, а крајња тачка је крај другог вектора $\vec{b}$.

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.



Збир више вектора одређујемо тако што их редом надовезујемо.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.



Од вектора $\vec{a}$ одузимамо вектор $\vec{b}$ тако што вектор $\vec{a}$ саберемо са вектором који је супротан вектору $\vec{b}$.

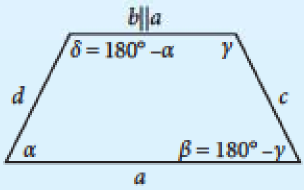
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

СРЕДЊА ЛИНИЈА ТРОУГЛА:

$$m=\frac{a}{2}$$

Средња линија троугла је паралелна наспрамној страници и два пута је краћа од ње.

ТРАПЕЗ:

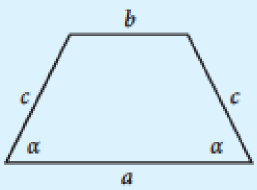


Има један пар паралелних страница (основице), а друге две странице су краци.

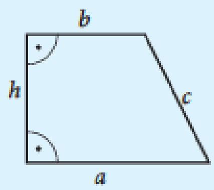
Углови на истом краку су суплементни.

ВРСТЕ ТРАПЕЗА:

1.



2.



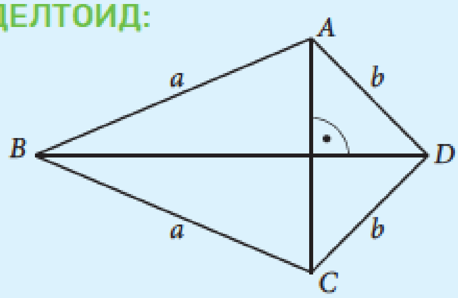
1. Једнакокраки трапез:
   једнаки су краци;
   углови на истој основици су једнаки;
   дијагонале су једнаке.
2. Правоугли трапез (има два права угла).

СРЕДЊА ЛИНИЈА ТРАПЕЗА:

$$m=\frac{a+b}{2}$$

Средња линија трапеза је паралелна основицама и једнака половини збира основица.

ДЕЛТОИД:



Има два пара једнаких суседних страница.

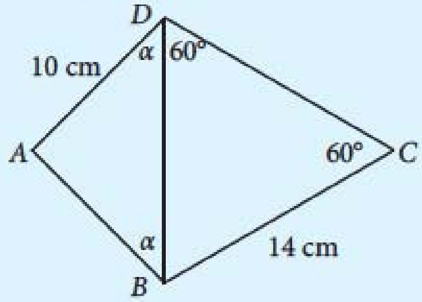
Дијагонале се секу под правим углом.

Једна дијагонала полови другу.

Има два једнака наспрамна угла (неједнаке странице граде једнаке углове).

ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

128. Израчунај обим четвороугла $ABCD$, ако је $AD = 10$ cm и $BC = 14$ cm.



129. У четвороуглу $MNPQ$ све четири странице четвороугла су једнаке, а $\measuredangle MNP = 100°$. Израчунај остале унутрашње углове у том четвороуглу.

130. У четвороуглу $ABCD$ је $AB = BC = CD$, а дијагонале се секу под углом од 110°. Одреди унутрашње углове четвороугла $ABCD$, ако су троуглови ABC и BCD подударни.

131. У паралелограму $ABCD$ конструисане су висине DM и DN. Израчунај $\measuredangle MDN$, ако је један унутрашњи угао паралелограма једнак 72°.

132. Да ли у једном четвороуглу могу сви унутрашњи углови бити оштри?

133. Колико највише тупих унутрашњих углова може бити у једном четвороуглу?

134. Ако је збир три унутрашња угла у четвороуглу мањи од 180°, онда је тај четвороугао неконвексан. Докажи.

135. Углови $\alpha = 77°$ и $\gamma = 111°$ су унутрашњи углови четвороугла $ABCD$. Да ли је четвороугао $ABCD$ конвексан или неконвексан?

136. Дат је квадрат $MNPQ$. Нека су A, B, C и D тачке страница MN, NP, PQ и QM, такве да је $AM = 2AN$, $BN = 2PB$, $PC = 2CQ$ и $QD = 2DM$. Докажи да је четвороугао $ABCD$ квадрат.

137. Основице трапеза $ABCD$ имају дужину $AB = 10$ cm и $CD = 6$ cm. Израчунај дужину средње линије трапеза.

138. Основице трапеза $ABCD$ имају дужину $AB = 20$ cm и $CD = 12$ cm. Дијагонале трапеза AC и BD секу средњу линију трапеза у тачкама M и N. Израчунај дужину дужи MN трапеза.

139. Да ли је тачно тврђење: ако је $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$, онда је четвороугао $ABCD$ трапез?

140. Углови четвороугла $MNPQ$ су 60°, 80° и 100°. Да ли је дати четвороугао трапез?

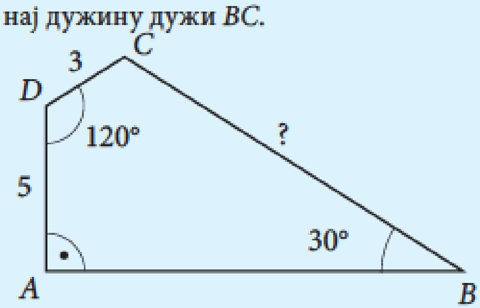
***141.** Већа основица AB у једнакокраком трапезу $ABCD$, је два пута дужа од растојања између тачке A и праве која садржи BC. Израчунај углове трапеза.

***142.** Нека је $ABCD$ произвољни паралелограм. На дијагонали AC уочене су тачке M и N такве да је $AM = CN$. Докажи да је четвороугао $MBND$ паралелограм.

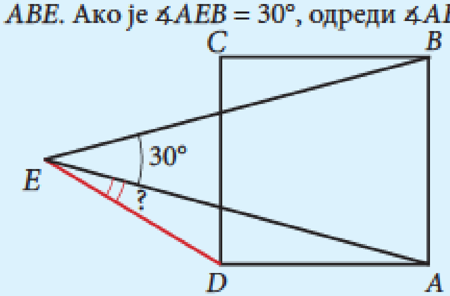
***143.** Нека је M средиште странице AB и N средиште странице CD четвороугла $ABCD$.
а) Докажи да је $AD + BC \geq 2\,MN$.
б) Ако је $AD + BC = 2MN$, онда је четвороугао $ABCD$ трапез.

***144.** Дат је неједнакокраки трапез $ABCD$ чији угао ABC је једнак 57°. Нека су M и N средишта основица AB и CD трапеза и нека је дуж MN једнака половини разлике основица трапеза. Израчунај углове трапеза.

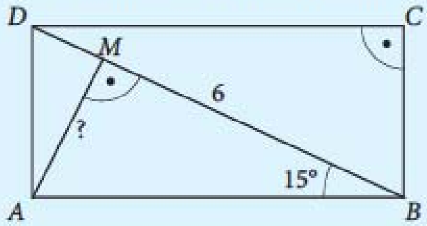
***145.** На основу података са наредне слике израчунај дужину дужи BC.



***146.** Дат је квадрат $ABCD$ и једнакокраки троугао ABE. Ако је $\measuredangle AEB = 30°$, одреди $\measuredangle AED$.



***147.** На основу података са слике одреди растојање темена A од дијагонале правоугаоника $BD = 6$.



***148.** У конвексном четвороуглу $ABCE$ је $AB = BC = CE$, затим $\measuredangle ABC = 90°$ и $\measuredangle BCE = 150°$. Одреди $\measuredangle CEA$ и $\measuredangle EAB$.

***149.** У четвороуглу $ABCD$ углови ABC и ADC су прави. Нека су M и N (редом) тачке на страницама BC и CD такве да је $BM = DN$ и $\measuredangle BAM = \measuredangle DAN$. Докажи да се дијагонале четвороугла $ABCD$ секу под правим углом.

***150.** У четвороуглу $MNPQ$ тачке A, B, C и D су редом средишта страница MN, NP, PQ и QM. Тачке R и S су редом средишта дијагонала MP и QN. Доказати да је: $\Delta ABS \cong \Delta CDR$ и $\Delta ADR \cong \Delta CBS$.

***151.** Дат је правоугли троугао ABC. Над катетама AC и BC ван троугла конструисани су квадрати $CDEA$ и $CBFG$. Доказати: а) Тачке C, E и F су колинеарне; б) Ако су CC', EE' и FF' нормале на праву AB, онда је $EE' = AC'$ и $FF' = BC'$.

***152.** Ако дијагонале трапеза полове углове на једној основици, онда је трапез једнакокраки и има три једнаке странице. Доказати.

***153.** Дат је трапез $ABCD$. Симетрале спољашњих углова трапеза код темена A и D секу се у тачки M, а симетрале спољашњих углова код темена B и C секу се у тачки N. Ако је $MN = 99$ cm, колики је обим трапеза $ABCD$?

***154.** Из темена A правоугаоника $ABCD$ конструисана је нормала на дијагоналу BD и продужена за своју дужину до тачке F. Доказати да је четвороугао $BCFD$ једнакокраки трапез.

***155.** Дат је правоугли троугао ABC ($\measuredangle C = 90°$). Над страницама AC и BC конструисани су споља квадрати $ADKC$ и $CBHE$. Доказати да је збир нормалних одстојања тачака D и H од хипотенузе једнак хипотенузи AB.

156. У паралелограму $ABCD$ тачка O је пресек његових дијагонала, а $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$. Одреди векторе $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

157. У паралелограму $ABCD$ тачка O је пресек његових дијагонала. Одреди векторе $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, ако је $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

158. Докажи да је средња линија троугла једнака (и паралелна) половини њој одговарајуће странице.

159. Докажи да је средња линија трапеза једнака (и паралелна) половини збира основица трапеза.

***160.** Дијагонале паралелограма $ABCD$ имају дужину $AC = 16$ cm и $BD = 12$ cm. Може ли страница паралелограма бити: а) 3 cm; б) 10 cm; в) 29 cm?

***161.** Дат је троугао ABC. Нека је M средиште странице AC и нека права p садржи теме B и тачку M. Уочи на правој p тачку D такву да је M средиште дужи BD. Докажи да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

***162.** Нацртај две паралелне праве p и q. На правој p изабери дуж AB чија је дужина 4 cm. На правој q изабери тачке C и D тако да је $\overline{AB} = \overline{DC}$. Докажи: а) $AD = BC$; б) $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$.

***163.** Ако се дијагонале паралелограма секу под правим углом, онда су све странице паралелограма једнаке. Докажи.

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Збир спољашњих углова четвороугла је 180°.	тачно	нетачно
2. Ако су странице четвороугла редом 5 cm, 6 cm, 7 cm и 8 cm, онда је тај четвороугао паралелограм.	тачно	нетачно
3. Ако је четвороугао $ABCD$ паралелограм, онда је $AB = CD$.	тачно	нетачно
4. Ако је четвороугао паралелограм онда су наспрамни углови паралелограма суплементни.	тачно	нетачно
5. Ако су све четири странице четвороугла једнаке, онда је тај четвороугао паралелограм.	тачно	нетачно
6. Ако су дијагонале паралелограма једнаке, онда су сви углови паралелограма прави.	тачно	нетачно
7. Дијагонале паралелограма се полове.	тачно	нетачно
8. Углови на крацима трапеза су суплементни.	тачно	нетачно
9. Ако је $AB = BC = 5$ cm и $AD = CD = 6$ cm, онда је четвороугао $ABCD$ делтоид.	тачно	нетачно
10. Дијагонале делтоида су нормалне.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. Ако су у четвороуглу $ABCD$ углови $\alpha = 53°$, $\beta = 74°$ и $\gamma = 111°$, онда је угао δ једнак:

А) 122°; Б) 132°; В) 112°; Г) 117°; Д) 125°.

2. У паралелограму $MNPQ$ је $MN = 6$ cm, $NP = 4$ cm и $PQ = 6$ cm. Обим паралелограма $MNPQ$ је:

А) 22 cm; Б) 18 cm; В) 20 cm; Г) 24 cm; Д) 16 cm.

3. Ако су у трапезу $ABCD$ углови $\alpha = 74°$ и $\gamma = 123°$, онда је $\delta - \beta$ једнако

А) 55°; Б) 49°; В) 47°; Г) 51°; Д) 45°.

4. Обим делтоида $ABCD$ је 36 cm, а страница $AB = 8$ cm. Тада једна од преосталих страница делтоида има дужину:

А) 7 cm; Б) 9 cm; В) 10 cm; Г) 11 cm; Д) 12 cm.

5. Ако је у четвороуглу $ABCD$, $AB = BC = CD = DA = AC$, онда је један угао тог четвороугла једнак:

А)120°; Б) 90°; В) 72°; Г) 100°; Д) 45°.

6. Ако висина DD' и дијагонала ромба BD заклапају угао од 32° онда се углови на једној страници ромба разликују за:

А) 58°; Б) 56°; В) 54°; Г) 52°; Д) 50°.

7. Основице правоуглог трапеза $ABCD$ имају дужину $AB = 20$ cm и $CD = 12$ cm, а оштар угао трапеза је 45°. Тада је висина трапеза једнака:

А) 6 cm; Б) 7 cm; В) 8 cm; Г) 9 cm; Д) 10 cm.

8. Два угла делтоида су 130° и 110°. Тада разлика преостала два угла делтоида припада скупу.

А) {10°, 20°}; Б) {0°, 100°}; В) {30°, 80°}; Г) {60°, 70°}; Д) {40°, 90°}.

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

Конвексни четвороугао
Неконвексни четвороугао
Унутрашњи углови
Суседна и наспрамна темена
Суседне и наспрамне странице
Дијагонала четвороугла
Обим четвороугла
Паралелограм
Правоугаоник
Ромб
Квадрат
Вектор
Правац вектора
Смер вектора
Супротан вектор
Нула вектор
Средња линија троугла
Трапез
Основица трапеза
Краци трапеза
Једнакокраки трапез
Правоугли трапез
Средња линија трапеза
Делтоид

ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

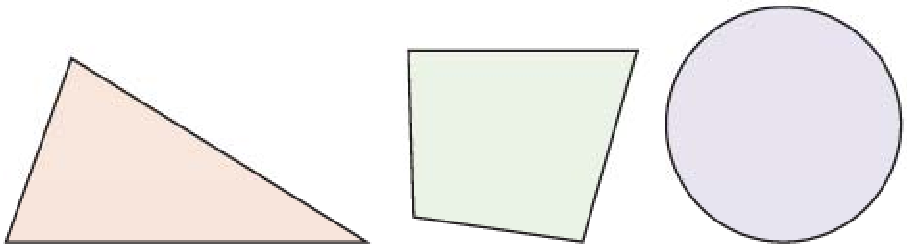
1.1.	У четвороуглу $ABCD$ дати су унутрашњи углови $\alpha = 57°$, $\beta = 74°$ и $\gamma = 125°$. Одреди угао δ.	**15**
1.2.	Обим паралелограма је 280 cm. Одреди дужине страница паралелограма ако су две суседне странице у размери 3 : 4.	**20**
1.3.	Постоје ли три неподударна четвороугла чије су странице 5 cm, 6 cm, 7 cm и 8 cm?	**25**
2.1.	У паралелограму $ABCD$, угао $\gamma = 69°$. Израчунај углове β, γ и δ.	**15**
2.2.	Израчунај углове паралелограма, ако је разлика два његова угла једнака 64°.	**20**
2.3.	Од три једнакостранична троугла странице 10 cm састављен је трапез $ABCD$. а) Докажи да су три странице трапеза једнаке. б) Израчунај обим трапеза $ABCD$. в) Одреди углове трапеза $ABCD$.	**25**
3.1.	Основице трапеза $ABCD$ имају дужине $AB = 21$ cm и $CD = 15$ cm. Израчунај дужину средње линије трапеза.	**15**
3.2.	Основице трапеза $ABCD$ имају дужине $AB = 24$ cm и $CD = 16$ cm. Средишта страница AD и BC су M и N. Дијагонале трапеза AC и BD секу средњу линију трапеза MN у тачкама P и Q. Израчунај дужине дужи MP, PQ и QN.	**20**
3.3.	На страницама AB, BC, CD и DA правоугаоника $ABCD$ дате су тачке M, N, P и Q, такве да је $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PD$ и $DQ = QA$. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, одреди векторе: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$.	**25**
4.1.	Конструиши ромб ако његова страница има дужину 4 cm, а један угао ромба је 45°.	**15**
4.2.	Конструиши паралелограм чије странице имају дужине 3 cm и 5 cm, а један угао је 120°.	**20**
4.3.	Дате су тачке M и N. Конструиши квадрат $ABCD$ тако да је средиште дужи MN уједно и пресек дијагонала квадрата, а тачке M и N се налазе на страницама AB и BC.	**25**

7 ПОВРШИНЕ ТРОУГЛА И ЧЕТВОРОУГЛА

Породица Обрадовић је купила стан који је потребно реновирати. Жеља им је да замене паркет у собама, плочице у купатилу и кухињи. Такође, стан се мора и окречити. Колика је површина подова прекривених паркетом? А зидова и подова где су плочице? Не заборавити кречење. Срећом, Јасмина, најмлађи члан породице Обрадовић, је ученица 6. разреда, па ће врло лако извести сва неопходна мерења и израчунавања. Ако буду имали неке дилеме, верујемо да ће им наша прича помоћи да их брзо реше.

7.1. Појам површине. Мерење површине

Подсетимо се: Део равни који је ограничен затвореном линијом зове се површ.



Из практичних разлога потребно је одредити величину површи. Такође, често се упоређују величине површи (нпр. величина пода и тепиха). Величина површи назива се **површина**.

За свако мерење морамо узети неку стандардну меру. Основна јединица мере за површину је квадратни метар (ознака је m^2). То је квадрат чија страница је дужине 1 m. Пошто се често мере мање површи, користимо и мање јединице: квадратни дециметар (dm^2), квадратни центиметар (cm^2) и квадратни милиметар (mm^2). Такође, користе се и веће јединице: ар (a), хектар (ha), квадратни километар (km^2). Свакако сте чули реченицу: „Засадили смо 10 ари малина”, или „Површина општине Лозница је 612 km^2”. Често је потребно претварати једну јединицу мере површине у другу. Почевши од најмање поменуте јединице (mm^2) свака следећа је 100 пута већа од претходне.

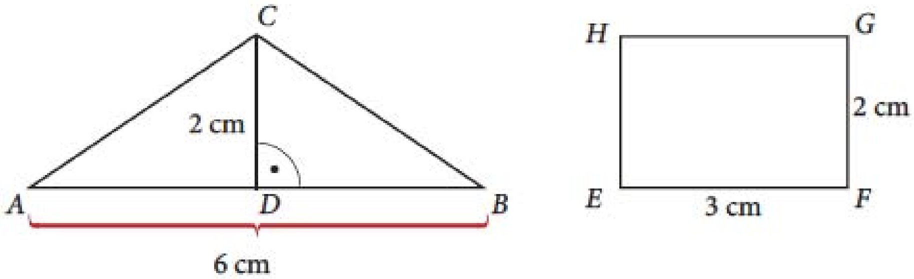
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$
$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$
$$1\ a = 100\ m^2$$
$$1\ ha = 100\ a$$
$$1\ km^2 = 100\ ha$$

Раније смо рекли да се подударни троуглови разликују само по свом положају, али међу њима нема разлике по облику и димензијама. Јасно је да то не важи само за троугао, већ за било које две подударне фигуре. Оне се могу довести у положај да потпуно преклопе једна другу.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

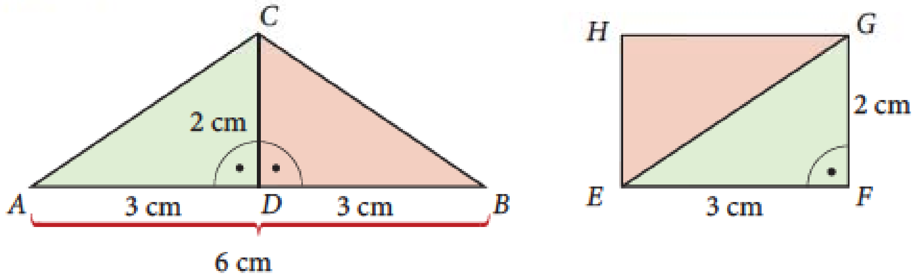
Подударне фигуре имају једнаке површине.

Могу ли фигуре које нису подударне имати једнаке површине? Следећи пример нам помаже да изведемо закључак.



На слици су једнакокраки троугао *ABC*, чија је основица *AB* = 6 cm и висина која јој одговара *CD* = 2 cm као и правоугаоник *EFGH* чије странице су 3 cm и 2 cm.

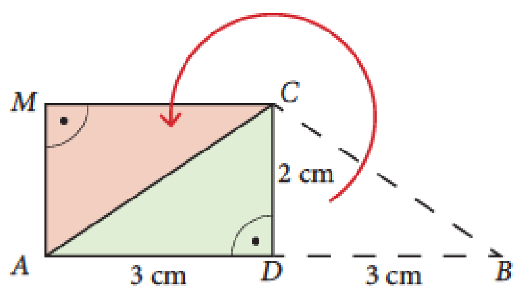
ΔABC је висином *CD* подељен на два подударна троугла. Дијагонала *EG* дели правоугаоник на два подударна троугла.



Са слике се види да се почетни троугао *ABC* и правоугаоник *EFGH* састоје од подударних троуглова, па су им површине једнаке. Користи се и израз да су фигуре **разложиво једнаке** (разложили смо их на подударне делове).

Могли смо и овако размишљати.

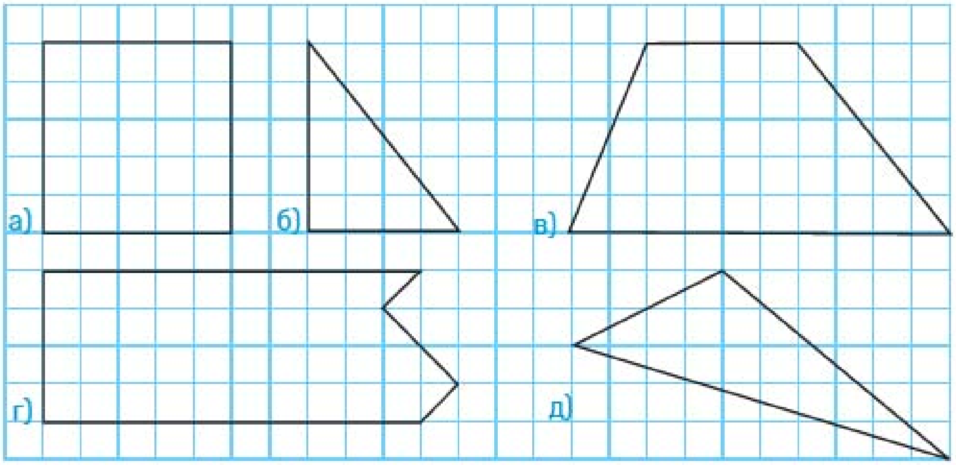
Пребацили смо ΔDBC у ΔMCA и на тај начин почетни троугао *ABC* трансформисали у правоугаоник *ADCM* који је подударан правоугаонику *EFGH*.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

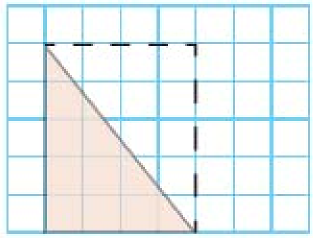
Фигуре које нису подударне могу имати једнаке површине.

ПРИМЕР 1. Одреди површине фигура приказаних у квадратној мрежи.



Напомена: За јединицу мере узимамо један квадрат мреже (зваћемо га квадратић).

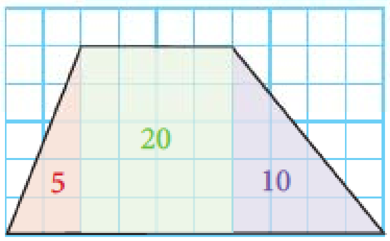
РЕШЕЊЕ а) Квадрат на слици се састоји од 25 квадратића, па ћемо рећи да је његова површина 25 јединица мере.



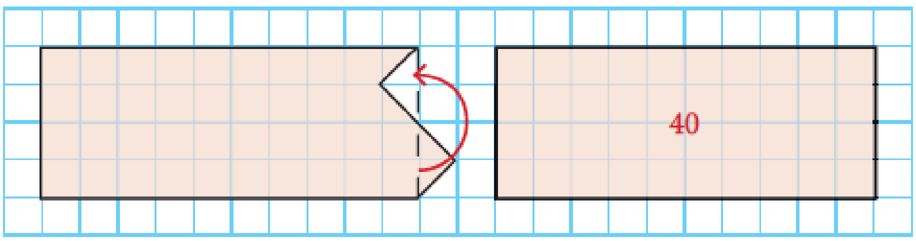
б) Троугао представља половину замишљеног правоугаоника који се састоји од 20 квадратића. Дакле површина троугла износи 10 јединица мере.

в) Трапез разлажемо на делове: два троугла и правоугаоник. Површина трапеза мора бити једнака збиру површина делова.

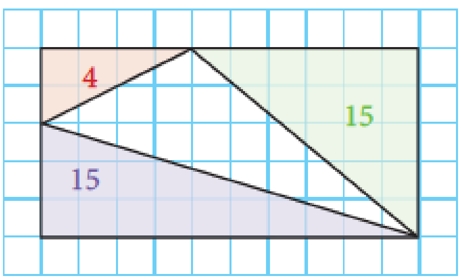
Дакле, површина трапеза је:
5 + 20 + 10 = 35 јединица мере.



г) Приметимо да троугао који се налази ван замишљеног правоугаоника можемо „исећи” и преместити на одговарајуће место у правоугаонику. Површина почетне фигуре једнака је површини правоугаоника и износи 40 јединица мере.



д) Троугао на слици тешко можемо разложити на делове чије површине знамо. Зато ћемо то урадити на следећи начин. Посматрајмо наш троугао као део правоугаоника. Правоугаоник се састоји од 50 квадратића. Површину нашег троугла рачунамо тако што од површине правоугаоника одузмемо збир површина осенчених троуглова. Пошто је 50 – (4 + 15 +15) = 16, површина троугла је 16 јединица мере.



ЗАДАЦИ

1. Допуни следећу таблицу тако што ћеш дужине од 1 m, 0,4 m и 3,6 m претворити у мање мере за дужину:

Дужина	cm	dm	mm
1 m			
0,4 m			
3,6 m			

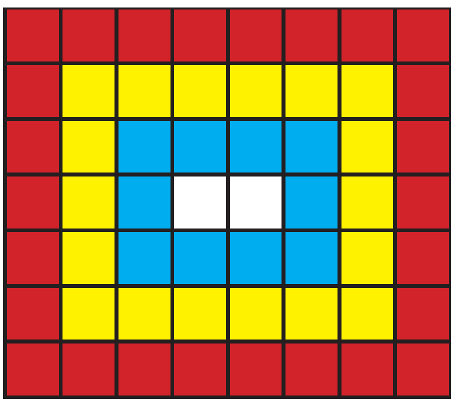
2. Допуни следећу таблицу тако што ћеш површине од 1 m^2, 0,2 m^2 и 7,5 m^2 претворити у мање мерне јединице за површину:

Површина	cm^2	dm^2	mm^2
1 m^2			
0,2 m^2			
7,5 m^2			

3. Ливаду чија је површина 2 ha треба поделити на 40 једнаких парцела. Колика је површина једне од тих парцела у квадратним метрима?

4. Фигура F је разрезана на две фигуре F_1 и F_2. Да ли је површина фигуре F једнака збиру површина фигура F_1 и F_2?

5. Дужина једне дужи у квадратној мрежи је 1 cm. Дата је следећа слика. Допуни табелу:



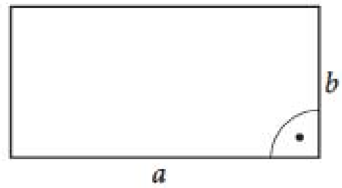
Површина плаво обојених квадратића		cm^2
Површина жуто обојених квадратића		cm^2
Површина црвено обојених квадратића		cm^2
Површина бело обојених квадратића		cm^2

6. Фигуре F_1 и F_2 су подударне. Да ли су њихове површине једнаке? Образложи одговор.

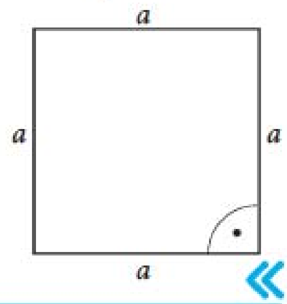
7. Фигуре F_1 и F_2 имају једнаку површину. Могу ли фигуре F_1 и F_2 бити неподударне? Наведи одговарајуће примере.

7.2. Површина правоугаоника и квадрата

Подсетимо се: У млађим разредима научили смо како се рачунају површине правоугаоника и квадрата.



Површина правоугаоника чије странице су дужина a и b износи $\boldsymbol{P = a \cdot b}$.



Површина квадрата чија страница је дужине a износи $\boldsymbol{P = a \cdot a}$. Производ два иста броја назива се квадратом броја, па претходну формулу можемо записати и као $\boldsymbol{P = a^2}$.

ПРИМЕР 1. Квадрат и правоугаоник имају једнаке обиме, по 40 cm. Једна страница правоугаоника је 11 cm. Упореди површине квадрата и правоугаоника.

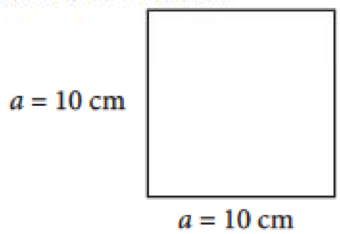
РЕШЕЊЕ Обим квадрата је 40 cm, па дужина странице износи $a = 10$ cm.

Сада је површина квадрата:

$P_{\square} = a^2$

$P_{\square} = 10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 10^2\text{ cm}^2$

$P_{\square} = 100\text{ cm}^2.$



Потребно је израчунати другу страницу правоугаоника. Нека су странице правоугаоника $b = 11$ cm и c. Имамо да је:

$O = 2b + 2c$

$40\text{ cm} = 22\text{ cm} + 2c$

$2c = 18\text{ cm}$

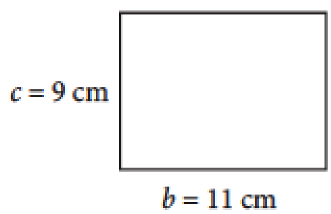
$c = 9\text{ cm},$

а површина правоугаоника:

$P_{\text{▭}} = b \cdot c$

$P_{\text{▭}} = 11\text{ cm} \cdot 9\text{ cm}$

$P_{\text{▭}} = 99\text{ cm}^2.$



Закључујемо да је површина квадрата већа од површине правоугаоника за 1 cm².

ПРИМЕР 2. Површине квадрата и правоугаоника су једнаке и износе по 144 cm^2. Ако је једна страница правоугаоника за 3 cm краћа од странице квадрата, упореди њихове обиме.

РЕШЕЊЕ Потребно је израчунати дужину странице квадрата. Знамо да је површина квадрата $a^2 = 144\ cm^2$. Питамо се који број, помножен самим собом, даје 144. То је број 12. Дакле, $a = 12$ cm. Следи да је једна страница правоугаоника: $b = 12\ cm - 3\ cm = 9\ cm$.

Другу страницу правоугаоника сазнаћемо из површине.

$P_{▭} = b \cdot c$

$c = 144\ cm^2 : 9\ cm$

$c = 16\ cm$

Обим квадрата је

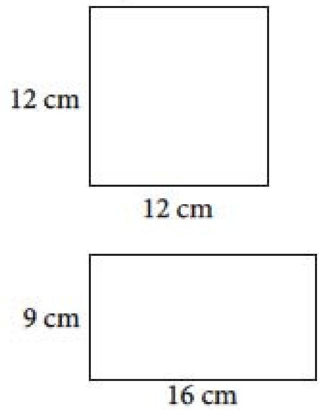
$O_{\square} = 4 \cdot 12\ cm$

$O_{\square} = 48\ cm$,

а обим правоугаоника

$O_{▭} = 2 \cdot 16\ cm + 2 \cdot 9\ cm$

$O_{▭} = 50\ cm$.



Закључујемо да је обим правоугаоника већи од обима квадрата за 2 cm.

ПРИМЕР 3. Под кухиње, облика квадрата странице 5 m, треба поплочати правоугаоним плочицама дужине 50 cm, а ширине 2 dm. Колико таквих плочица је потребно?

РЕШЕЊЕ Прво је неопходно све димензије изразити истом јединицом мере. Ми ћемо то урадити у dm. Страница квадратног пода кухиње је 50 dm, а димензије плочице су 5 dm и 2 dm.

Површина пода кухиње је

$P_к = 50\ dm \cdot 50\ dm = 2500\ dm^2$,

а површина плочице је

$P_п = 5\ dm \cdot 2\ dm = 10\ dm^2$.

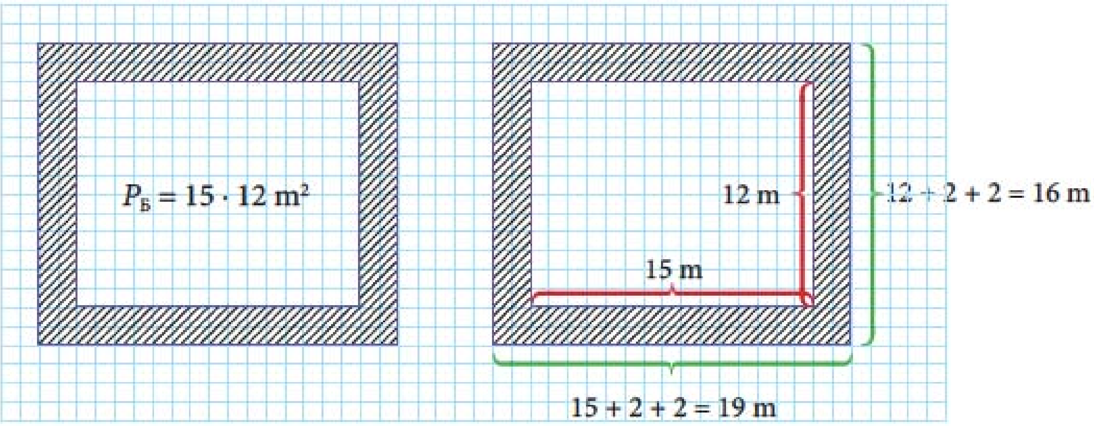
Плочица заузима део површине пода, па је јасно да треба површину пода поделити површином плочице. На тај начин добијамо колико плочица је потребно за покривање пода, дакле:

$2500\ dm^2 : (10\ dm^2) = 250$ плочица.

ПРИМЕР 4. Око базена правоугаоног облика чије димензије су 15 m и 12 m треба направити стазу ширине 2 m. Колика је површина стазе?

РЕШЕЊЕ Потребно је израчунати површину осенченог дела на слици.

То ћемо урадити тако што ћемо од површине већег правоугаоника на слици (базен и стаза) одузети површину мањег правоугаоника (базен).



Пошто је ширина стазе 2 m, на постојеће димензије треба додати по 2 m на обе стране, па је површина базена и стазе $P = 19 \cdot 16\ m^2$. Површина стазе је:

$P_С = P - P_Б$

$P_С = 304\ m^2 - 180\ m^2$

$P_С = 124\ m^2.$

Дакле, површина стазе је $124\ m^2$.

ЗАДАЦИ

8. Странице правоугаоника имају дужине 12 cm и 18 cm. Колики је обим правоугаоника? Колика је површина правоугаоника?

9. Обим квадрата је 1 dm. Колика је површина квадрата?

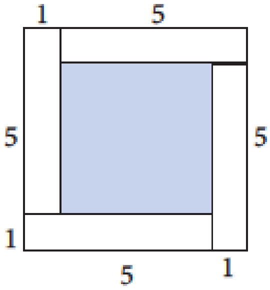
10. Израчунај површину правоугаоника ако су његове странице: а) 5 cm и 8 cm; б) 3,5 cm и 10 cm.

11. Странице правоугаоника су 15 cm и 17 cm, а страница квадрта је 16 cm. Која од датих фигура има већи обим, а која већу површину?

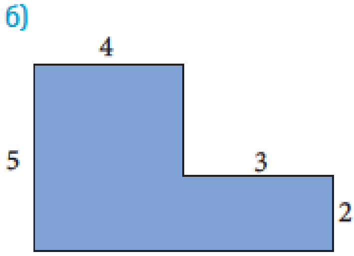
12. Дужина и ширина пода једне просторије су 3,5 m и 2,6 m. Под треба поплочати плочицама дужине 13 cm и ширине 7 cm. Колико плочица је потребно за поплочавање пода просторије?

13. Израчунај површине следећих обојених фигура.

а)

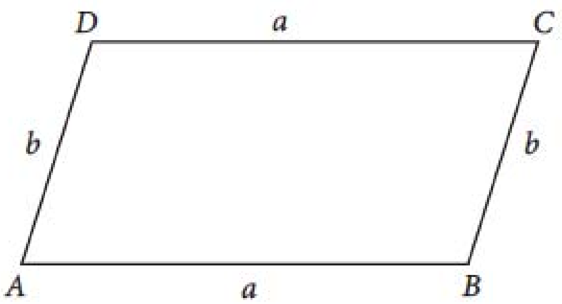


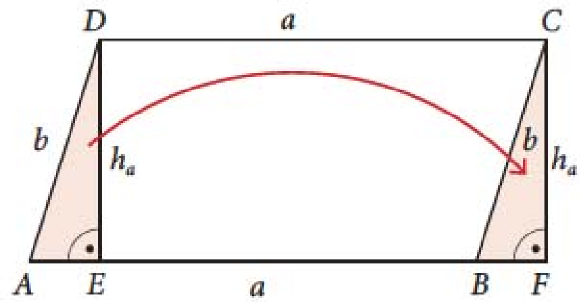
б)



7.3. Површина паралелограма

Пошто знамо како се рачуна површина правоугаоника, то ћемо искористити за извођење формуле за површину паралелограма.





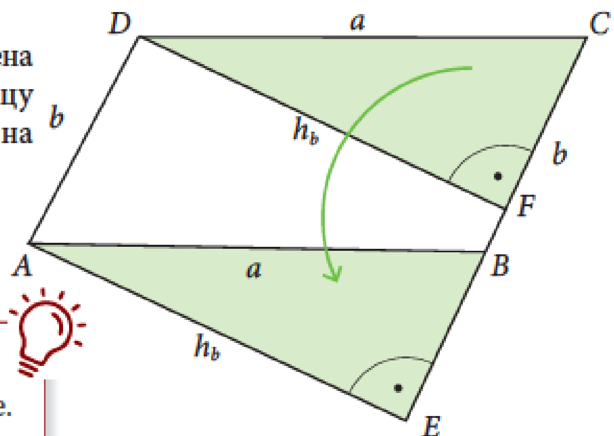
На слици је паралелограм *ABCD* чије странице су *a* и *b*. Идеја је да га претворимо у правоугаоник исте површине.

Тачке *E* и *F* су подножја висина из темена *D* и *C* на праву која садржи страницу *AB*. Правоугли троуглови ΔAED и ΔBFC су подударни. Можемо троугао ΔAED пребацити у положај троугла ΔBFC. На тај начин, паралелограм *ABCD* смо трансформисали у правоугаоник *EFCD* исте површине. Правоугаоник има странице $CD = a$ и $ED = h_a$. Његова површина је $a \cdot h_a$, па је и површина паралелограма:

$$\boldsymbol{P = a \cdot h_a}$$

Слично можемо урадити ако висине из темена *A* и *D* спустимо на праву која садржи страницу *BC*. На основу слике јасно је да је површина паралелограма:

$$\boldsymbol{P = b \cdot h_b}$$



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Површина паралелограма једнака је производу странице и одговарајуће висине.

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Ромб је паралелограм чије странице су једнаке, па је површина ромба:

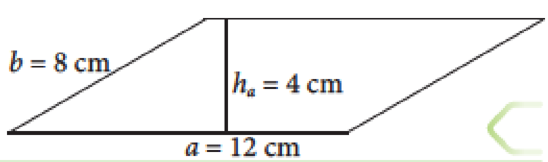
$$\boldsymbol{P = a \cdot h}$$

ПРИМЕР 1. Странице паралелограма су $a = 12$ cm и $b = 8$ cm, а висина $h_a = 4$ cm. Израчунај површину паралелограма и дужину висине h_b.

РЕШЕЊЕ $P = a \cdot h_a = 12 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$

Пошто је $P = b \cdot h_b$, имамо:

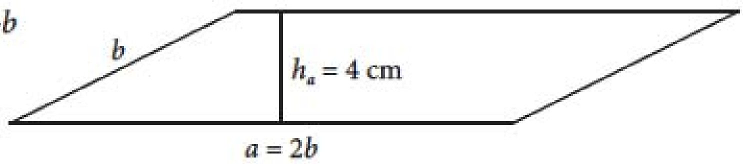
$h_b = P : b = 48 \text{ cm}^2 : (8 \text{ cm}) = 6$ cm.



ПРИМЕР 2. Обим паралелограма је 54 cm, а краћа страница је два пута мања од дуже странице. Ако висина која одговара дужој страници износи 4 cm, одреди висину која одговара краћој страници.

РЕШЕЊЕ Страница b је два пута мања од a, што значи да је a два пута већа од b, тј. $a = 2b$. Сада ћемо помоћу обима сазнати дужине страница.

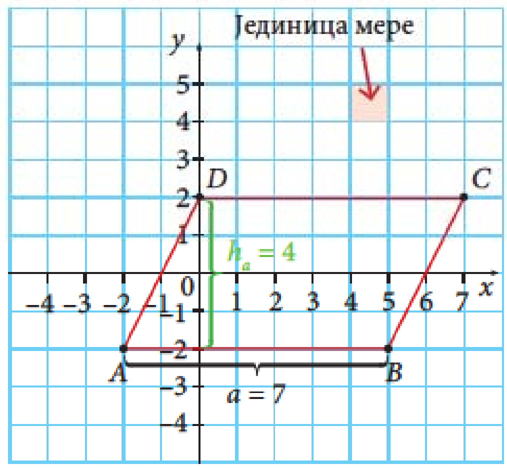
$$O = a + a + b + b$$
$$O = 2b + 2b + b + b$$
$$54\text{ cm} = 6b$$
$$b = 9\text{ cm}$$
$$a = 2b = 18\text{ cm}$$



Наставак задатка је као у Примеру 1. Знамо да је $h_a = 4$ cm, па је $P = a \cdot h_a = 72\text{ cm}^2$. Следи да је $h_b = P : b = 8$ cm.

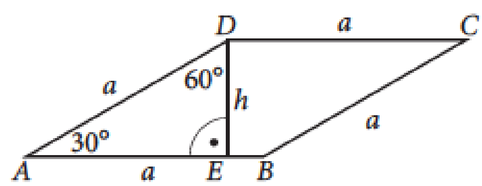
ПРИМЕР 3. Тачке $A(-2, -2)$, $B(5, -2)$ и $C(7, 2)$ су темена паралелограма $ABCD$. Одреди координате четвртог темена паралелограма и израчунај његову површину.

РЕШЕЊЕ За јединицу мере узимамо квадрат чија страница је јединична дуж координатних оса (црвени квадратић на слици). Четврто теме је $D(0, 2)$, а површина је $P = 7 \cdot 4 = 28$ јединица мере.



ПРИМЕР 4. Израчунај површину ромба чија дужина странице је 6 cm, а оштар угао 30°.

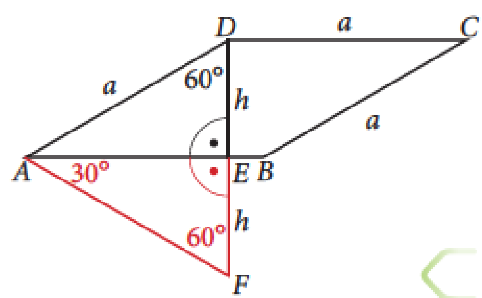
РЕШЕЊЕ За рачунање површине ромба потребно је да знамо дужину висине DE. На слици имамо карактеристични правоугли троугао AED чији оштри углови су 30° и 60°.



Допунили смо га и добили једнакостранични троугао AFD. Јасно је да је $a = 2h$, па је $h = 3$ cm.

Сада остаје да израчунамо површину ромба.

$$P = a \cdot h = 18\text{ cm}^2$$



ЗАДАЦИ

14. Изрежи од картона један паралелограм. Разрежи добијени паралелограм на два дела тако да се од њих може саставити правоугаоник.

15. Колика је површина паралелограма чија је страница 5 cm и њој одговарајућа висина 4 cm?

16. Да ли су сви пралелограми чија је површина 24 cm², а страница 6 cm подударни? Постоји ли квадрат са тим особинама? Постоји ли правоугаоник са тим особинама? Постоји ли ромб са тим особинама?

17. Ако су a, b странице, а h_a и h_b њима одговарајуће висине, O обим и P површина паралелограма допуни табелу:

a	9 cm		14 cm		30 cm
h_a	8 cm	12 cm		6 cm	
b	12 cm	7 cm	9 cm		
h_b		6 cm		4 cm	24 cm
O					96 cm
P			72 cm²	48 cm²	

18. Странице паралелограма имају дужине 20 cm и 30 cm. Висина која одговара дужој страници паралелограма је 18 cm. Колика је површина паралелограма? Колика је дужина друге висине паралелограма?

19. Обим ромба је 60 cm, а његова висина је 12 cm. Израчунај површину ромба.

20. Да ли постоје два различита паралелограма чија је површина 48 cm², а једна страница једнака 8 cm? Објасни одговор.

21. Површина паралелограма A једнака је површини паралелограма B. Да ли су паралелограми A и B подударни?

22. Површина ромба A једнака је површини ромба B. Да ли су ромбови A и B подударни?

23. Површина ромба A једнака је површини ромба B. И висина ромба A једнака је висини ромба B. Да ли су ромбови A и B подударни?

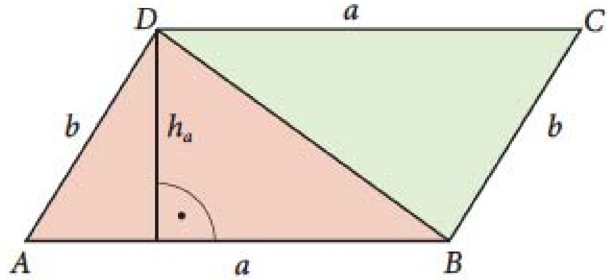
24. Паралелограм $ABCD$ има површину 50 cm². Израчунај површину троуглова ABC и BCD.

25. У координатној xOy равни дате су тачке $A(1, 0)$, $B(6, 0)$, $C(8, 4)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде паралелограм. Колика је површина тог паралелограма?

26. Странице паралелограма су $a = 18$ cm и $b = 12$ cm. Израчунај однос $h_a : h_b$.

27. У паралелограму странице a и b су у односу $a : b = 5 : 3$. Израчунај однос $h_a : h_b$.

7.4. Површина троугла



Пошто знамо како се рачуна површина паралелограма, то ћемо искористити за извођење формуле за површину троугла.

Паралелограм је дијагоналом подељен на два подударна троугла. Јасно је да је површина троугла два пута мања од површине паралелограма. Из претходне лекције знамо да је површина паралелограма једнака производу странице и одговарајуће висине. Одатле лако изводимо формулу за рачунање површине троугла. Не заборавите да троугао има три странице, па свакој од њих одговара по једна висина.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Површина троугла једнака је половини производа странице и њене одговарајуће висине.

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \qquad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b \qquad P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

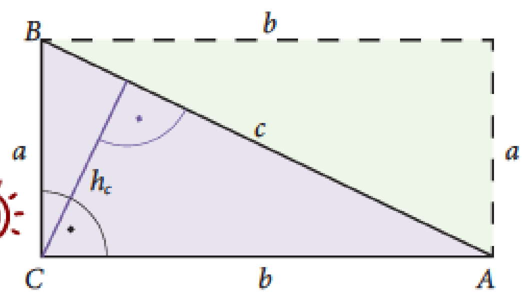
Ове формуле можемо записати и на следећи начин.

$$P = \frac{1}{2} ah_a \qquad P = \frac{1}{2} bh_b \qquad P = \frac{1}{2} ch_c$$

Некоме је згоднији овакав запис.

$$P = \frac{ah_a}{2} \qquad P = \frac{bh_b}{2} \qquad P = \frac{ch_c}{2}$$

Правоугли троугао са катетама a и b представља половину правоугаоника чије странице су a и b. Приметимо да је катета правоуглог троугла уједно и висина која одговара другој катети. На слици је хипотенуза означена са c, а њена одговарајућа висина је h_c.



УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Површину правоуглог троугла можемо рачунати на два начина.

$$P = \frac{ab}{2} \qquad P = \frac{ch_c}{2}$$

ПРИМЕР 1. Површина троугла је 52 cm^2, а страница $b = 13$ cm. Израчунај висину која одговара страници b.

РЕШЕЊЕ Полазимо од формуле:

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2}.$$

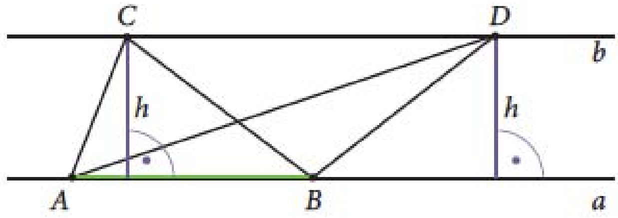
$$2P = b \cdot h_b$$

$$2 \cdot 52\ \text{cm}^2 = 13\ \text{cm} \cdot h_b$$

$$h_b = 104\ \text{cm}^2 : (13\ \text{cm}) = 8\ \text{cm}.$$

ПРИМЕР 2. Дате су две паралелне праве a и b. Тачке A и B су на правој a, а тачке C и D су на правој b. Упореди површине троуглова ΔABC и ΔABD.

РЕШЕЊЕ Приметимо да троуглови ΔABC и ΔABD имају заједничку страницу AB и једнаке одговарајуће висине h, без обзира на положај тачака C и D. Одатле закључујемо да су површине ова два троугла једнаке. $P = \frac{1}{2} h \cdot AB$

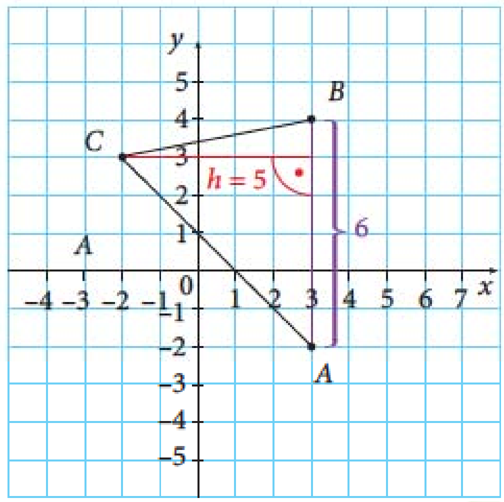


ПРИМЕР 3. Тачке $A(3, -2)$, $B(3, 4)$ и $C(-2, 3)$ су темена троугла ABC. Израчунај површину тог троугла.

РЕШЕЊЕ Дужина странице износи 6, а одговарајуће висине 5 јединичних дужи. Дакле:

$$P = \frac{6 \cdot 5}{2}$$

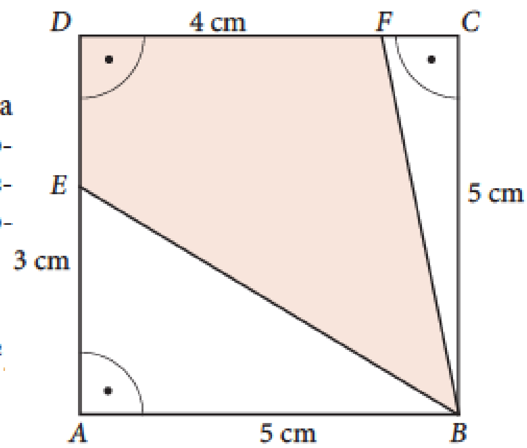
$$P = 15.$$



ПРИМЕР 4. Израчунај површину осенчене фигуре на слици.

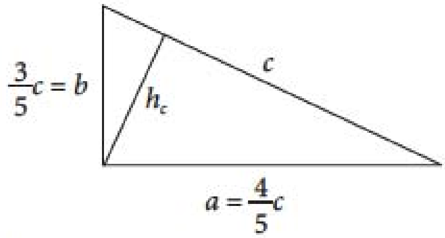
РЕШЕЊЕ На слици је квадрат $ABCD$ чија страница је 5 cm. Површину осенчене фигуре добијамо када од површине квадрата одузмемо збир површина правоуглих троуглова ΔABE и ΔBCF.

$$P = 5 \cdot 5\ \text{cm}^2 - \left(\frac{3 \cdot 5}{2} + \frac{1 \cdot 5}{2}\right)\text{cm}^2 = 15\ \text{cm}^2$$



ПРИМЕР 5. Обим правоуглог троугла је 60 cm. Ако су a и b катете, а c хипотенуза и важи $a = \frac{4}{5}c$ и $b = \frac{3}{5}c$, одреди висину која одговара хипотенузи.

РЕШЕЊЕ $O = a + b + c = \frac{4}{5}c + \frac{3}{5}c + \frac{5}{5}c = \frac{12}{5}c = 60$ cm.



Дакле, $c = 25$ cm.

Одатле произилази да је $a = \frac{4}{5}c = 20$ cm.

$b = \frac{3}{5}c = 15$ cm.

Висину рачунамо помоћу површине $P = \frac{a \cdot b}{2} = 150$ cm². Други начин да се израчуна површина је $P = \frac{c \cdot h_c}{2}$, одакле следи да је $h_c = \frac{2P}{c} = 12$ cm.

ЗАДАЦИ

28. Правоугаоник $ABCD$ има површину 40 cm². Израчунај површину троуглова ABD и BCD.

29. Дужине страница правоугаоника $ABCD$ су $AB = 14$ cm и $BC = 9$ cm. Да ли су троуглови ABC и CDA подударни? Да ли троуглови ABC и CDA имају једнаке површине? Колика је површина троугла ABC? Колика је површина троугла CDA?

30. У троуглу ABC страница AB има дужину 18 cm, а дужина висине CC' је 10 cm. Колики је површина троугла ABC?

31. Ако су a и b дужине страница, а h_a и h_b дужине одговарајућих висина троугла, и P површина троугла, допуни таблицу:

a	20	30	12	
b	15	20		12
h_a	12		8	8
h_b		15	6	
P				60

32. Дужине страница троугла су 13 cm, 14 cm и 15 cm, а његова површина је 84 cm². Израчунај висине тог троугла.

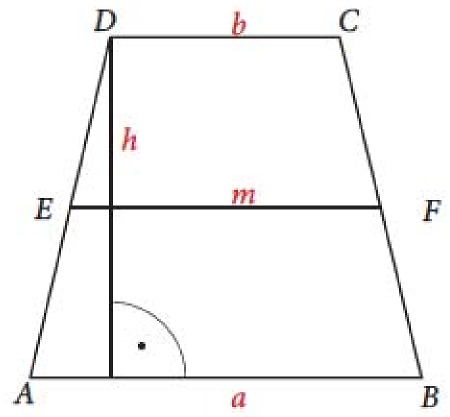
***33.** У троуглу ABC дужина странице $AB = 27$ cm, а дужина висине $CC' = 16$ cm. Тачке K и M деле дуж AB тако да је $AK : AB = 2 : 9$, а $MB : AB = 4 : 9$. Нацртај одговарајућу слику и израчунај: а) дужине дужи AK, KM и MB; б) површине троуглова AKC, KMC и MBC.

34. У једнакокраком правоуглом троуглу дужина хипотенузе је 12 cm. Нацртај одговарајућу слику и израчунај: а) висину која одговара хипотенузи троугла; б) површину троугла.

35. Израчунај дужину катете једнакокрако правоуглог троугла чија је површина 32 cm².

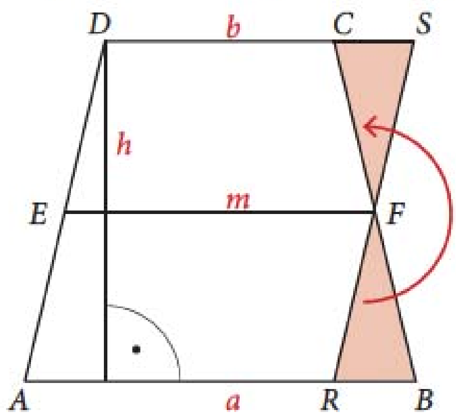
36. Дат је правоугли троугао ABC чије средиште хипотенузе c је M. Одреди површину тог правоуглог троугла, ако је висина h_c једнака 4 cm, а дуж $CM = 5$ cm.

7.5. Површина трапеза



Да бисмо дошли до формуле за рачунање површине трапеза, трансформишимо трапез у неку познату фигуру исте површине као трапез. Урадимо то на два начина.

На слици је трапез $ABCD$. Дуж $EF = m$ је средња линија, а h је висина трапеза.



I начин:

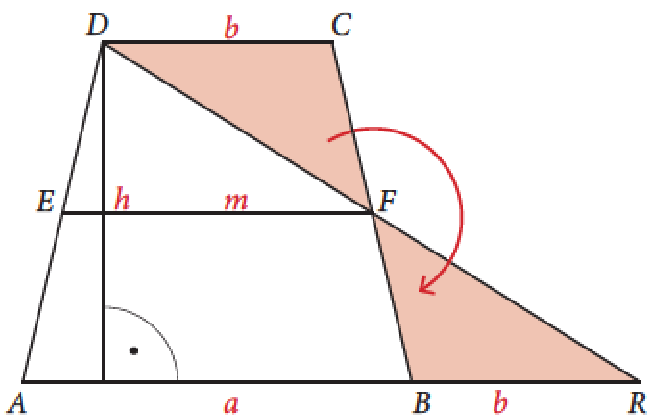
Трансформишимо трапез у паралелограм исте површине. Кроз тачку F повуцимо праву паралелну са AD. Њен пресек са основицом a је тачка R, а са продужетком основице b је тачка S. Троуглови ΔRBF и ΔSCF су подударни по ставу УСУ ($BF = CF$, углови код F су унакрсни, а $\measuredangle RBF = \measuredangle SCF$ као углови на трансверзали). На тај начин смо трапез $ABCD$ трансформисали у паралелограм $ARSD$. Страница тог паралелограма је $AR = EF = m$, а одговарајућа висина h, па је његова површина $P = m \cdot h$. Значи, површина трапеза је:

$$\boxed{P = m \cdot h.}$$

II начин:

Трансформишимо трапез у троугао исте површине.

Продужетак DF сече продужетак основице a у тачки R. Троуглови ΔBRF и ΔCDF су подударни по ставу УСУ ($BF = CF$, углови код F су унакрсни, а $\measuredangle RBF = \measuredangle DCF$ као углови на трансверзали).



На тај начин смо трапез $ABCD$ трансформисали у троугао ΔARD. Страница тог троугла је $AR = a + b$, а одговарајућа висина је h, па је његова површина $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$. То значи, површина трапеза је:

$$\boxed{P = \frac{a+b}{2} \cdot h.}$$

Од раније знамо да је $m = \frac{a+b}{2}$, па је јасно да смо на два начина дошли до исте формуле за рачунање површине трапеза.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Површина трапеза једнака је производу дужине средње линије и висине.

Покушај да трансформишеш трапез у правоугаоник и да на тај начин дођеш до формуле за рачунање површине трапеза.

ПРИМЕР 1. Израчунај површину трапеза чије основице су 7 cm и 5 cm, а висина 4 cm .

РЕШЕЊЕ Прво ћемо израчунати дужину средње линије.

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{7+5}{2}$ cm $= 6$ cm,

па је $P = m \cdot h = 6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$.

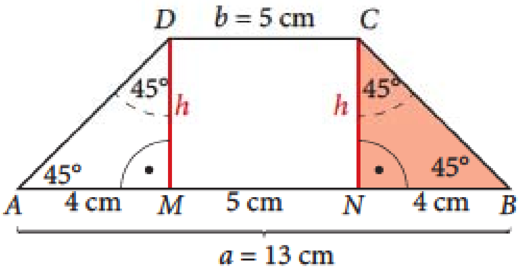
ПРИМЕР 2. Површина трапеза је 102 cm², а дужа основица 21 cm. Ако је висина трапеза 6 cm, одреди дужину краће основице.

РЕШЕЊЕ Из $P = m \cdot h$ добијамо дужину средње линије, $m = \frac{P}{h} = \frac{102}{6}$ cm $= 17$ cm. Пошто је $m = \frac{a+b}{2}$, следи да је $a + b = 2m$, односно $a + b = 34$ cm.
Дато је $a = 21$ cm, па закључујемо да је краћа основица $b = 13$ cm.

ПРИМЕР 3. Израчунај површину једнакокраког трапеза чије основице су 13 cm и 5 cm, а угао на дужој основици 45°.

РЕШЕЊЕ Повукли смо висине из темена C и D. Јасно је да је $\measuredangle MDA = 45°$. Исто важи и за $\measuredangle BCN$. Тако је трапез разложен на два једнакокрака троугла (ΔAMD и ΔNBC) и правоугаоник $MNCD$. Лако закључујемо да је:

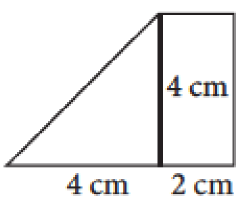
$AB = AM + MN + NB$.



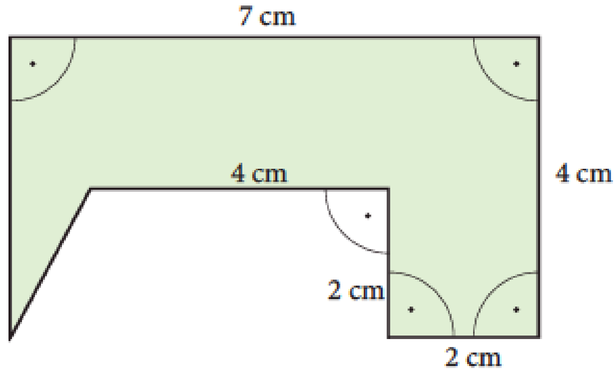
Одатле је $AM = \frac{13-5}{2}$ cm $= 4$ cm, па је и $h = 4$ cm. Израчунајмо средњу линију: $m = \frac{a+b}{2} = 9$ cm. Сада је: $P = m \cdot h = 36\text{ cm}^2$.

ПРИМЕР 4. Правоугли трапез има један угао на основици од 45°. Ако је дужина основице једнака 2 cm а висина 4 cm, колика је површина трапеза?

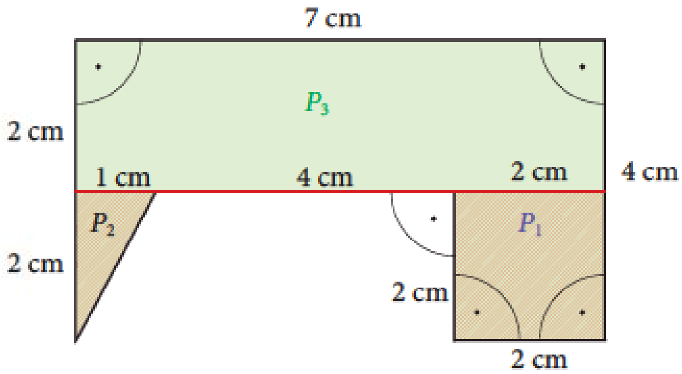
РЕШЕЊЕ Пошто је висина 4 cm, она мора бити краћа од дуже основице, јер иначе не би било угла од 45° на основици. Стога је краћа основица дужине 2 cm, а дужа основица 6 cm, па је површина $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{1}{2}(2+6) \cdot 4\text{ cm}^2 = 16\text{ cm}^2$.



ПРИМЕР 5. Израчунај површину осенчене фигуре.



РЕШЕЊЕ <u>**I начин.**</u> Разложићемо фигуру на познате делове и сабрати њихове површине. Фигуру смо разложили на квадрат, правоугли троугао и правоугаоник. Израчунаћемо редом њихове површине.



$P_1 = 2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$

$P_2 = \dfrac{2 \cdot 1}{2}\text{ cm}^2 = 1\text{ cm}^2$

$P_3 = 7\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 14\text{ cm}^2$

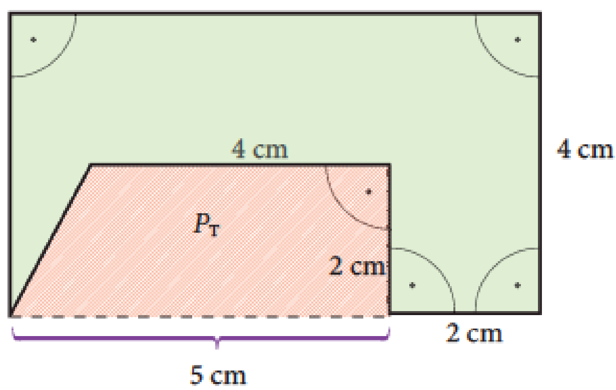
Површина осенчене фигуре је збир ове три површине. Дакле, $P = 19\text{ cm}^2$.

<u>**II начин**</u>. Од површине великог правоугаоника одузећемо површину правоуглог трапеза.

Површина правоугаоника је $P_{\Pi} = 7\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$.

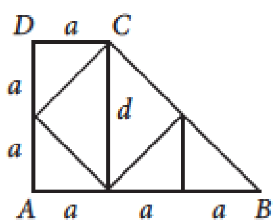
Површина трапеза је:

$$P_{T} = m \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$
$$= \frac{5+4}{2} \cdot 2\text{ cm}^2 = \frac{9}{2} \cdot 2\text{ cm}^2$$
$$= 9\text{ cm}^2.$$



Одатле је површина осенчене фигуре $P_{\Pi} - P_{T} = 28\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2 = 19\text{ cm}^2$.

ПРИМЕР 6. На слици је правоугли трапез $ABCD$. Израчунај површину квадрата чија је дијагонала d, ако је $a = 1$ cm.



РЕШЕЊЕ Површина трапеза је:

$$P_{⏢} = h \cdot \left(\frac{a+3a}{2}\right) = 2a \cdot \frac{a+3a}{2} = 4\text{ cm}^2.$$

Површина квадрата једнака је половини површине трапеза (зашто?), дакле:

$$P_{\square} = \frac{1}{2} P_{⏢} = 2\text{ cm}^2.$$

ЗАДАЦИ

37. Израчунај површину трапеза $ABCD$, ако су његове основице $AB = 15$ cm и $CD = 9$ cm и ако је висина трапеза $CC' = 7$ cm.

38. Одреди површину правоуглог трапеза $MNPQ$, ако је: $MN = 20$ cm, $PQ = 12$ cm, $\measuredangle MNP = 90°$ и $NP = 14$ cm.

39. Допуни таблицу:

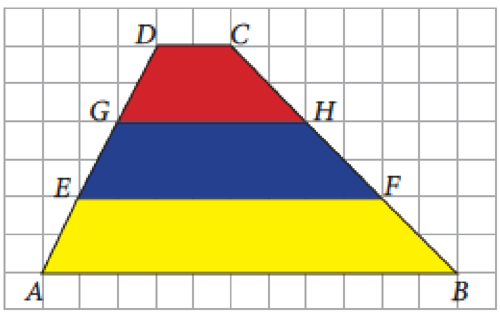
Дужина веће основице трапеза	10 cm	13 cm	18 cm	
Дужина мање основице трапеза	8 cm		12 cm	16 cm
Дужина средње линије трапеза		10 cm		18 cm
Дужина висине трапеза	5 cm	8 cm		
Површина трапеза			150 cm²	216 cm²

40. Површина трапеза је 72 cm², а средња линија трапеза има дужину 12 cm. Колико је растојање између основица трапеза?

41. Дужине основица трапеза $ABCD$ једнаке су 30 cm и 20 cm, а површина трапеза је 450 cm². Колика је дужина висине трапеза $ABCD$?

42. У трапезу $MNPQ$ основице MN и PQ имају дужине 28 cm и 10 cm, а висина трапеза је 16 cm. Одреди површину трапеза $MNPQ$ и израчунај однос површина трапеза на које дати трапез дели његова средња линија.

43. На следећој слици, у квадратној мрежи, дат је трапез $ABCD$, при чему је $CD = 2$ cm. Прегледај слику и одреди површине трапеза: $ABCD$, $ABFE$, $EFHG$, $GHCD$.



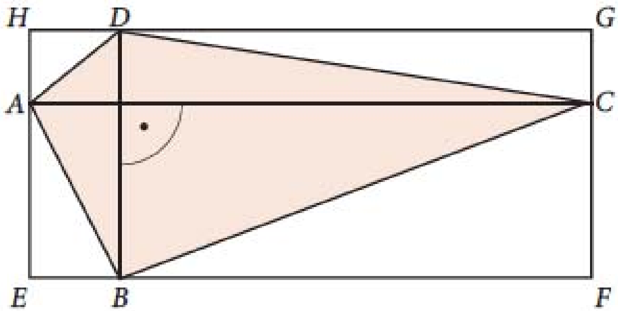
44. Дужина средње линија трапеза $ABCD$ једнака је дужини висине трапеза, а површина трапеза је 100 cm². Одреди основице трапеза, ако се оне разликују за 4 cm.

45. Површина троугла ABC је 60 cm². Ако су M и N средишта страница AC и BC докажи да је четвороугао $ABNM$ трапез и израчунај његову површину.

46. У правоуглом троуглу ABC катете AC и BC имају дужине 12 cm и 16 cm. Средиште катете AC је тачка M, а средиште катете BC је N. Колика је површина трапеза $ABNM$?

47. У координатној xOy равни дате су тачке $A(1, 2)$, $B(7, 2)$ и $C(6, 6)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде једнакокраки трапез. Колика је површина тог трапеза?

7.6. Површина четвороугла са нормалним дијагоналама



На слици је четвороугао $ABCD$ чије дијагонале AC и BD су узајамно нормалне. Кроз темена четвороугла нацртамо праве паралелне дијагоналама. На тај начин, добијамо правоугаоник $EFGH$. Пошто је $EF = AC$ и $FG = BD$, можемо израчунати површину правоугаоника:

$$P = EF \cdot FG = AC \cdot BD.$$

Површина четвороугла $ABCD$ је очигледно једнака половини површине правоугаоника $EFGH$, па је

$$P_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Обично се дијагонале обележавају $AC = d_1$ и $BD = d_2$.

УПАМТИ, ПОВЕЖИ, ЗАКЉУЧИ

Површина четвороугла чије дијагонале су узајамно нормалне једнака је половини производа његових дијагонала.

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Већ знамо да делтоид, ромб и квадрат имају узајамно нормалне дијагонале, па нам ова формула може помоћи да израчунамо њихову површину.

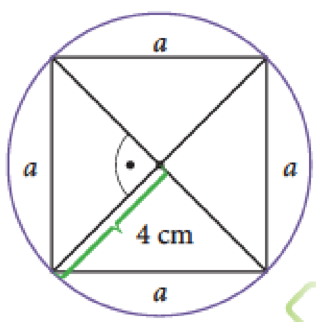
ПРИМЕР 1. Плац је облика четвороугла са нормалним дијагоналама дужина 48 m и 25 m. Колико ари има тај плац?

РЕШЕЊЕ Површина плаца је $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{48 \cdot 25}{2}$ m^2 = 600 m^2 = 6 a.

ПРИМЕР 2. Око квадрата је описан круг полупречника 4 cm. Израчунај површину квадрата.

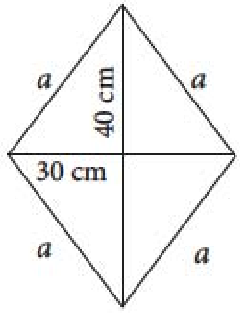
РЕШЕЊЕ Центар круга налази се у пресеку дијагонала квадрата, а полупречник круга једнак је половини дијагонале. Дакле, дужина дијагонале је 8 cm. Пошто се дијагонале квадрата секу под правим углом и међусобно су једнаке, површина је:

$$P = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2}\ \text{cm}^2 = 32\ \text{cm}^2.$$



ПРИМЕР 3. Обим ромба је 100 cm, а дужине дијагонала су 40 cm и 30 cm. Израчунај висину ромба.

РЕШЕЊЕ Из обима ромба одређујемо да је страница $a = 25$ cm. Затим нађимо површину ромба.



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2}\ \text{cm}^2 = 600\ \text{cm}^2.$$

Већ знамо да је површина ромба $P = a \cdot h$,

па је висина ромба:

$h = P : a = 600\ \text{cm}^2 : (25\ \text{cm}) = 24$ cm.

ЗАДАЦИ

48. Дијагонала квадрата има дужину 14 cm. Одреди површину квадрата.

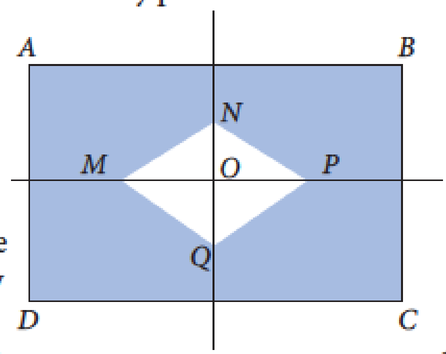
49. Дијагонале ромба су 12 cm и 18 cm. Израчунај површину ромба.

50. Дијагонале делтоида су 20 cm и 30 cm. Колика је површина делтоида.

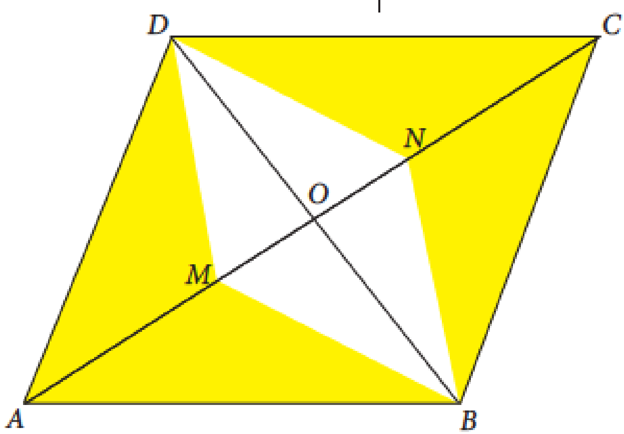
51. Дуж $AB = 16$ cm, пресеца дуж CD и нормална је на дужи $CD = 12$ cm. Израчунај површину четвороугла $ACBD$.

52. Лаза располаже летвицама чије су дужине 32 cm и 40 cm. Колико најмање квадратних центиметара лаког картона треба Лази да би помоћу расположивих летвица направио змаја облика делтоида?

53. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије су странице $AB = 32$ cm и $BC = 20$ cm. На симетралама страница правоугаоника уочене су таке M, N, P и Q, такве да свака од тих тачака полови растојање од центра правоугаоника O до одговарајуће странице правоугаоника (види слику). Израчунај површину обојене фигуре.



54. Дијагонале ромба $ABCD$ су $AC = 18$ cm и $BD = 12$ cm, а тачка O је пресек дијагонала. На дијагонали AC дате су тачке M и N, тако да је $AM = MN = NC$ (види слику). Израчунај површину обојене фигуре.



55. У координатној xOy равни дате су тачке $A(1, 2)$, $B(4, 0)$, $C(7, 2)$ и $D(4, 8)$. Израчунај површину четвороугла $ABCD$.

САЖЕТАК
ПОВРШИНА ТРОУГЛА И ЧЕТВОРОУГЛА

МЕРЕЊЕ ПОВРШИНЕ:

Основна јединица мере за површину је квадратни метар (ознака је m^2). То је квадрат чија страница је дужине 1 m.

$1 cm^2 = 100 mm^2$	Почевши од најмање јединице (mm^2) свака
$1 dm^2 = 100 cm^2$	следећа је 100 пута већа од претходне.
$1 m^2 = 100 dm^2$	
$1 a = 100 m^2$	
$1 ha = 100 a$	
$1 km^2 = 100 ha$	

ПОВРШИНА ПРАВОУГАОНИКА И КВАДРАТА:

$P = a \cdot b$	Површина правоугаоника чије странице су дужина a и b.
$P = a \cdot a$	Површина квадрата чија страница је дужине a.
$P = \frac{d \cdot d}{2}$	Површина квадрата чија дијагонала је дужине d.

ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА:

$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$	Површина паралелограма чије странице су a и b, а висине h_a и h_b.
$P = a \cdot h$	Површина ромба чија страница је a и висина h.
$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	Површина ромба чије дијагонале су d_1 и d_2.

ПОВРШИНА ТРОУГЛА:

$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Површина троугла чије странице су a, b и c, а висине h_a, h_b и h_c.
$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Површина правоуглог троугла чије катете су a и b, а хипотенуза c.

ПОВРШИНА ТРАПЕЗА:

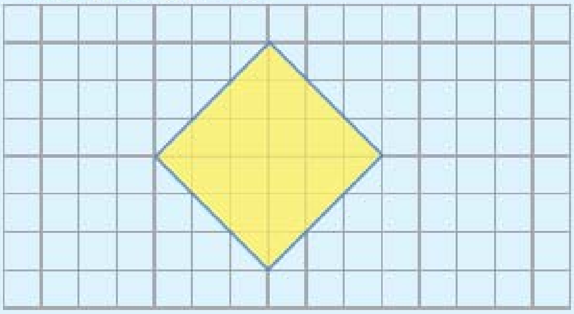
$P = m \cdot h$	Површина трапеза чија средња линија је m, а висина h.

ПОВРШИНА ЧЕТВОРОУГЛА СА НОРМАЛНИМ ДИЈАГОНАЛАМА:

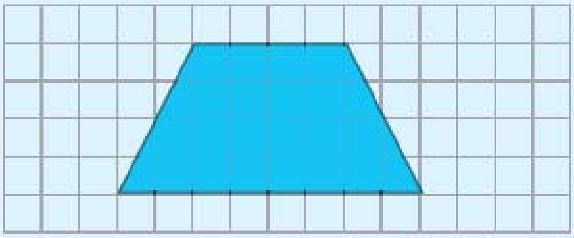
$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	Површина четвороугла чије дијагонале d_1 и d_2 су узајамно нормалне.

ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

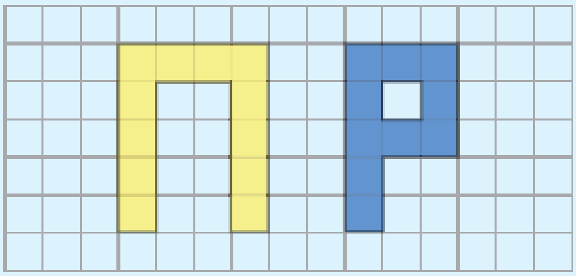
56. Дужина једне дужи у квадратној мрежи је 1 cm. Колика је површина фигуре (квадрата) на наредној слици?



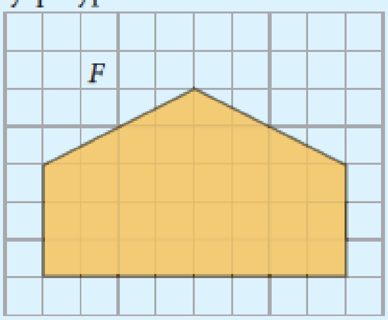
57. Дужина једне дужи у квадратној мрежи је 10 cm. Колика је површина трапеза на слици?



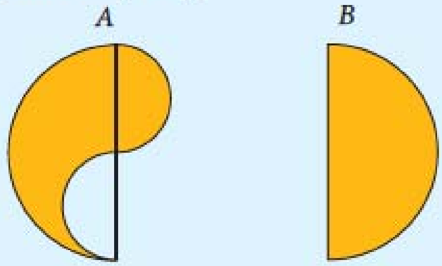
58. Дужина једне дужи у квадратној мрежи је 1 dm. У квадратној мрежи дата су ћириличнa слова П и Р. Колика је њихова површина?



59. У квадратној мрежи чија једна дуж има дужину 1 cm, дата је фигура F. Одреди површину фигуре.



60. У каквом су односу површине фигура A и B? Образложи одговор.



61. Обим правоугаоника је 72 cm, а његове странице се разликују за 4 cm. Одреди површину тог правоугаоника.

62. Квадрат има површину једнаку површини правоугаоника чије су странице 9 cm и 16 cm. Чији је већи обим: квадрата или правоугаоника?

63. У базену чија је дужина 50 m, а ширина 30 m, обележено је игралиште за ватерполо тако што су ивице игралишта за 3 m удаљене од ивица базена. Колика је површина ватерполо игралишта?

64. У координатној xOy равни дате су тачке $A(5, 2)$, $B(5, -3)$, $C(1, -3)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде правоугаоник. Колика је површина тог правоугаоника?

65. Квадрат чија је страница 8 cm, има површину једнаку површини правоугаоника чије се странице односе као 1 : 4. За колико је обим правоугаоника већи од обима квадрата?

66. Ако се свака страница квадрата повећа четири пута, колико се пута повећа његов обим, а колико пута површина?

67. Ако се једна страница квадрата увећа 2 пута, а друга 3 пута, колико пута су обим и површина добијеног правоугаоника већи од обима и површине квадрата?

68. Квадрат странице 16 cm са две праве подељен је на четири подударна троугла. Колика је површина сваког од тих троуглова?

69. Ако се страница квадрата повећа за 3 cm његова површина се повећа за 57 cm^2. Колики је обим првог квадрата?

70. Странице два квадрата разликују се за 1 cm, а разлика њихових површина је 63 cm^2. Одреди обиме и површине тих квадрата.

***71.** Збир обима два квадрата је 200 cm, а разлика њихових површина је 100 cm^2. Колики су обими, а колике површине тих квадрата?

72. Од картонских квадрата чије су странице 3 cm и 4 cm изрезивањем и састављањем, без остатка картона, направљен је нови квадрат. Колики су обим и површина тако добијеног квадрата?

73. Странице правоугаоника се разликују за 2 cm. Ако сваку страницу правоугаоника увећамо за 3 cm, тада се површина правоугаоника повећа за 105 cm^2. Израчунај обим и површину првобитног правоугаоника.

74. Квадрат и правоугаоник имају једнаке површине. Збир две различите странице правоугаоника је 13 cm, а разлика 5 cm. Ко има већи обим: квадрат или правоугаоник?

75. За покривање пода потребно је 200 плочица облика правоугаоника 22 cm · 11 cm. Колико квадратних плочица величине 20 cm · 20 cm треба за покривање истог пода?

76. Од картонског квадрата чија је страница 10 cm изрезан је квадрат странице 6 cm. Може ли се од остатка картона изрезивањем и састављањем, без остатка картона, направити нови квадрат? Колики су страница и обим добијеног квадрата?

77. Правоугаоник обима 96 cm једном правом је подељен на два подударна квадрата. За колико је обим правоугаоника већи од обима једног од добијених квадрата?

78. Ако се већа страница правоугаоника смањи за 4 cm, а мања повећа за 3 cm, добија се квадрат чија је површина једнака површини правоугаоника. Ко има већи обим дати правоугаоник или добијени квадрат?

79. Израчинај површину паралелограма $ABCD$, ако је $AB = 11$ cm, $BC = 8$ cm и $\measuredangle ABC = 150°$.

80. Један једнакокрако правоугли троугао има катету дужине 10 cm. Од шест таквих подударних троуглова, састављен је паралелограм. Нацртај тај паралелограм. Колика је површина тог паралелограма?

81. Колика је површина ромба чија је страница 10 cm, а један угао 30°.

82. Дијагонале паралелограма $ABCD$ секу се у тачки O. Конструиши праву p која дати паралелограм дели на два паралелограма једнаких површина. Колико има решења?

83. Дужина дијагонале квадрата је 12 cm. Одреди површину квадрата.

84. Дужине висина правоуглог троугла су 12 cm, 15 cm и 20 cm. Нацртај одговарајућу слику и израчунај: а) дужину мање катете троугла; б) дужину веће катете троугла; в) површину троугла; г) дужину хипотенузе троугла.

85. Дужина странице квадрата $ABCD$ је 10 cm. Тачка M је од странице AB удаљена 3 cm, а од странице BC 4 cm. Нацртај одговарајућу слику и израчунај површине троуглова: а) ΔABM; б) ΔBCM; в) ΔCDM; г) ΔDAM.

***86.** У једнакокраком троуглу ABC је $AC = BC = 16$ cm, а угао ABC једнак је 75°. Нацртај одговарајућу слику и израчунај површину троугла ABC?

***87.** Дијагонале трапеза $ABCD$ ($AB \| CD$) секу се у тачки O. Докажи да троуглови AOD и BOC имају једнаке површине.

88. У координатној xOy равни дате су тачке $A(2, 1)$, $B(7, 1)$ и $C(5, 5)$. Колика је површина троугла ABC?

89. У координатној xOy равни дате су тачке $A(1, 2)$, $B(1, 8)$ и $C(5, 6)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде правоугли трапез. Колика је површина тог трапеза?

***90.** У једнакокраком трапезу $ABCD$, основица AB је два пута већа од основице CD. Израчунај површину трапеза ако је крак $BC = 20$ cm и $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD = 75°$.

***91.** Средња линија трапеза дели трапез на два трапеза чије се површине односе као 3 : 5. Израчунај однос основица трапеза.

92. У паралелограму $ABCD$ дијагонале AC и BD паралелограма секу се у тачки O. Одреди праву p која садржи тачку O и дели паралелограм на два четвороугла једнаких површина. Колико таквих правих p се може конструисати?

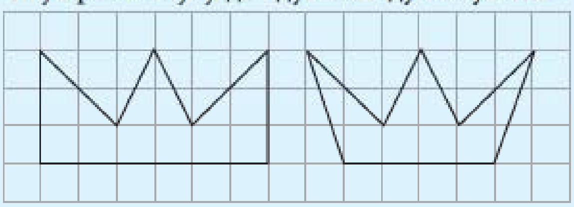
93. У координатној xOy равни дате су тачке $A(5, 2)$, $B(8, 5)$ и $C(5, 10)$. Одреди координате тачке D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде делтоид. Колика је површина тог делтоида?

***94.** Ако су два троугла подударна, онда су њихове површине једнаке. Докажи.

***95.** Постоји ли троугао чије су висине:
а) 1, 2 и 3; б) 4, 6 и 8?

96. Тачке A_1, B_1 и C_1 су редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Ако је површина троугла ABC једнака 2020, колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?

97. Одреди површине фигура нацртаних у квадратној мрежи чија једна дуж има дужину 1 cm.



98. У квадрату $ABCD$, чија је страница 6 cm, тачке M и N су средишта страница AB и BC. Колика је површина троугла MND?

99. Странице AB, BC и CA троугла ABC, продужене су преко темена B, C и A за своју дужину, тако да је $AB = BA'$, $BC = CB'$ и $CA = AC'$. Ако је површина троугла ABC једнака 11, колика је површина троугла $A'B'C'$?

100. Дат је једнакокраки троугао ABC, при чему је $AC = AB = 20$, а угао BAC је једнак 30°. Израчунај површину троугла ABC.

101. На страници BC троугла ABC дата је произвољна тачка D. Тачка M дели дуж AD тако да је $AM : MD = 2 : 3$. Одреди површину троугла ABC, ако је површина троугла BMC једнака 18.

102. У Декартовом координатном систему дате су тачке $A(6, -2)$, $B(-2, 2)$ и $C(4, 8)$. Колика је површина троугла ABC?

***103.** Дат је квадрат $ABCD$ чија је страница једнака 4. Могу ли се у унутрашњој области тог квадрата изабрати две тачке X и Y, тако да добијени шестоугао $AXBCYD$ има површину 6?

***104.** Дуж AC дужине 14 је својом унутрашњом тачком B подељена у односу $3 : 4$. Над дужима AB и BC са разних страна у односу на AC конструисани су квадрати $ABDE$ и $BCFG$. Нека су M и N пресеци дијагонала добијених квадрата. Израчунај површину четвороугла $MNCD$.

***105.** Тачка M је средиште крака BC трапеза $ABCD$. Израчунај површину троугла AMD, ако је површина трапеза једнака 16.

***106.** У једнакокраком трапезу чији краци имају дужину 10, једна основица је два пута већа од друге, а углови на основици су 75°. Израчунај површину тог трапеза.

***107.** Дужине свих страница троугла T су мање од 1 cm, а дужине свих страница троугла T' су веће од 100 cm. Може ли површина троугла T бити већа од површине троугла T'?

***108.** Постоји ли троугао такав да је дужина једне висине троугла једнака збиру дужина друге две висине? Ако такав троугао постоји, одреди странице бар једног таквог троугла.

***109.** Површина трапеза је 80 cm², а једна основица трапеза је три пута већа од друге. Одреди површине два трапеза на који средња линија дели тај трапез.

***110.** У унутрашњој области паралелограма $ABCD$ изабрана је произвољна тачка M. Дужи MA, MB, MC и MD деле паралелограм на четири троугла ABM, BCM, CDM и DAM чије су површине редом P_1, P_2, P_3, P_4. Докажи да је:
$P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

***111.** Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ чије су странице AB и CD тачкама M и N, односно P и Q подељене на по три једнака дела. Докажи да је површина четвороугла $MNPQ$ једнака једној трећини површине четвороугла $ABCD$.

112. Дат је паралелограм $ABCD$. Конструиши праву p која дати паралелограм дели на две фигуре једнаких површина. Колико таквих правих постоји?

113. Основице једнакокраког трапеза су 2 и 8, а угао на већој основици је једнак 45°. Одреди површину трапеза.

114. Докажи да права која садржи средишта основица трапеза дели трапез на два трапеза једнаких површина.

***115.** Нека је M средиште крака BC трапеза $ABCD$. Докажи да је површина ΔAMD једнака половини површине трапеза.

***116.** У трапезу $ABCD$ чије су основице AB и CD, тачка M је средиште дужи BC, а E је подножје нормале из M на крак AD. Ако је $AD = 5$ и $EM = 4$, колика је површина датог трапеза?

117. Одреди површину четвороугла $ABCD$ чија темена су у координатној равни дата координатама: $A(-5, -1)$; $B(-1, 7)$; $C(3, 3)$, $D(5, -3)$.

***118.** У једнакокраки трапез $ABCD$, чији крак је једнак 9, уписана је кружница полупречника 4. Израчунај површину трапеза.

***119.** Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине P. Нека су K, L, M и N редом средишта страница AB, BC, CD и DA датог четвороугла. Докажи да је $KLMN$ паралелограм и израчунај његову површину.

***120.** Дат је квадрат $ABCD$, чија је површина 100 cm². Нека су M, N, P и Q редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Пресеком дужи AP, BQ, CM и DN дефинисан је један четвороугао. Докажи да је добијени четвороугао квадрат и израчунај његову површину.

***121.** Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Докажи да је производ површина троуглова AOB и COD једнак производу површина троуглова BOC и DOA.

***122.** Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине 8 cm². Нека су M, N, P и Q тачке правих AB, BC, CD и DA такве да су B, C, D и A редом средишта дужи AM, BN, CP и DQ. Израчунај површину четвороугла $MNPQ$.

***123.** Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Ако су површине троуглова AOB, COD и BOC једнаке редом 8, 18 и 9, колика је површина троугла DOA?

***124.** Одреди површину трапеза $ABCD$ чији је крак $BC = 6$, ако су одстојања темена A и D од праве BC једнака 7 и 5.

***125.** Дат је квадрат $ABCD$ чија је површина 81 cm². Нека су K и L, M и N, P и Q, R и S тачке које, редом, странице AB, BC, CD и DA тог квадрата деле на три једнака дела. Ако се нацртају дужи KN, MQ, PS и RL, онда њихови међусобни пресеци одређују четвороугао. Докажи да је добијени четвороугао квадрат и израчунај његову површину.

***126.** У једнакокраки трапез уписана је кружница. Докажи да симетрала тупог угла трапеза дели површину трапеза на два једнака дела.

***127.** У координатној равни дате су тачке: $A(-2, -2)$; $B(8, 0)$ и $C(5, 5)$. Одреди површину трапеза $ABCD$, ако су AB и CD основице, а теме D припада y-оси.

ТАЧНО – НЕТАЧНО ПИТАЛИЦЕ

1. Дијагонала сваког четвороугла дели тај четвороугао на два троугла једнаких површина.	тачно	нетачно
2. Ако су две фигуре подударне, њихове површине су једнаке.	тачно	нетачно
3. Површина квадрата чија је страница 5 cm је 20 cm².	тачно	нетачно
4. Ако је обим правоугаоника 14 cm, онда је његова површина 30 cm².	тачно	нетачно
5. Ако је површина једнакокрако правоуглог троугла 9 cm², његова хипотенуза је 6 cm.	тачно	нетачно
6. Површина паралелограма једнака је производу дужина странице и одговарајуће висине паралелограма.	тачно	нетачно
7. Површина делтоида једнака је производу дужина његових дијагонала.	тачно	нетачно
8. Површина трапеза чије су основице 10 cm и 8 cm, а висина 6 cm има површину 54 cm².	тачно	нетачно
9. Површина троугла чије су странице 5 cm и 6 cm једнака је 30 cm².	тачно	нетачно
10. Дијагонале квадрата деле квадрат на четири троугла једнаких површина.	тачно	нетачно

ПРЕДЛОГ ТЕСТА

1. Површина правоугаоника чије су странице 2,4 cm и 5 cm је:

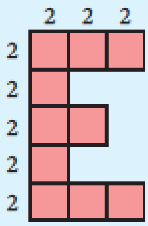
А) 10 cm²; Б) 12 cm; В) 7,4 cm²; Г) 12 cm²; Д) 24 cm².

2. Ако је обим квадрата 48 cm, онда је његова површина

А) 144 cm²; Б) 576 cm²; В) 100 cm²; Г) 169 cm²; Д) 121 cm².

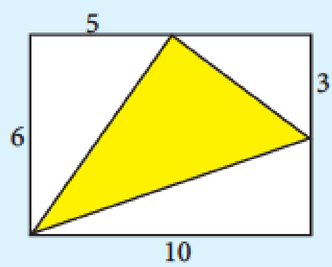
3. Површина обојене фигуре (облика слова Е) на слици је:

А) 10;
Б) 20;
В) 30;
Г) 36;
Д) 40.



4. Површина обојене фигуре на слици је:

А) 19,5;
Б) 20;
В) 21,5;
Г) 22;
Д) 22,5.



5. Дијагонале $AC = 18$ cm и $BD = 24$ cm четвороугла $ABCD$ су нормалне. Површина четвороугла $ABCD$ је:

А) 196 cm²; Б) 216 cm²; В) 384 cm²; Г) 400 cm²; Д) 432 cm².

6. Средња линија трапеза је 22 cm, а висина трапеза је 7 cm. Површина трапеза је:

А) 77 cm²; Б) 110 cm²; В) 144 cm²; Г) 154 cm²; Д) 177 cm².

7. Једна дијагонала ромба $ABCD$ има дужину 16 cm, а друга 15 cm. Површина ромба $ABCD$ је:

А) 120 cm²; Б) 160 cm²; В) 180 cm²; Г) 225 cm²; Д) 240 cm².

8. Основице трапеза $ABCD$ су $AB = 20$ cm и $CD = 12$ cm, висина $CC' = 10$ cm и $\measuredangle ABC = 45°$. Права p која је паралелна са краком BC и садржи теме D пресеца основицу AB у тачки D'. Тада је површина трапеза $D'C'CD$ једнака:

А) 60 cm²; Б) 65 cm²; В) 70 cm²; Г) 100 cm²; Д) 120 cm².

КЉУЧНИ ПОЈМОВИ (обнови пре решавања контролне вежбе):

Површина

Површина четвороугла са нормалним дијагоналама

Површина правоугаоника

Површина квадрата

Површина паралелограма

Површина троугла

Површина трапеза

ПРЕДЛОГ КОНТРОЛНЕ ВЕЖБЕ

1.1.	Обим квадрата је 64 cm. Израчунај површину тог квадрата.	**15**
1.2.	Колико квадратних плочица димензија 25 cm са 25 cm треба набавити да би се поплочао под купатила чија је дужина 3,5 m, а ширина 3 m?	**20**
1.3.	Странице правоугаоника се разликују за 2 cm. Ако сваку страницу правоугаоника увећамо за 3 cm, тада се површина правоугаоника повећа за 105 cm². Израчунај обим и површину првобитног правоугаоника?	**25**
2.1.	Израчунај површину паралелограма $ABCD$, ако је његова основица $AB = 11{,}5$ cm, а висина $CC' = 8$ cm.	**15**
2.2.	Сваки од шест подударних једнакокрако правоуглих троуглова има катету дужине 12 cm. Нацртај паралелограм састављен од тих шест троуглова. Колика је површина тог паралелограма?	**20**
2.3.	Колика је површина ромба чија је страница 16 cm, а један угао 30°.	**25**
3.1.	Дијагонале правоугаоника $ABCD$ секу се у тачки O. Израчунај површине троуглова AOB и BOC, ако је $AB = 20$ cm и $BC = 12$ cm.	**15**
3.2.	У координатној xOy равни дате су тачке $A(2, 1)$, $B(2, 8)$ и $C(6, 8)$. Колика је површина троугла ABC?	**20**
3.3.	У координатној xOy равни дате су тачке $A(5, 1)$, $B(8, 4)$. Одреди координате тачака C и D, тако да добијени четвороугао $ABCD$ буде квадрат. Колика је површина тог квадрата?	**25**
4.1.	У трапезу $ABCD$, основице AB и CD имају дужину 16 cm и 14 cm, а висина трапеза CC' има дужину 12 cm. Одреди површину трапеза.	**15**
4.2.	У правоуглом троуглу ABC катете AC и BC имају дужине 10 cm и 26 cm. Средиште катете AC је тачка M, а средиште катете BC је N. Колика је површина трапеза $ABNM$?	**20**
4.3.	Дат је делтоид $ABCD$ тако да је $AB = BC = 30$ cm, $CD = DA = 40$ cm и $\measuredangle BCD = 90°$. Одреди дијагонале AC и BD делтоида $ABCD$, ако су њихови мерни бројеви два узастопна парна броја.	**25**

8 РЕШЕЊА

1 ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

1. а) N_0; б) N; в) $\emptyset$; г) $\{0\}$. **2.** $S = \{1, 4, 9, 16, 28\}$.

3. $P = \{0, 3, 4, 17, 23\}$. **4.** а) 12; б) 4; в) 22; г) 52.

5. а) 7; б) 50; в) 18; г) 1012.

6. а) –12°C; б) 1347 m; в) –7 m; г) 36,5°C.

7. A: +17; B: –6.

8. $\{5, 91\} \subset Z^+$; $\{-14, -26\} \subset Z^-$.

9. –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. **10.** –3, –2, –1, 0, 1, 2.

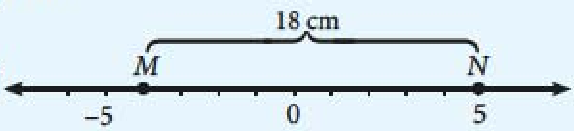
11. а) 2; б) 1. **12.** $P = \{-45, -39, -26, -4, -2\}$.

13. а) –1; б) –2.

14.

15. а) 2 cm.

б)



16. а) Z; б) N_0; в) Z^-; г) $\emptyset$.

17. а) Z; б) N; в) $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$; г) $\emptyset$.

18. а) $\{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$; б) $\emptyset$; в) Z^+; г) Z^-.

19. –6, –2, –9. **20.** 4, 1, 8, 0. **21.** $x \in \{-11, 12, -24, 32, 100\}$.

22. Сви. **23.** 9, 5, 2, 0, 13.

24.

x	5	–2	–7	5	0	–11	17	–4
$-x$	–5	2	7	–5	0	11	–17	4
$\lvert x \rvert$	5	2	7	5	0	11	17	4

25. а) –24; б) 17; в) –8; г) –4; д) 22. **26.** 5.

27. а) 0; б) –2 и 2; в) –7 и 7; г) ниједан. **28.** 4.

29. а) Сјеница; б) Ниш.

30. 12, 6, 3, 9. Најближи нули је –3.

31. а) 0 < 32; б) –26 < 0; в) –13 < 12; г) 17 < 45.

32. а) >; б) <; в) >; г) >.

33. Тачно је за позитивне бројеве a. За остале је нетачно. **34.** Девет. **35.** а) $|-1|$; б) 2; в) $-(-7)$.

36. $b < a < c$. **37.** Када је $a \neq 0$, тада је $-|a|$ негативан број, па је он увек мањи од позитивног броја $|a|$. Једнакост важи када је $a = 0$.

38. $C = \{-6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6\}$.

39.

Приход	2000	3400	5700	7300
Расход	1200	4000	5700	10000
Салдо	800	–600	0	–2700

40. Лазин салдо је –5000 динара. Мама и тата ће морати да покрију дуг од 5000 динара.

41. $C < B < A$.

42. $-1 + (-7) = -2 + (-6) = -3 + (-5) = -4 + (-4) = -5 + (-3) = -6 + (-2) = -7 + (-1)$.

43. а) –5; б) 12; в) 8; г) –6.

44. 3. **45.** 12. **46.** 16. **47.** –15.

48. а) –8; б) –16; в) –7; г) 9. **49.** а) 12; б) –14; в) –6; г) –8.

50. $C = B < A$. **51.** а) 0; б) 7; в) –16.

52.

x	3	4	5	6	(–1)	(–2)	(–3)	(–4)
y	(–11)	(–10)	(–9)	(–8)	(–7)	(–8)	(–10)	11
$x - y$	14	14	14	14	6	6	7	–15

53. а) 9; б) –5; в) 7; г) –2.

54. –1 и 7. **55.** 2 и 4.

56. Не може. Ако је збир 8, разлика апсолутних вредности не може бити већа од 8.

57. а) 100 + 28 = 128; б) 100 + 29 = 129; в) 79 · 100 = 7900; г) 200 – 100 = 100.

58. а) 0; б) 0. **59.** 0. **60.** а) 2; б) 0; в) –4.

61. а) –1; б) –18. **62.** а) –14; б) 5. **63.** а) –2; б) –18.

64. а) –9; б) 22. **65.** а) –8; б) –16. **66.** а) 5; б) 17.

67. 8. **68.** $1 - (3 - 2) = 0$. **69.** 15. **70.** –3.

71. $1 - (2 + 3 - 4 + 5 - 6) = 1$.

72. $1 - 2 + 3 - (4 + 5 - 6) = -1$.

73. $55 - (-15) = 70$. **74.** –100.

75. 0. **76.** 0. **77.** 0.

78. а) 6; б) 2; в) 2. **79.** –5. **80.** Да, једнаки су.

81. а) –8; б) –35; в) –78; г) –230.

82.

x	3	4	5	6	(–1)	(–2)	(–3)	(–4)
y	(–11)	(–10)	(–9)	(–8)	7	8	9	0
$x \cdot y$	–33	–40	–45	–48	–7	–16	–27	0

83.

$\cdot$	(−9)	(−8)	(−7)	(−6)	(−5)
(−2)	18	16	14	12	10
(−4)	36	32	28	24	20
(−6)	54	48	42	36	30
(−8)	72	64	56	48	40
(−10)	90	80	70	60	50

84. а) $x = 14$; б) $x = -8$; в) $x = -5$; г) $x = 6$.

85. 18 или 78. **86.** а) 120; б) 0; в) 24; г) 840.

87. Седам различитих вредности. **88.** 0.

89. Позитиван. **90.** Један начин, бројеви −1, 1 и 5. **91.** 0.

92. Три решења: $2 \cdot 3 \cdot 4$ или $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ или $(-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1)$.

93. Први број је 11, а остала два 0 и −10.

94. а) −7; б) −7; в) −1. **95.** а) $-n$; б) $-n$; в) n.

96. а) −23; б) 14; в) 6; г) −18. **97.** а) −2; б) −9; в) −4; г) −4.

98.

x	12	14	(−16)	(−18)	(−20)	(−22)	(−24)	(−26)
y	(−3)	(−2)	(−8)	(−6)	5	11	12	13
$x : y$	−4	−7	2	3	−4	−2	−2	−2

99. Да. **100.** а) 2; б) 4; в) 17; г) 5.

101. Веће је $(-100) : 50$.

102. а) $x = 14$; б) $x = -24$; в) $x = -2$; г) $x = 3$.

103.

:	(−12)	8	(−14)	28	(−50)
1	−12	8	−14	28	−50
(−1)	12	−8	14	−28	50
2	−6	4	−7	14	−25
(−2)	6	−4	7	−14	25

104. −1. **105.** Четири пута. **106.** −9. **107.** −1.

108. 21. **109.** а) −2; б) −4; в) −10.

110. а) (13, 14, 15); б) (54, 55, 56); в) (220, 221, 222); г) (499, 500, 501); д) (1 010, 1 011, 1 012). **111.** 111.

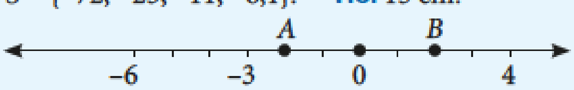
112. *А*: −2°C; *Б*: 3°C; *В*: 0°C; *Г*: 2°C; *Д*:−3°C; *Ђ*: 4°C. **113.** 0.

114.

	−7	3	−2	4	0	−9	5	−6	10
A	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
B	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
C	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$

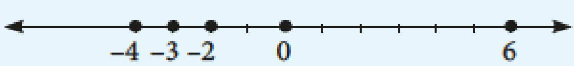
115. $S = \{-72, -25, -11, -6,1\}$. **116.** 15 cm.

117.



118. 4 и −1. **119.** $B = \{7,-8, 13, 26, -35\}$.

120.



121. 0. **122.** $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

123. $T = \{5, 11, 12, 28, 41\}$. **124.** 55. **125.** 6.

126. Оба броја $|a|$ и $|-a|$ су ненегативна, па је и њихов збир ненегативан. Једнакост важи за $a = 0$.

127. Да. **128.** Само број 0.

129.

$-5 < -1 < 0 < 3 < 6.$

130. $-45 < -24 < -17 < -9 < 0 < 13 < 26 < 56$.

131. $A = \{3, 12, 28, 34\}$ и $B = \{-100, -41, -11, -5\}$; $A \cup B = S$; $A \cap B = \emptyset$. **132.** Четири.

133. а) 2 или 1; б) 6 или 5 или ... 1; в) 0; г) 9.

134. Четири вредности, 0 или 1 или 2 или 3.

135. $y < x$. **136.** Да. **137.** а) 4; б) 6; в) −17; г) 0.

138.

x	3	4	5	6	(−1)	(−2)	(−3)	(−4)
y	(−11)	(−10)	(−9)	(−8)	7	8	9	0
$x + y$	−8	−6	−4	−2	6	6	6	−4

139. а) 3; б) −7; в) −12; г) −4.

140. $a = 2$; $b = -5$; $c = -9$; $d = 3$; $c < b < a < d$.

141. а) −7; б) 16; в) 0. **142.** 4°C. **143.** 164 cm.

144. −3. **145.** 0. **146.** Бар два узастопна цела броја.

147. а) 29; б) −21; в) −5; г) −7. **148.** а) −5; б) 17.

149. $a = 6$; $b = -3$; $c = -23$; $d = 13$; $c < b < a < d$.

150. а) 5; б) −12; в) 17; г) −13. **151.** −7 и 7.

152. Збир 0; разлика −2.

153. а) −20; б) −6; в) −26; г) −14; д) 14. **154.** 17.

155. −14. **156.** Умањеник 5; умањилац 12.

157. 2 и −7. **158.** На три начина: −1 и 4; 1 и −4; 2 и −2.

159. а) 28; б) 24; в) 66; г) 45. **160.** 6 или −6.

161. Четири решења: −38, −10, 10 и 38.

162. а) 14; б) 48; в) −120; г) 60.

163.

x	2	3	(−1)	(−2)	(−3)	(−4)	(−5)
y	(−10)	(−9)	(−8)	7	8	9	0
z	(−1)	(−2)	(−3)	1	2	3	4
$x \cdot y \cdot z$	20	54	−24	−14	−48	−108	0

164. а) −60; б) 0; в) 0; г) 125. **165.** +125 000 динара.

166. а) −2; б) 2; в) 2. **167.** 0. **168.** а) 20 230; б) −2 700; в) 0.

169. Негативан. **170.** а) 2; б) 4; в) −2; г) 20.

171. 5. **172.** −4. **173.** −8. **174.** 0. **175.** Не. **176.** Два.

177. Не. **178.** 8. **179.** 1 012. **180.** 4 570. **181.** а) −5; б) 15.

182. а) Да, $1 - 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = 0$;
б) не, јер се не може добити паран број ако у збиру има непаран број непарних сабирака.

183. а) 110; б) 261. **184.** $a > 0 > b$.

185. а) $x = -5$ или $x = 4$; б) $x = 16$ или $x = -15$.

186. Сви узастопни бројеви од $-1\,011$ до $1\,011$.

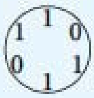
187. Од 12 до 13; или од -11 до 13; или од -24 до 25; или од 3 до 7; или од -2 до 7.

188. Од -3 до 6. **189.** а) Не; б) не; в) не. **190.** Не.

191. Не. Може ли збир два цела броја бити непаран број, а разлика паран број?

192. $b > 0 > a$.

193. -35 до 34; -18 до -17; -18 до 16; -9 до -5; -9 до 4; -8 до -2; -8 до 1.

194. 

. **195.** Да. **196.** а) Пет; б) осам.

197. -2, -1, 1, 2 и 3. **198.** а) 57; б) 0.

199. а) Четири; б) осам.

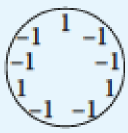
200. а) Не; б) да. $(-2)\cdot(-1)\cdot 0$ или $(-1)\cdot 0\cdot 1$ или $0\cdot 1\cdot 2$.

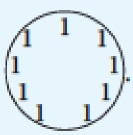
201. Да. $(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)$ или $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$.

202. а) $x = 1$ или $x = -1$, а $y = 96$ или $y = -96$;
б) $x = 2$ или $x = -2$, а $y = 24$ или $y = -24$;
в) $x = 4$ или $x = -4$, а $y = 6$ или $y = -6$.

203. а) $(-1)\cdot(-2) + (-3)\cdot(-4) - (-5)$, или $(-1)\cdot(-2) + (-3) + (-4)\cdot(-5)$.
Нађи још неко решење.
б) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3) + (-4)\cdot(-5)$;
Нађи још неко решење.
в) $(-1)\cdot(-2) - (-3) + (-4) + (-5)$;
Нађи још неко решење.

204. Не. **205.** Не. **206.** Не.

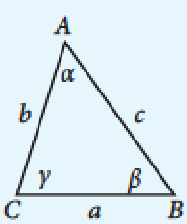
207. 

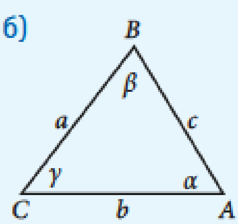
или 

. **208.** 61.

209. Да. Изостави број 0, па настави самостално.

2 ТРОУГАО – *први део*

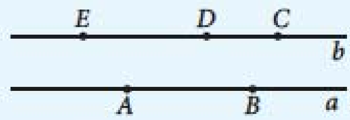
1. а) 

б) 

2. а) ΔABC, ΔABD, ΔACD; б) Има 16 троуглова, наброј их. **3.** Има 10 троуглова. **4.** $O = 36$ cm.

5. $e = 24$ cm, $d = 19$ cm, $f = 30$ cm, $O = 73$ cm.

6. Има 9 троуглова: ΔABC, ΔABD, ΔABE, ΔACD, ΔACE, ΔADE, ΔBCD, ΔBCE, ΔBDE.



7. $O = 24$ cm, па је $\frac{O}{2} = 12$ cm. $AM = 3$ cm, $MB = 4$ cm.

8. а) Странице троугла су a, $b = a + 1$ cm и $c = a + 2$ cm. Тада је:

$O = a + b + c$

$O = a + a + 1\text{ cm} + a + 2\text{ cm}$

$75\text{ cm} = 3a + 3\text{ cm}$

$3a = 72\text{ cm}$

$a = 24$ cm, $b = 25$ cm, $c = 26$ cm.

б) Странице су 23 cm, 25 cm и 27 cm.

9. а) Да; б) не. (Провери збир унутрашњих углова троугла.)

10. $\measuredangle CAB = 37°$ **11.** а) 66°, б) 53°, в) 55°.

12. а) Два унутрашња угла троугла су 62° и 73°, а трећи угао је $180° - (62° + 73°)$, па он износи 45°. Значи, овај троугао је оштроугли пошто су сва три угла оштра.
б) Правоугли; в) оштроугли; г) оштроугли.

13. $x + 4x + 7x = 180°$, дакле $x = 15°$. Углови троугла су 15°, 60° и 105°, па је он тупоугли.

14. Пошто је $\alpha + \beta = \gamma$, а знамо да је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, закључујемо да је $2\gamma = 180°$, па је $\gamma = 90°$. Дати троугао је правоугли.

15. Проверити збир спољашњих углова.
а) Да; б) не; в) да.

16. а) Унутрашњи углови су 70°, 50° и 60°, а спољашњи 110°, 130° и 120°.
б) Унутрашњи углови су 120°, 40° и 20°, а спољашњи 60°, 140° и 160°.
в) Унутрашњи углови су 80°, 60° и 40°, а спољашњи 100°, 120° и 140°.

17. а) Трећи спољашњи угао је 105°, а унутрашњи углови су 48°, 57° и 75°.
б) Трећи спољашњи угао је 156°, а унутрашњи углови су 103°, 53° и 24°.
в) Трећи спољашњи угао је 163°, а унутрашњи углови су 90°, 73° и 17°.
г) Трећи спољашњи угао је 160°, а унутрашњи углови су 50°, 110° и 20°.

18. Погледати решење задатка 13. Унутрашњи углови су 45°, 60° и 75°, а спољашњи 135°, 120° и 105°.

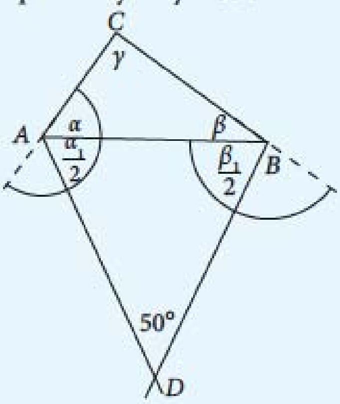
19. $x = 24°$. Унутрашњи углови су 84°, 60° и 36°, а спољашњи 96°, 120° и 144°. Ниједан угао није прав, па троугао није правоугли.

20. Не постоји такав троугао.

21. а) $2x + 3x = 120°$, тј. $x = 24°$ Унутрашњи углови су $72°$, $60°$ и $48°$, а спољашњи $108°$, $120°$ и $132°$.

б) $2y + 13° + 3y + 14° = 6y + 12°$, тј. $y = 15°$. Унутрашњи углови су $43°$, $78°$ и $59°$, а спољашњи $137°$, $102°$ и $121°$.

22. У ΔADB је $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\beta_1}{2} + 50° = 180°$, па је $\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = 130°$, тј. $\alpha_1 + \beta_1 = 2 \cdot 130° = 260°$. Пошто је збир спољашњих углова троугла $360°$, добијамо $\gamma_1 = 100°$. Тражени угао $\gamma = 80°$.



23. Не, зато што би два унутрашња угла била тупа, а то је немогуће.

24. $\alpha = 65°$, $\beta = 45°$, па је $\gamma = 70°$. То значи да је $c > a > b$.

25. Углови троугла су $72°$, $36°$ и $72°$, па закључујемо да је угао на основици $72°$, а угао при врху $36°$. Дужи је крак зато што се налази наспрам већег угла.

26. а) Да, б) не. **27.** Већа је основица.

28. Разликујемо два случаја. а) Ако је $58°$ угао на основици, тада угао при врху износи $64°$, па је основица дужа. б) Ако је $58°$ угао при врху, тада угао на основици износи $61°$, па је крак дужи.

29. Треба проверити да ли је збир две краће странице већи од најдуже странице.
а) Да, б) да, в) не.

30. $AB - BC < AC < AB + BC$
$14{,}2 \text{ cm} - 10{,}7 \text{ cm} < AC < 14{,}2 \text{ cm} + 10{,}7 \text{ cm}$
$3{,}5 \text{ cm} < AC < 24{,}9 \text{ cm}$.

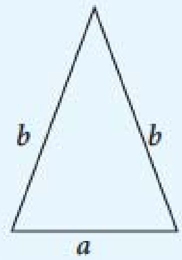
31. Може се саставити само један троугао чије странице су 2 dm, 3 dm и 4 dm.

32. Могу се саставити три троугла.

33. а) Да, нпр. 5 cm, 6 cm, 7 cm; б) да; в) да.

34. Све странице су једнаке и износе по 3,2 cm.

35. а) $b = a + 3$ cm,
$O = a + a + 3 \text{ cm} + a + 3 \text{ cm}$,
$15 \text{ cm} = 3a + 6 \text{ cm}$, тј. $a = 3$ cm,
$b = 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$, тј. $b = 6$ cm.
Основица је 3 cm, а крак 6 cm.



б) Основица је 7 cm, а крак 4 cm.

36. Основица је 10 cm, а крак 21 cm.

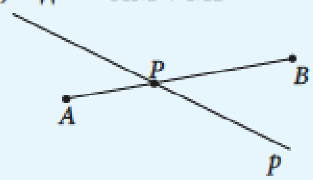
37. Разликујемо два случаја. а) Основица је 8 cm, а крак 14 cm, па је обим 36 cm. б) Основица је 14 cm, а крак 8 cm, па је обим 30 cm.

38. Постоје 3 таква троугла. а) (5 cm, 5 cm, 2 cm) - једнакокраки троугао; б) (5 cm, 4 cm, 3 cm); в) (4 cm, 4 cm, 4 cm) - једнакостранични троугао. **39.** Да.

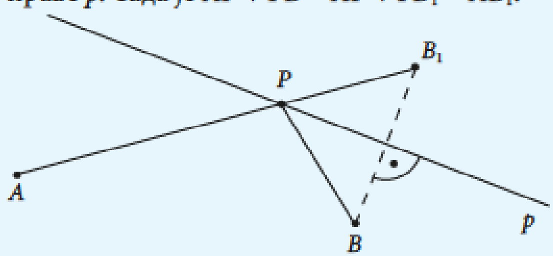
40. Има их 3: (7 cm, 7 cm, 1 cm), (6 cm, 6 cm, 3 cm), (5 cm, 5 cm, 5 cm).

41. Да. Ако би нека страница, нпр. a, била већа (или једнака) од половине обима тада би $b + c$ такође било веће од половине обима јер мора бити $b + c > a$. Онда би обим $a + (b + c)$ био већи од две половине обима, што је немогуће.

42. Пумпа се налази у пресеку дужи AB и праве p. Тада је $AP + PB = AB$. Показаћемо да је тада збир растојања од села до пумпе најкраћи. Ако би пумпа била нпр. тачка M која не припада дужи AB, тада би $AM + MB$ било веће од AB.



43. Тачка B_1 је симетрична тачки B у односу на праву p. Пумпа се налази у пресеку дужи AB_1 и праве p. Тада је $AP + PB = AP + PB_1 = AB_1$.

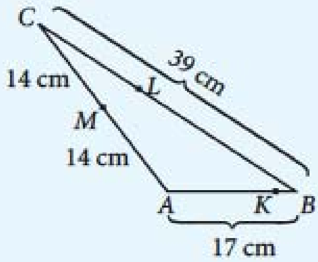


44.

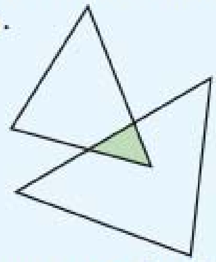
$AB = c$	$a = CB$	$CA = b$
$\gamma = \sphericalangle ACB$	$\sphericalangle CAB = \alpha$	$\beta = \sphericalangle ABC$

45. Дате су три једнакости $KL + LM = 17$ cm, $LM + MK = 23$ cm и $MK + KL = 26$ cm.
Ако их саберемо, добијамо
$KL + LM + LM + MK + MK + KL = 66$ cm, тј.
$2 \cdot (KL + LM + MK) = 66$ cm, односно
$2 \cdot O = 66$ cm, па је $O = 33$ cm.
Из прве једнакости добијамо да је $MK = 16$ cm, из друге $KL = 10$ cm, а из треће $LM = 7$ cm.

46. Обим троугла је 84 cm па је његова трећина 28 cm.
$MA + AK = 28$ cm, па је $AK = 14$ cm.
$MC + CL = 28$ cm, па је $CL = 14$ cm.
Онда је
$LB = 39\text{ cm} - 14\text{ cm} = 25$ cm,
а $KB = 17\text{ cm} - 14\text{ cm} = 3$ cm.

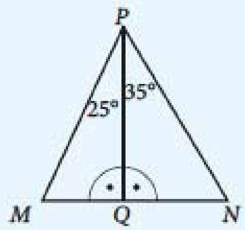


47. Да .

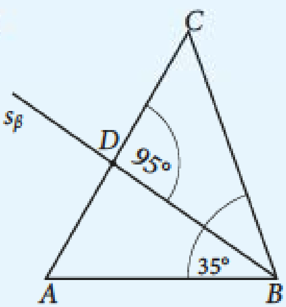


48. 6 тачака. **49.** а) 63°; б) 59°; в) 136°; г) 50°.

50. Из ΔMQP одређујемо $\measuredangle QMP = 65°$, а из ΔQNP је $\measuredangle PNQ = 55°$. Значи, углови ΔMNP су 65°, 55° и 60°.



51.



Симетрала дели угао на два једнака дела, па је и $\measuredangle DBC = 35°$. Значи, $\beta = 70°$. Из ΔDBC добијамо да је $\gamma = 50°$. Сад лако одређујемо да је $\alpha = 60°$.

52. Унутрашњи углови троугла су 66°, x и $2x$ (унакрсни углови). Имамо једнакост:
$66° + x + 2x = 180°$. Решење: $x = 38°$.
Углови троугла су $\alpha = 66°$, $\beta = 38°$, $\gamma = 76°$.

53. Из „малог" троугла добијамо $\alpha + \beta = 56°$. Одатле је: $2\alpha + 2\beta = 112°$, па је $\gamma = 68°$.

54. Погледати решење задатка 13.
Углови су 20°, 60° и 100°.

55. $\alpha = \beta + 15°$, $\beta = \gamma + 9°$. Одавде је $\alpha = \gamma + 24°$. Сада је $\gamma + 24° + \gamma + 9° + \gamma = 180°$, па имамо $\gamma = 49°$, $\alpha = 73°$, $\beta = 58°$.

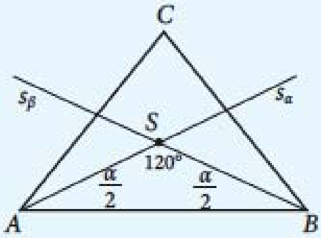
56. а) $x = 20°$. Углови су 40°, 60° и 80°;
б) $y = 34°$. Углови су 50°, 90° и 40°.

57. Други оштар угао је 54°.

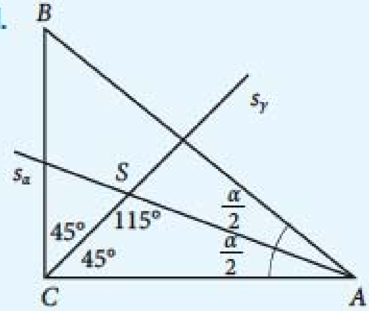
58. Углови су 30°, 60° и 90° – правоугли троугао.

59. Из претходног задатка знамо да се углови правоуглог троугла разликују за 30°. У нашем троуглу су разлике веће од 30° па највећи угао мора бити већи од 90°. Троугао је тупоугли.

60. Пошто је $\beta = \alpha$, у ΔABS имамо
$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + 128° = 180°$, па је $\alpha = 52°$, и $\beta = 52°$.
Сада је $\gamma = 76°$.

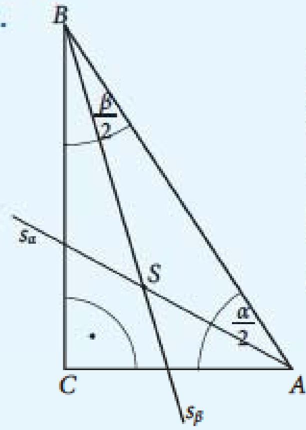


61.



Посматрајмо ΔCAS.
$115° + 45° + \frac{\alpha}{2} = 180°$,
па је $\frac{\alpha}{2} = 20° = \measuredangle CAS$.
Сада $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$.

62.



Посматрајмо ΔABS.
$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \measuredangle ASB = 180°$.
Пошто је $\alpha + \beta = 90°$, онда је $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$, па је $\measuredangle ASB = 135°$.

63. а) Да; б) не; в) не. **64.** Да.

65. Троугао може бити оштроугли (нпр. 10°, 86°, 84°), правоугли (90°, 46°, 44°) и тупоугли (100°, 46°, 34°).

66. Унутрашњи углови троугла су 64°, 53° и 63°.

67. Спољашњи углови троугла су 104°, 113° и 143°.

68. Унутрашњи углови су 80°, 60° и 40°, а спољашњи 100°, 120° и 140°.

69. $\alpha = 60°$; $\alpha_1 = 120°$,
$\beta = 45°$; $\beta_1 = 135°$,
$\gamma = 75°$; $\gamma_1 = 105°$.

70. а) $x = 24°$. Унутрашњи углови су 108°, 12° и 60°, а спољашњи 72°, 168° и 120°;
б) $3y + 18° + 2y + 6° + 4y - 12° = 360°$,
$9y + 12° = 360°$; $9y = 348°$; $y = 348° : 9$,
$y = 342°360' : 9$, $y = 38°40'$,
Унутрашњи углови су 46°, 96°40′ и 37°20′, а спољашњи 134°, 83°20′ и 142°40′.

71. а) Оштроугли; б) тупоугли; в) правоугли; г) оштроугли.

72. Унутрашњи углови су 50°, 40° и 90°, а спољашњи 130°, 140° и 90°.

73. Спољашњи углови троугла су x, $x + 30°$, $x + 60°$. Сада је $x + x + 30° + x + 60° = 360°$; $3x + 90° = 360°$; $3x = 270°$; $x = 90°$. Унутрашњи углови су 90°, 60° и 30°, а спољашњи 90°, 120° и 150°, па је троугао правоугли.

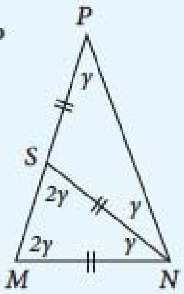
74. Унутрашњи углови су 110°, 60° и 10°, па троугао није оштроугли.

75. Слично задатку 22. $\alpha = \beta = 58°$; $\gamma = 64°$.

76. Слично задатку 22. $\gamma = 90°$.

77. Посматрајмо ΔAMC. У њему је $\measuredangle M = \measuredangle C = 68°$, па је $\measuredangle AMB = 112°$. У ΔABM је $\measuredangle A = \measuredangle B = 34°$, па су углови ΔABC: $\alpha = 44° + 34° = 78°$; $\beta = 34°$; $\gamma = 68°$.

78.



Нека је $\measuredangle SPN = \gamma$. Пошто је ΔSNP једнакокраки, то је и $\measuredangle SNP = \gamma$. Спољашњи угао троугла једнак је збиру два несуседна унутрашња угла, па је $\measuredangle NSM = 2\gamma$. Троугао MNS је такође једнакокраки, па је $\measuredangle SMN = 2\gamma$. Почетни ΔMNP је једнакокраки, па је $\measuredangle MNP = 2\gamma$. Сада имамо да је $\gamma + 2\gamma + 2\gamma = 180°$, $5\gamma = 180°$, $\gamma = 36°$. Углови троугла MNP су 72°, 72° и 36°.

79. Два унутрашња угла овог троугла су мања од 45°, па је трећи унутрашњи угао већи од 90°. Значи, троугао је тупоугли.

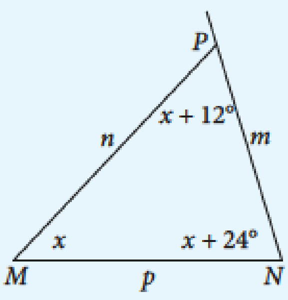
80. $\measuredangle MPN > \measuredangle NMP > \measuredangle PNM$.

81. Највећи је $\measuredangle ABC$, а најмањи $\measuredangle CAB$.

82. Најмања страница је DF, а највећа FE.

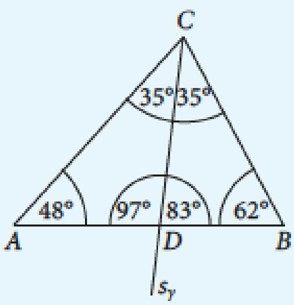
83. Пошто је $\gamma > \alpha > \beta$, тозначи да је $AB > BC > AC$.

84.



$x + x + 24° + x + 12° = 180°$;
$3x + 36° = 180°$.
Решење: $x = 48°$.
$\measuredangle M = 48°$;
$\measuredangle N = 72°$;
$\measuredangle P = 60°$.

85. Одредили смо све углове на слици. Посматрамо ΔABC и на основу углова закључујемо да је $AB > AC > BC$. Слично, у ΔADC је $AC > CD > AD$, а у ΔDBC је $BC > CD > BD$. Из ових неједнакости следи: $AB > AC > BC > CD$. Затим $CD > AD$ и $CD > BD$.



86. Одредити трећи угао троугла. а) Углови су 66°, 57°, 57°, па је троугао једнакокраки; б) да; в) не.

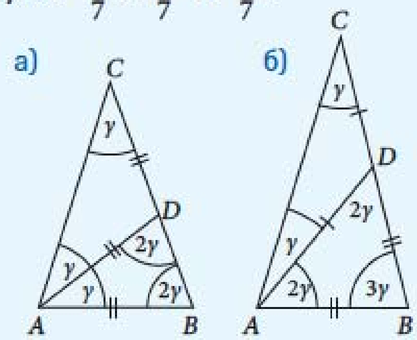
87. Прво одредимо $\measuredangle ABC = 47°$. Хипотенуза је AB, а $BC < CA < AB$.

88. Углови на основици су једнаки и њихов збир је мањи од 180°, па су оштри. Значи, сва три унутрашња угла троугла су оштра.

89. Троугао је једнакостранични, па су му углови по 60°.

90. 45°, 45°, 90° (једнакокрако правоугли троугао).

91. Разликујемо две ситуације и размишљамо слично задатку 78.
а) У првом случају углови су 72°, 72° и 36°;
б) у другом $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$ и $\frac{180°}{7}$.



92. Треба одредити дужину треће странице троугла и проверити да ли је збир две краће странице већи од најдуже странице.
а) Да; б) не; в) да; г) не.

93. Слично 30. задатку. Дужина странице мора бити већа од 3 cm, а мања од 11 cm. Значи, постоји 7 различитих троуглова.

94. Напишимо $\alpha = x$, $\beta = 3x$, $\gamma = 5x$.
Сада је $x + 3x + 5x = 180°$, па је $x = 20°$.
Углови троугла су 20°, 60° и 100°.

95. 360°. **96.** Да.

97. Унутрашњи углови су $\alpha = 58°$, $\beta = 70°$ и $\gamma = 52°$, а спољашњи $\alpha_1 = 122°$, $\beta_1 = 110°$ и $\gamma_1 = 128°$.

98. Најмањи спољашњи угао је оштар, па је највећи унутрашњи угао туп. Троугао је тупоугли.

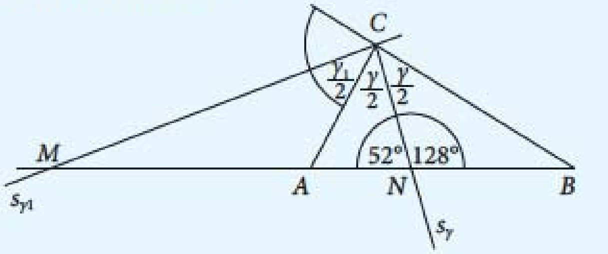
99. а) 60°, 60°, 60°; б) 45°, 45°, 90°.

100. Може, нпр. унутрашњи углови су $\alpha = 158°$, $\beta = 8°$, $\gamma = 14°$, а спољашњи $\alpha_1 = 22°$, $\beta_1 = 172°$, $\gamma_1 = 166°$. Приметимо да је $\alpha + \beta_1 = 330°$.

101. Разликујемо 2 ситуације. а) Ако је то спољашњи угао при врху, тада су унутрашњи углови 50°, 50° и 80°. б) Ако је то спољашњи угао на основици, тада су унутрашњи углови 80°, 80° и 20°.

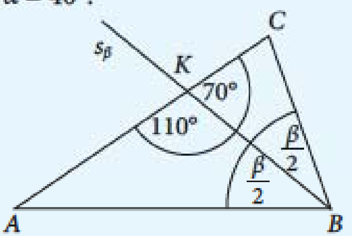
102. Ако се спољашњи угао α_1 повећа за $20°$, а β_1 смањи за $35°$, тада се спољашњи угао γ_1 повећа за $15°$. Одатле закључујемо да се унутрашњи угао γ смањи за $15°$. Значи, четвртина угла γ је $15°$, па је $\gamma = 60°$.

103. Посматрамо ΔMNC. $\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma_1}{2} + 52° + \measuredangle CMN = 180°$. Знамо да је $\gamma + \gamma_1 = 180°$, па је $\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = 90°$. Сада имамо да је $90° + 52° + \measuredangle CMN = 180°$, па је $\measuredangle CMN = 38°$.



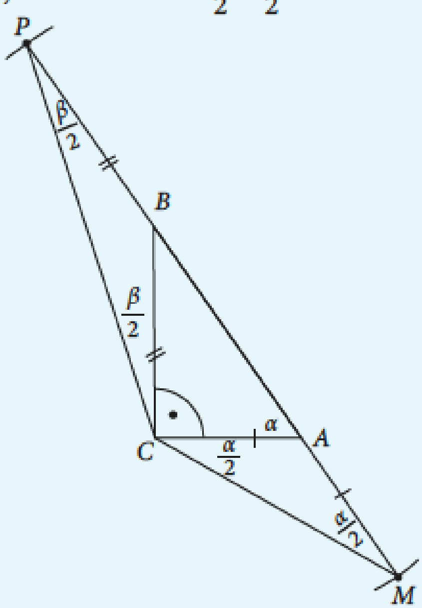
104. Углови су $66°$, $66°$ и $48°$.

105. У ΔBCK је $\frac{\beta}{2} + \gamma + 70° = 180°$, а у ΔABK је $\frac{\beta}{2} + \alpha + 110° = 180°$. На основу тога закључујемо да је $\gamma - \alpha = 40°$.



106. Троугао CMA на слици је једнакокраки, па је $\measuredangle AMC = \measuredangle ACM = \frac{\alpha}{2}$ (зато што је α несуседни спољашњи угао). Слично закључујемо да је $\measuredangle BCP = \frac{\beta}{2}$.

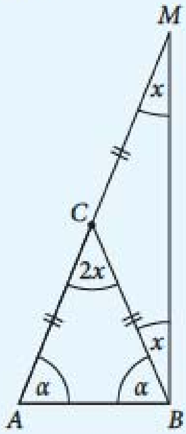
Сада је $\measuredangle MCP = 90° + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° + 45° = 135°$.



107. Слично задатку 91. У једном случају углови су $75°$, $35°$ и $70°$, а у другом $75°$, $25°$ и $80°$.

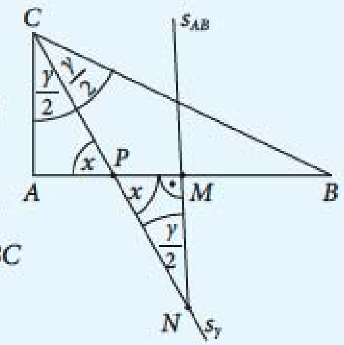
108.

По услову задатка, ΔBMC је једнакокраки, па је $\measuredangle BMC = \measuredangle CBM = x$. Збир углова ΔABM је $\alpha + \alpha + x + x = 180°$, тј. $2\alpha + 2x = 180°$, па је $\alpha + x = 90°$. То значи да је $\measuredangle ABM = 90°$.

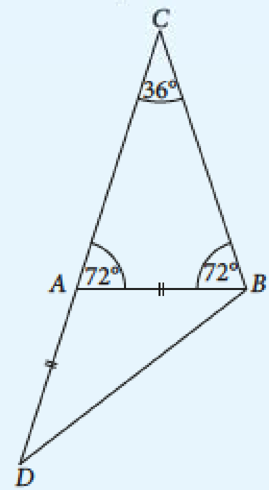


109.

Углови ΔMPN су $\frac{\gamma}{2}$, x и $90°$. Троугао APC има два угла $\frac{\gamma}{2}$ и x, па трећи $\measuredangle CAP$ мора бити $90°$. Значи, ΔABC је правоугли.



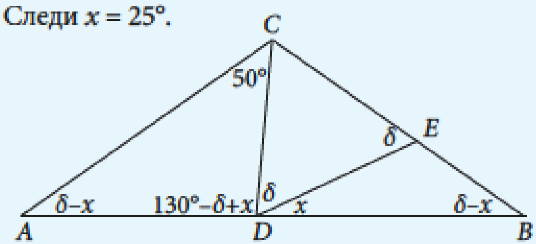
110. Углови ΔADB су $108°$, $36°$ и $36°$. $\measuredangle CBD = 108°$, па је $\measuredangle CDB = 36°$, те је ΔCBD једнакокраки.



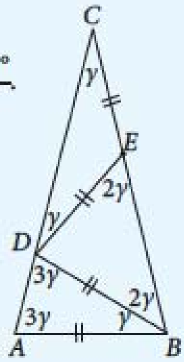
111. $30°$ и $60°$.

112. $\alpha = 20°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 40°$.

113. Нека је $\measuredangle BDE = x$. ΔDEC је једнакокраки па је $\measuredangle CDE = \measuredangle CED = \delta$. Из познате чињенице о спољашњем углу троугла, из ΔDEB имамо $\measuredangle EBD = \delta - x$. ΔABC је једнакокраки па је $\measuredangle CAB$ такође $\delta - x$. Пошто у ΔADC збир углова мора бити $180°$, имамо $\measuredangle ADC = 130° - \delta + x$. Збир свих углова код темена D мора бити $(130° - \delta + x) + \delta + x = 180°$, или $130° + 2 \cdot x = 180°$. Следи $x = 25°$.

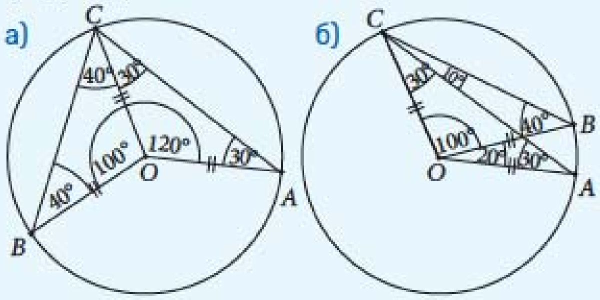


114. Углови троугла су $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$ и $\frac{180°}{7}$.



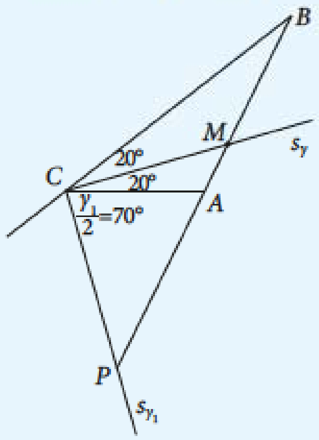
115. Решава се слично као претходни задатак. Углови су 72°, 72° и 36°.

116. Разликујемо два случаја.
а) У првом је $\measuredangle AOB = 360° - (100° + 120°) = 140°$;
б) у другом је $\measuredangle AOB = 20°$.



117. Слично задатку 114. Углови су 80°, 80° и 20°.

118.
Троугао CMP је једнакокрако правоугли, па је $\measuredangle CMP = \measuredangle CPM = 45°$. Из ΔCAP закључујемо да је $\measuredangle CAB = 115°$, а затим из ΔABC је $\measuredangle ABC = 25°$.

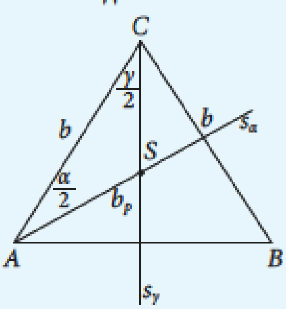


119. Слично задатку 60. а) $\measuredangle ASB$ је већи од 90°, а мањи од 180°; б) углови овог троугла су 62°, 62° и 56°, па је крак дужи од основице.

120. Једино не постоји троугао са страницама 1 cm, 2 cm, 3 cm.

121. Да. **122.** Погледати решење 30. задатка.

123.
Посматрајмо ΔASC.
У њему је $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 61°$, па је $\alpha + \gamma = 122°$. То значи да је $\beta = 58°$, а пошто је ΔABC једнакокраки, онда је и $\alpha = 58°$, па је $\gamma = 64°$.



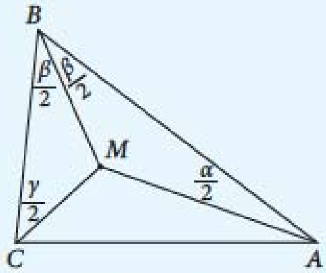
124. Дужина треће странице мора бити већа од 3 cm, а мања од 203 cm. Минимална дужина треће странице је 4 cm, па је обим тада 207 cm. Максимална дужина треће странице је 202 cm, па је обим тада 405 cm.

125. Има их 2: (4 cm, 4 cm, 2 cm), (4 cm, 3 cm, 3 cm).

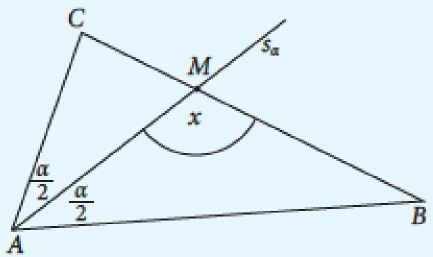
126. Прво погледај задатак 41. Пошто је $AB = 7$ cm и $BC + CA = 15$ cm, обим троугла је 22 cm. То значи да је $BC < \frac{22}{2}$ cm, тј. $BC < 11$ cm. Такође $AC < 11$ cm. Али пошто $BC + AC = 15$ cm, а $AC < 11$ cm, мора бити $BC > 4$ cm. Дакле, $4 \text{ cm} < BC < 11$ cm.

127. $BC > 6$ cm.

128. Нека је $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Посматрајмо ΔABM. Пошто је $\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\beta}{2}$, то значи да је $BM \leq AM$. Слично из ΔBCM, је $CM \leq BM$. Из последње две неједнакости закључујемо да је $CM \leq BM \leq AM$.



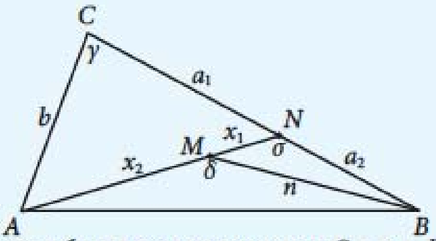
129. Треба показати да је $MB < AB$ и $MC < AC$. Угао x је спољашњи угао ΔAMC, па је већи од несуседног унутрашњег $\measuredangle CAM$, тј. $x > \frac{\alpha}{2}$.
У ΔABM страница наспрам угла $\frac{\alpha}{2}$ је мања од странице која је наспрам угла x, што значи да је $MB < AB$. Слично доказујемо и да је $MC < AC$.



130. Нацртати слику и посматрати троугао CDA. Упоредити спољашњи угао $\measuredangle ACD$ са несуседним унутрашњим углом $\measuredangle ADC$, па искористити једнакост углова на основици.

131. Погледати решење задатка 22, па радити у супротном смеру. $\measuredangle BMC = 61°$.

132. а) Нека је N пресечна тачка правих AM и BC. Угао δ је спољашњи угао ΔMBN па је $\delta > \sigma$. Слично, у ΔANC важи $\sigma > \gamma$. Из ове две неједнакости следи $\delta > \gamma$.
б) Из две неједнакости троугла
$n < a_2 + x_1$ и $x_1 + x_2 < a_1 + b$, докажи
$n + x_2 < a_2 + x_1 + x_2 < a_2 + a_1 + b$. Одатле имамо
$n + x_2 < a_2 + a_1 + b$.

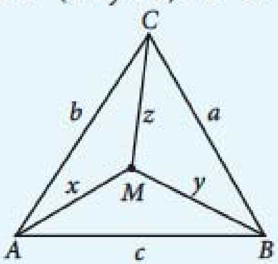


133. Обележи обим троугла изразом $O = a + b + c$.
Из претходног задатка и неједнакости троугла:

$$a < y + z < b + c.$$
$$b < z + x < c + a.$$
$$c < x + y < a + b.$$

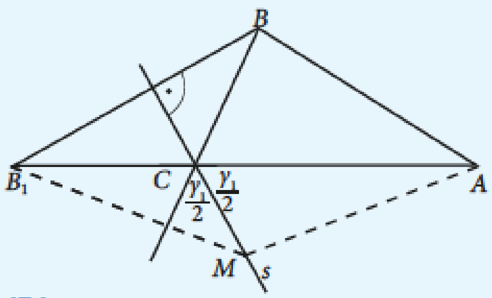
Сабирањем ове три неједнакости добијамо:

$$O < 2 \cdot (x + y + z) \leq 2 \cdot O.$$



134. У ΔADC важи $AC - AD < CD$, а у ΔBCD важи $BC - BD < CD$.
Ако саберемо ове две неједнакости, добијамо $AC + BC - AD - BD < CD + CD$, тј.
$AC + BC - (AD + BD) < 2CD$, па је
$AC + BC - AB < 2CD$.

135. Тачка B_1 је пресек праве AC и нормале из B на MC. Тада је $B_1C = CB$ и $B_1M = BM$. Посматрајмо троугао B_1MA. У њему важи
$B_1M + MA > B_1C + CA$, а то је исто што и
$BM + MA > BC + CA$.



136. Углови троугла су 59°, 59° и 62°, па је дужа основица.

137. Троугао ABM је правоугли (видети решење 108. задатка). Оштри углови тог троугла су $\measuredangle ABM = 50°$ и $\measuredangle AMB = 40°$, па је $AM > AB$.

3 РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ – *први део*

1. а) $5 = \frac{5}{1}$; б) $-3 = \frac{-3}{1}$; в) ; $0{,}75 = \frac{3}{4}$; г) $1{,}2 = \frac{6}{5}$.

2. 

3. A: $-3 = \frac{-3}{1}$; B: $1 = \frac{1}{1}$; C: $-2 = \frac{-2}{1}$;
D: $3 = \frac{3}{1}$; E: $-1 = \frac{-1}{1}$.

4. а) 2; б) -4; в) $\frac{1}{4}$; г) $-3{,}4$; д) $\frac{3}{8}$.

5. $A = \left\{-6, -\frac{17}{4}, -2\right\}$; $B = \left\{0, \frac{0}{51}\right\} = \{0\}$; $C = \left\{\frac{3}{5}, 7, 9\right\}$.

6. $-3, -2, -1, 0, 1, 2$.

7. $-5\frac{1}{4} = -\frac{21}{4}$; $-5\frac{2}{4} = -\frac{22}{4}$; $-5\frac{3}{4} = -\frac{23}{4}$.

8. Шест. $3\frac{1}{7}$; $3\frac{2}{7}$; $3\frac{3}{7}$; $3\frac{4}{7}$; $3\frac{5}{7}$; $3\frac{6}{7}$.

9. $\frac{1}{11}$ и $-\frac{1}{11}$. **10.** $S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{17}{4}, 9, -6, -\frac{5}{8}, 0, -2, \frac{9}{11}\right\}$.

11. 0,4; $-1{,}75$; 0,44; $-0{,}375$. **12.** $-\frac{7}{4}; \frac{2}{5}; -\frac{17}{8}; \frac{79}{25}$.

13. а) $-\frac{7}{4} = -1{,}75$; б) $-\frac{3}{8} = -0{,}375$; в) $-\frac{17}{25} = -0{,}68$.

14. $\frac{3}{2} = \frac{150}{100} = 1{,}5$; $-\frac{4}{5} = -\frac{80}{100} = -0{,}8$;
$\frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 0{,}48$; $-\frac{7}{20} = -\frac{35}{100} = -0{,}35$.

15. $0{,}\dot{6}$; $-2{,}\dot{5}$; $3{,}1\dot{6}$; $-0{,}58\dot{3}$.

16. $-2{,}25$ и $-\frac{9}{4}$; $-0{,}875$ и $-\frac{7}{8}$; $0{,}6$ и $\frac{3}{5}$; $-0{,}7$ и $-\frac{7}{10}$.

17. 7; 9; 5; 6; 3,25.

18. $-1{,}\dot{1} = -\frac{10}{9}$; $2{,}\dot{2} = \frac{20}{9}$; $3{,}\dot{3} = -\frac{10}{3}$.

19. $4{,}\dot{4} + 5{,}\dot{5} = \frac{40}{9} + \frac{50}{9} = 10$.

20. Не. **21.** а) 0,6; б) $-1{,}1\dot{6}$; в) $-0{,}25$. **22.** 0.

23. $\frac{3}{4} = 0{,}75 < 0{,}8 = \frac{4}{5}$. **24.** $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; 7; \frac{8}{9}$; 4,32.

25. $-\frac{2}{3}; -\frac{4}{7}; -\frac{6}{5}$; 0. **26.** $\frac{3}{8}; \frac{5}{12}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}$.

27. $-\frac{48}{18} < -\frac{18}{18} < -\frac{4}{18} < \frac{21}{18} < \frac{36}{18}$.

28. $-\frac{9}{2} < -\frac{13}{5} < -\frac{4}{3} < 1 < \frac{5}{4}$.

29. а) $\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$; б) $\frac{13}{10}>\frac{9}{7}$. **30.** $-\frac{4}{3}<-1<-\frac{3}{4}<-\frac{1}{2}<-\frac{2}{5}$.

31. 1, 2, 3, 4, 5 и 6. **32.** а) –5; б) 4; в) 0,4; г) –1,5.

33. а) $\frac{65}{8}$; б) $-\frac{17}{27}$. **34.** –1,93. **35.** Не. **36.** (–0,75)+0,4.

37. $B<A<C$. **38.** $-\frac{5}{2}$. **39.** $\frac{4}{3}$. **40.** 4.

41. На обе стране једнакости је $-\frac{15}{11}$.

42. 2. **43.** $|a|$. **44.** а) –6; б) –49; в) –20; г) $-\frac{27}{2}$.

45. а) $-\frac{5}{11}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{7}{22}$. **46.** а) $-\frac{13}{10}$; б) $\frac{10}{11}$; в) –6.

47. а) –17,6; б) –9; в) 15,12. **48.** а) $-\frac{4}{3}$; б) $-\frac{3}{2}$; в) $\frac{7}{5}$; г) $\frac{9}{7}$.

49. а) $-\frac{9}{14}$; б) –2,4; в) –0,51. **50.** Није тачно. **51.** –300.

52. $\left(-\frac{4}{9}\right)-\frac{27}{2}<\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{27}{2}<\left(-\frac{4}{9}\right)+\frac{27}{2}$.

53. а) $7\cdot x>21\cdot x$; б) $14\cdot x<-7\cdot x$; в) $-35\cdot x>-28\cdot x$.

54. а) –6; б) –7; в) 3; г) –15; д) –5. **55.** а) –4; б) –9; в) 9; г) 8.

56. $B=\left\{\frac{4}{3},-\frac{9}{5},\frac{1}{2},-\frac{1}{13},\frac{6}{7},-\frac{8}{11}\right\}$.

57. а) $-\frac{1}{12}$; б) $-\frac{1}{63}$; в) –20; г) 98.

58. а) $-\frac{17}{9}$; б) $-\frac{5}{3}$; в) $-\frac{9}{2}$.

59. а) –4; б) 6; в) $-\frac{14}{3}$. **60.** а) –0,5; б) –0,7; в) 0,7.

61. а) –3; б) $\frac{8}{3}$; в) 44; г) 34. **62.** а) –12,5; б) $-\frac{5}{36}$; в) $\frac{40}{31}$.

63. а) –21; б) –63; в) –72. **64.** а) 6; б) $-\frac{9}{10}$; в) $\frac{8}{7}$.

65. $\frac{1}{4}$. **66.** а) 16 cm²; б) 3,24 cm²; в) $\frac{49}{16}$ cm².

67. 9 cm². **68.** $\frac{55}{3}$ km на час.

69. а) 262,5 km; б) 218,75 km; в) $291\frac{2}{3}$ km.

70. 3,5 h. **71.** 1. **72.** 2. **73.** 2. **74.** $\frac{1}{2}$.

75. $\frac{3}{4}-\frac{3}{7}=\frac{9}{28}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}$. **76.** $\frac{2}{3}+(-2)=-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\cdot(-2)$.

77. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{5}{2}$. **78.** а) $\frac{689}{144}$; б) $\frac{715}{144}$; в) $\frac{143}{80}$.

79. а) $\frac{7}{13}$; б) $\frac{6}{5}$; в) 10. **80.** $\frac{12}{5}$.

81. Прво сабери $16\frac{3}{37}$ и $3\frac{34}{37}$, па настави... –3.

82. а) $\frac{16}{5}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{53}{15}$. **83.** а) –1,5; б) $-\frac{1}{5}$; в) 8; г) –4.

84. а) $a(b+c)=\frac{13}{4}$; б) $a(b-c)=-\frac{1}{4}$. **85.** $-\frac{5}{14}$.

86. $\frac{15}{2}$. **87.** –18, –9, –36. **88.** 2 пута. **89.** –1 или 1.

90. а) $x=-23$; б) $x=-21$; в) $x=-15$. **91.** –14.

92. $a=63$. **93.** $b=-25$. **94.** За –8°C.

95. а) $x=-29$; б) $x=98$; в) $x=-22$.

96. а) $x=-\frac{1}{14}$; б) $x=-\frac{5}{12}$; в) $x=-\frac{43}{30}$.

97. а) $x=-\frac{11}{42}$; б) $x=-\frac{17}{12}$; в) $x=\frac{23}{10}$.

98. а) $x=-9$; б) $x=-28$. У оба случаја $x\in Z\subset Q$.

99. а) $x=\frac{3}{4}$; б) $x=-\frac{5}{21}$.

100. а) $x=-6$; б) $x=-12$. **101.** а) $x=\frac{20}{33}$; б) $x=-\frac{231}{20}$.

102. а) $x=-8$; б) $x=-1$; в) $x=-\frac{7}{2}$.

103. а) $x=5$; б) $x=-51$.

104. а) $x\le-4$; б) $-4\ge x$; в) $x<-4$; г) било који број x; д) нема решења.

105. а) $x\le-\frac{7}{20}$; б) $x>-\frac{19}{56}$; в) $-\frac{1}{2}\ge x$; г) $-\frac{1}{2}>x>-1\frac{4}{9}$.

106. а) $x\ge-\frac{11}{6}$; б) $x<-\frac{17}{20}$; в) $-\frac{41}{14}\le x$.

107. 3 и 4. **108.** $x\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

109. а) $-3\le x\le 8$; б) $5>x>-2$.

110. 34 литра. **111.** Не. **112.** 350 cm.

113. $-15\,°C\le T\le 9\,°C$. **114.** 46 234 l.

115. 3 cm < c < 15 cm.

116. а) $x\le-4$; б) $x\le-9$; в) $x<-12$; г) $x\le18$; д) нема решења; ђ) било који број $x\in Q$.

117. а) $x>3$; б) $x>-3$; в) $x\ge3$.

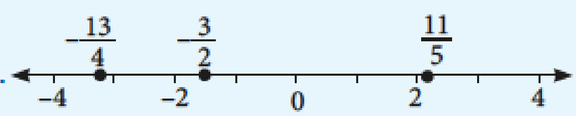
118. $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

119. а) $x\le-1$; б) $x\le-5$; в) $x<-5$; г) $x\ge10$; д) $x<0$; ђ) $x>-1$.

120. а) $x\le0$; б) $x>0$; в) $x<0$; г) $x<0$.

121. а) $x\le\frac{5}{2}$; б) $x<-\frac{21}{32}$; в) $x<-\frac{10}{3}$; г) $\frac{5}{12}>x>-\frac{23}{28}$.

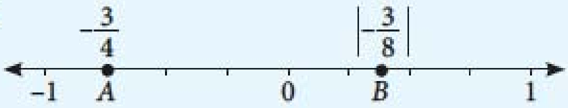
122.



а) $-4<-\frac{13}{4}<-3$; б) $2<\frac{11}{5}<3$; в) $-2<-\frac{3}{2}<-1$.

123. Пет. **124.** 0. **125.** 0. **126.** Не. $Q^-\cap Q^+=\emptyset$.

127.



128. $B=\left\{-\frac{8}{3};\frac{5}{11};-\frac{7}{6};\frac{4}{9};2,22\right\}$; $C=\left\{\frac{8}{3};\frac{5}{11};\frac{7}{6};\frac{4}{9};2,22\right\}$.

129. $x\in\left\{-\frac{5}{3};\frac{6}{7};-\frac{8}{11};\frac{4}{9};3,21\right\}$.

130. $\frac{5}{2}<\frac{7}{2}<\frac{9}{2}<\frac{11}{2}<\frac{13}{2}$. **131.** $\frac{3}{8}<\frac{8}{8}<\frac{14}{8}<\frac{20}{8}$.

132. $\frac{12}{30}<\frac{12}{24}<\frac{12}{16}<\frac{12}{9}$. **133.** $\frac{13}{4}<-\frac{9}{4}<\frac{5}{4}<\frac{7}{4}<\frac{11}{4}$.

134. Претвори у децимални запис $\frac{22}{7}=3,\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$, па имаш $3,14<3,\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}<3,15$. Пробај самостално и следеће: напиши 3,14 и 3,15 као разломке и упореди их унакрсним множењем.

135. 0, 1, 2, 3, 4 и 5. **136.** –1, 0 и 1.

137. Два решења: $-\frac{40}{56}$ или $-\frac{45}{63}$.

138. Три решења: $\frac{3}{4}$ или $\frac{5}{7}$ или $\frac{6}{8}$.

139. а) $\frac{16}{5}$; б) $-\frac{25}{18}$; в) $\frac{9}{7}$. **140.** За $\frac{5}{6}$. **141.** За $4\frac{1}{4}$.

142. –1.

143. Бесконачно много. Сви бројеви $x\le 0$.

144. Бесконачно много. Сви бројеви $y\ge 0$.

145. а) Обим 24 cm; површина 36 cm².
б) Обим 30 cm, површина 56,25 cm².
в) Обим $\frac{56}{3}$ cm; површина $\frac{196}{9}$ cm².

146. а) Обим 22 cm; површина 24 cm².
б) Обим 29,4 cm, површина 49,4 cm².
в) Обим $\frac{1322}{45}$ cm; површина 42 cm².

147. а) $34\frac{1}{2}$ km; б) $43\frac{1}{8}$ km; в) $57\frac{1}{2}$ km.

148. На пет начина.

149. а) $y>0$; б) $y=0$; в) $y<0$. **150.** Да.

151. а) Исказ је тачан за $x\ne 0$;
б) не постоји број x за који је исказ тачан.

152. $\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{21}$. Могу да се нађу решења и за остале случајеве. На пример, $\frac{2}{7}+\frac{4}{6}=\frac{20}{21}$. Пронађи самостално остала решења.

153. 437.

154. Три јабуке на по 4 дела и сваком дечаку дати један део, а остале четири јабуке на по 3 дела и сваком дечаку дати по један део.

155. 77. **156.** Шест. **157.** $x\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

158. $n\in\{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$.

159. $n=2021$ и $m=2023$. Помоћ:
$\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

160. $\frac{100}{3}$. **161.** 198.

162. Не, зато што се када брже пуни него празни.

163. Нада 150 динара, Јагода 200 динара, а Влада 250 динара.

164. 12 m. **165.** 36 km. **166.** 160 страна.

167. Зоран 720 динара, Душан 600 динара, Никола 900 динара.

168. 28,5 *l*. **169.** 18 јабука и 24 крушке.

170. 16. **171.** 36 km. **172.** Три јабуке на по 2 дела и сваком детету дати један део, а остале две јабуке на по 3 дела и сваком детету дати по један део.

173. 550 аутомобила.

174. Скупљи је килограм поморанџи. Покажи да 9 крушака тежи колико и 8 поморанџи.

175. Гоца има 120 крушака. Нина такође 120.

176. У $12\frac{12}{13}$ h. Помоћ: покажи да 13 пута у току 12 часова права представља симетралу.

177. $\frac{12}{19}$ ученика седи у пару дечак-девојчица.

178. 36. **179.** 7. **180.** 24.

181. Маре има 60 динара, а Љуба 40 динара.

182. $-\frac{1}{30}$ и $-\frac{1}{6}$. **183.** $x=1024$.

184. $x=\frac{202300}{199}$. Види и задатак 166. **185**. $x=8$.

186. а) $x\in\left\{4, \frac{4}{3}\right\}$; б) $x\in\{-1011,\ 1012\}$;
в) нема решења. **187.** а) 0; б) 0.

188. а) $x<0$ или $x>0$; б) Нема решења. **189.** –20.

190. а) Нема решења; б) нема решења.

191. а) $-2<x<2$; б) $-5\le x\le 5$; в) $-1<x<3$.

192. $x=-\frac{1}{2}$. **193.** Не постоји. **194.** $m=3$.

195. 270 динара.

196. а) 12 дана; б) 9 дана; в) 8 дана.

197. $x=1$ или $x=-1$. **198.** $\frac{64}{3}$ km. **199.** 48 минута.

200. 1 000 g = 1 kg. **201.** 59,5 kg.

202. 98. **203.** 168.

204. $-\frac{1}{8}$. **205.** $\frac{4}{5}$. Види и задатак 166.

206. $1+2-3=0$; $(1+2):3=1$; $1-2:3=\frac{1}{3}$; $(1-2):3=-\frac{1}{3}$; $(1-2)\cdot 3=-3$.

207. а) $x=-0{,}95$; б) $x=3{,}375$; в) $x=-1\,875$.

208. а) $x=-\frac{83}{20}$; б) $x=\frac{17}{20}$; в) $x=\frac{7}{12}$.

209. а) Нема решења. б) Једно решење, $x=-3$. в) Бесконачно много решења, $x\in Q$.

210. а) $x=-23$; б) $x=-40$; в) $x=0$. **211.** 120.

212. 7,75 kg. **213.** 7,4 cm. **214.** 1,35 и –1,35.

215. 63 и –13. **216.** $\frac{9}{16}$ m². **217.** $\frac{11}{3}$ cm $=3\frac{2}{3}$ cm.

218. Тупоугли. **219.** 20.

220. 112 страница.

221. Предраг има 160 динара, а Ненад 150 динара.

222. $\frac{9}{14}$.

223. а) $x\in\{-1,0,1\}$; б) $x\in\{-9,-8,-7,\dots,12,13,14\}$.

224. а) $x\geq-\frac{17}{60}$; б) $x<-\frac{10}{21}$; в) $\frac{17}{24}\leq x$.

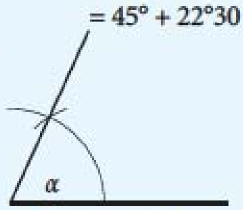
225. $-10\leq x\leq 17$.

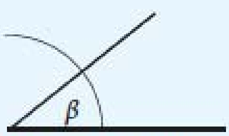
226. а) $x>-\frac{3}{4}$; б) $x=0$; в) Да. Пробај $x=1$.

4 ТРОУГАО – *други део*

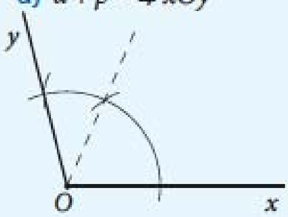
1. Погледати објашњење на 130.страни.
2. Погледати објашњење на 130. и 131. страни.
3. Погледати примере 3 и 4 на 131. и 132. страни.
4. Погледати пример 3 на 131. страни. Угао се може конструисати на више начина, нпр.
$67°30' = 135°:2 = 75° - 15°:2 = 60° + 15°:2 =$
$= 45° + 22°30'$.

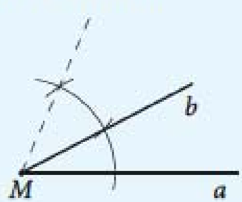
5.





а) $\alpha+\beta=\measuredangle xOy$ б) $\alpha-\beta=\measuredangle aMb$





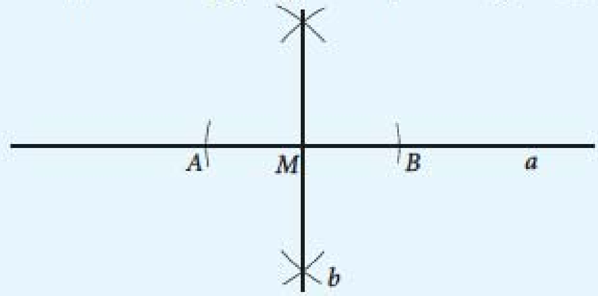
6. а) $2\alpha=\alpha+\alpha$, б) конструисати симетралу угла α, в) поделити угао α на 4 једнака дела, па осенчити 3 дела.

7. Конструисати угао од 90°, па наставити као у задатку 5.

8. Конструисати одговарајуће углове, а затим надовезати угао β, слично задатку 5. а).

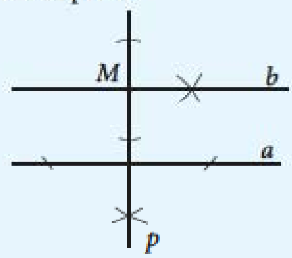
9. Треба надовезати углове, слично као у задатку 5. а).

10. Конструишемо кружницу произвољног полупречника са центром у тачки M. Ова кружница сече праву a у две тачке A и B. Наставак се своди на конструкцију симетрале те дужи AB.



11. Погледати подсетник на 129. страни.

12. Прво конструишемо праву p која садржи тачку M и нормална је на праву a. Затим конструишемо праву b која садржи тачку M и нормална је на праву p.



13. Погледати пример 1. на 135. страни. Нацртати дуж $AB=5$ cm, па конструисати угао $\beta=60°$. Затим, на други крак угла β нанети страницу $BC=4$ cm.

14. На краке правог угла нанети катете троугла.

15. Из темена угла при врху једнакокраког троугла ($\measuredangle ACB=30°$) нанети на краке угла дужину 5 cm и тако добити темена на основици.

16. Погледати пример 2. на 135. страни. Нацртати страницу $AB=5$ cm, па у темену B конструисати угао од 60°, а у темену A угао од 45°. У пресеку кракова ова два угла добијамо теме C.

17. Прво одредити угао CAB, а затим конструисати слично 16. задатку ($AC=4$ cm, $\measuredangle CAB=60°$, $\measuredangle BCA=90°$).

18. Одредити $\measuredangle CAB=30°$. Нацртати хипотенузу AB, па у теменима A и B нанети углове од 30° и 60°. У пресеку кракова ова два угла добијамо теме C.

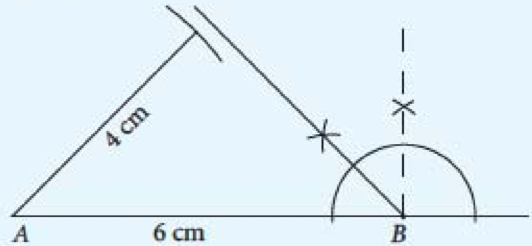
19. Основица овог троугла је 5 cm, а углови на њој износе по 30°. Конструкцију изводимо слично претходном задатку.

20. Погледати пример 3. на 135. страни. Нацртамо дуж $AB = 4$ cm. Из темена B опишемо кружницу полупречника 5 cm, а из темена A опишемо кружницу полупречника 6 cm. У пресеку ових кружница добијамо теме C.

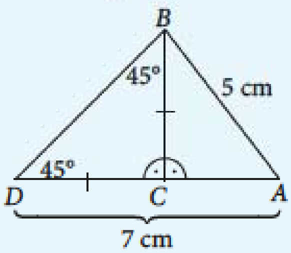
21. Све странице су по 5 cm. Конструисати троугао слично претходном задатку.

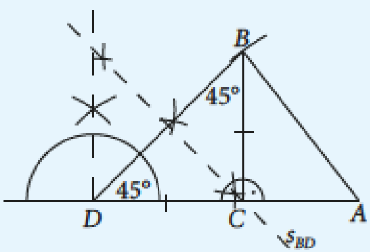
22. Погледати пример 4. на 136. страни. Нацртамо дуж $AB = 3$ cm. У темену B конструишемо угао од 120°, а из темена A опишемо кружницу полупречника 6 cm. У пресеку те кружнице и крака угла β добијамо теме C.

23. Задатак нема решења. Погледати „Сазнај више" на страни 137.



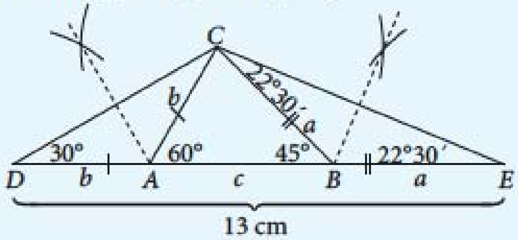
24. Ако катету AC продужимо преко темена C за $CD = BC$, тада је $AD = AC + CD =$ $= AC + BC = 7$ cm. Троугао DCB је једнакокрак, па је $\measuredangle CBD = \measuredangle CDB = 45°$. Прелазимо на конструкцију.





Прво нацртамо дуж $DA = 7$ cm, па у тачки D конструишемо угао од 45°. Из темена A опишемо кружницу полупречника 5 cm и њен пресек са краком угла означимо са B. Пошто је ΔDCB једнакокрак, тачка C се налази на симетрали основице BD. Значи, конструишемо симетралу дужи BD и њен пресек са дужи AD је теме C.

25. Слично претходном задатку.



Конструишемо ΔDEC ($DE = 13$ cm, а углови на њој су 30° и 22°30′). У пресеку симетрале странице CD и дужи DE добијамо теме A. У пресеку симетрале странице CE и дужи DE добијамо теме B.

26. Не.

27. Један пар подударних троуглова је 2 и 4, а други 5 и 6.

28. а) Да; б) не; в) не; г) не.

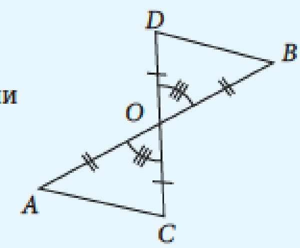
29. Нису, зато што им нису једнаке странице.

30. Погледати пример 1. на 141. страни. Подударни су по ставу СУС.

31. а) $AC = MP$, $BC = NP$, $\measuredangle BCA = \measuredangle NPM = 90°$, па је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$ на основу става СУС.
б) Пошто је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$, следи $AB = MN$.

32. а) У ΔMNP угао при врху је 40°. Ова два троугла имају једнаке краке и угао при врху, па су подударни на основу става СУС. б) Одатле следи и једнакост основица, тј. $AB = MN$.

33. а) $AO = BO$, $CO = DO$ (по услову задатка), $\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$ (унакрсни углови), па је, на основу става СУС, $\Delta ACO \cong \Delta BDO$, а онда је и $AC = BD$. Слично доказујемо и да су троуглови AOD и BOC подударни, па је $AD = BC$. б) Из подударности $\Delta ACO \cong \Delta BDO$ следи да су наизменични углови једнаки $\measuredangle ACO = \measuredangle BDO$, па је $AC \| BD$.



34. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Посматрамо ΔABC и ΔBAD. Пошто је $AB = AB$, затим $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD = 90°$ и $BC = AD$, онда по ставу СУС закључујемо $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, а одатле следи $AC = BD$.

35. Оба троугла имају страницу дужине 15 и на њој налегле углове од 75° и 33°, па су подударни, на основу става УСУ.

36. Слично претходном задатку. Правоугли троуглови ABC и MNP имају једнаке хипотенузе и на њима налегле углове од 36° и 54°, па су: а) подударни на основу става УСУ. Одатле следи и једнакост преосталих елемената, тј. б) $AC = MP$ и в) $BC = NP$.

37. Слично претходном задатку.

38. Посматрамо квадрат $ABCD$. Троуглови ABC и BAD су једнакокрако правоугли, па је $\measuredangle ABD = \measuredangle ADB = \measuredangle BAC = \measuredangle BCA = 45°$. Значи, дијагонала квадрата је уједно и симетрала унутрашњег угла. Троуглови ΔABO, ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO су сви једнакокраки са основицама једнаких дужина и угловима од по 45° на њима. Значи, подударни су по ставу УСУ, па је онда и $AO = BO = CO = DO$.

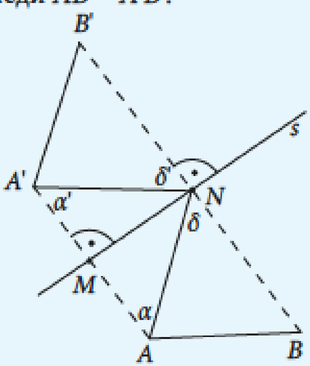
39. Међусобно су подударни троуглови а); в) и д). Такође су подударни б) и г).

40. Конструиши троугао ABC, а затим симетрале било које 2 странице тог троугла. Њихов пресек је тачка O која је центар описане кружнице, а полупречник је растојање од тачке O до било ког темена троугла.

41. Конструиши троугао ABC, а затим симетрале било која 2 унутрашња угла тог троугла. Њихов пресек је тачка S која је центар уписане кружнице. Шта је полупречник? Погледати објашњење на страни 151.

42. Погледати пример 2. на страни 147.

43. Прво докажи $\Delta AMN \cong \Delta A'MN$ (СУС јер $AM = A'M$ и $MN = MN$, а угао између је 90°). Одатле $AN = A'N$ и $\alpha = \alpha'$. Следи $\delta = \delta'$ (зашто?). Сада докажи $\Delta ABN \cong \Delta A'B'N$ (СУС јер $AN = A'N$ и $BN = B'N$ а уго између њих је $\delta = \delta'$), одакле следи $AB = A'B'$.



44. Погледати пример 1. на страни 147. Можемо доказати да је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, па су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни на основу става ССС.

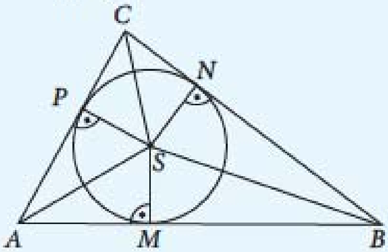
45. Погледати пример 3. на страни 148.

46. Погледати пример 6. на страни 150.

47. Тачка M је центар описане кружнице троугла ABC, па је $AM = BM = CM$.

48. Центар описане кружнице око троугла се налази на средини странице AB, а то је могуће само ако је то правоугли троугао са правим углом код темена M.

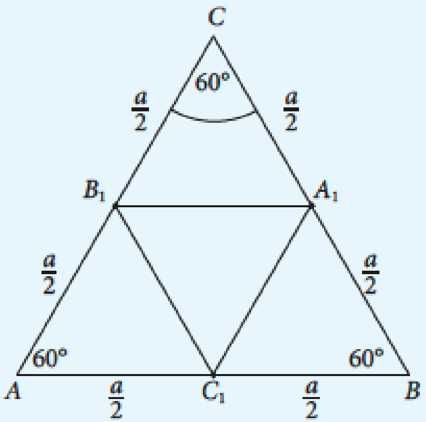
49. Пошто је $AS = AS$, $MS = PS$ (полупречник кружнице) и $\measuredangle AMS = \measuredangle APS = 90°$, троуглови AMS и APS су подударни на основу става ССУ, па је $AM = AP$. На сличан начин доказујемо и преостале две једнакости.



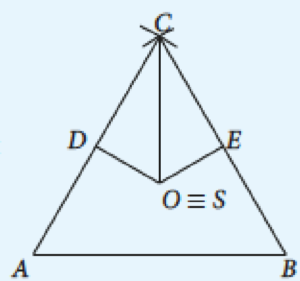
50. Нека је у правоуглом ΔABC хипотенуза AB, а угао $\beta = 30°$. Тада је $\alpha = 60°$. Ако са M означимо средиште хипотенузе, знамо да важи $AM = BM = CM$. Пошто је $\alpha = 60°$, ΔCAM је једнакостранични, па је $AC = AM = \frac{AB}{2}$.

51. Пошто је $AO = CO$ (полупречник кружнице), $BO = DO$ (полупречник кружнице) и $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$ (по услову задатка), $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (СУС), па је и $AB = CD$.

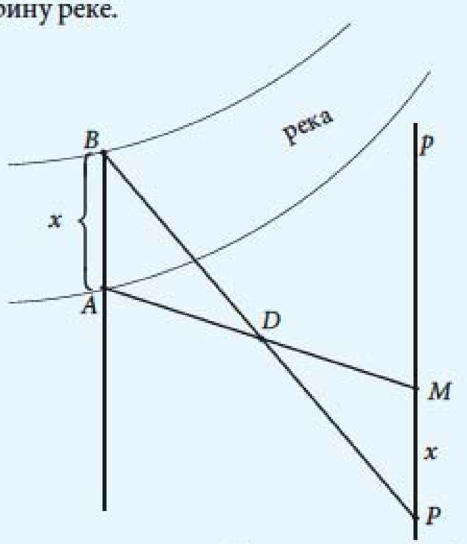
52. Троуглови AC_1B_1, C_1BA_1 и A_1CB_1 су подударни по ставу СУС, па је $B_1C_1 = C_1A_1 = A_1B_1$, што значи да је $\Delta A_1B_1C_1$ једнакостранични. Покажи да је страница троугла $\Delta A_1B_1C_1$ једнака половини странице почетног троугла ΔABC.



53. Нека су D и E подножја нормала из тачке O на странице AC и BC. То значи да је $OD = OE$ (полупречник уписане кружнице). ΔODC и ΔOEC су подударни на основу става ССУ ($OC = OC$, $OD = OE$, $\measuredangle ODC = \measuredangle OEC = 90°$), па је $DC = EC$. Пошто су праве OD и OE симетрале страница AC и BC, закључујемо да је $AC = BC$. На сличан начин можемо показати да је и $AC = AB$, па је троугао ABC једнакостранични.



54. Потребно је да одредимо AB на слици. Повуцимо праву p паралелну са AB и на њој изаберимо тачку M. Нађимо тачку D, тако да је $DA = DM$. На правој p нађимо тачку P која је колинеарна са тачкама B и D. Имамо $\measuredangle ADB = \measuredangle MDP$ и $\measuredangle DAB = \measuredangle DMP$, па по ставу УСУ имамо $\Delta ABD \cong \Delta MPD$. Одатле следи $AB = MP$. Измеримо дуж $MP = x$ и тако смо сазнали ширину реке.



55. Дуж се осном симетријом пресликава у једнаку дуж (задатак 43), па су одговарајуће странице троуглова једнаке и они су подударни (ССС).

56. Дуж се централном симетријом пресликава у једнаку дуж, па су одговарајуће странице ових троуглова једнаке и они су подударни (ССС).

57. $AC = EF$; $CB = FD$; $BA = DE$; $\measuredangle BAC = \measuredangle DEF$; $\measuredangle ACB = \measuredangle EFD$; $\measuredangle CBA = \measuredangle FDE$.

58. $MN = 11$; $MQ = 10$; $\measuredangle MPN = 70°$; $\measuredangle MQP = 80°$; $\measuredangle MPQ = 30°$.

59. а) $AM = MB$ (по услову задатка), $MC = MC$, $AC = BC$, па је $\Delta AMC \cong \Delta BMC$ на основу става ССС. б) Одатле је $\measuredangle AMC = \measuredangle BMC$. Пошто су та два угла заједно 180°, сваки од њих мора бити 90°, па је дуж CM нормална на AB.

60. Пошто је $AO = CO$ (полупречник кружнице), $BO = DO$ (полупречник кружнице) и $AB = CD$ (по услову задатка), троуглови AOB и COD су подударни по ставу ССС, па је и $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$.

61. Погледати пример 9. на страни 145.

62. Погледати пример 5. на страни 148.

63. Не може се закључити јер страница наспрам угла $\measuredangle BAC = \measuredangle NMP$ није дужа од странице на углу, па се не може применити став ССУ.

64. OC је симетрала дужи AB, па је нормална на њу и полови је. Прво докажи $\measuredangle AOC = \measuredangle BOC$ па је OC симетрала угла $\measuredangle AOB$ у једнакокраком троуглу ΔAOB у коме је $AO = BO$. Настави.

65. Обим троугла MNP је 24 cm. **66.** $\measuredangle ACM = 30°$.

67. Примени претходни задатак и докажи $\measuredangle MBA = \measuredangle NAB = 30°$. Настави.

68. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Посматрамо троуглове ABM и DCM. Пошто је $AB = DC$, $\measuredangle ABM = \measuredangle DCM = 90°$, $BM = CM$, онда, на основу става СУС закључујемо $\Delta ABM \cong \Delta DCM$, а из те подударности следи да је $AM = DM$.

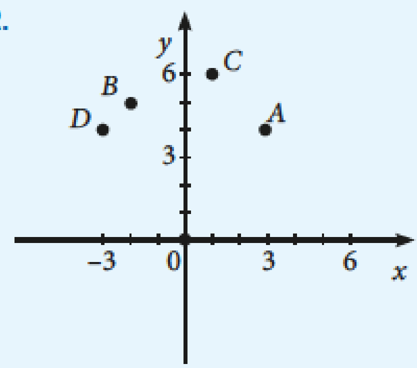
69. Нека је $ABCD$ квадрат. Пошто је $DA = DC$, затим $\measuredangle DAM = \measuredangle DCN = 90°$ и $AM = CN$, из става СУС закључујемо а) $\Delta ADM \cong \Delta CDN$. б) Одатле следи да је $DM = DN$.

5 РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ – *други део*

1.

4	Т	А	М	И	Ш
3	Ј	А	Д	А	Р
2	М	Л	А	В	А
1	Д	У	Н	А	В
	1	2	3	4	5

2.

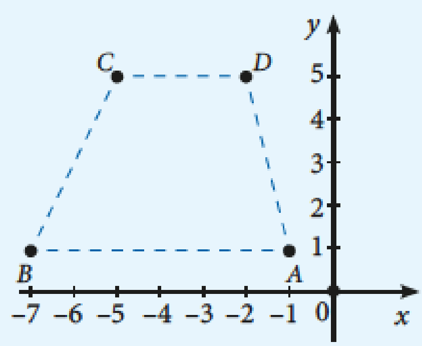


3. Самостално реши. $ABCD$ је ромб.

4. Самостално нацртај. A: III квадрант; B: IV квадрант; C: I квадрант; D: II квадрант.

5. Самостално нацртај.

6. Трапез



7. а) $B(-2, -3)$; б) $C(2, 3)$; в) $D(2, -3)$.

8.

Дељивост природног броја са 3 не зависи од последње цифаре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 4 зависи од последње цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 5 зависи од последње цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 6 зависи од последње две цифре тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 9 зависи од збира цифара тог броја.	Тачно	Нетачно
Дељивост природног броја са 10 зависи од последње цифре броја.	Тачно	Нетачно

9.

Дужина странице x	1	4	10	$\frac{4}{3}$	5	7	1,2	7,82
Обим троугла O	3	12	30	4	15	21	3,6	23,46

10.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5	3	3	6	3	4	5	4	5

11. $x + y = 10$.

x	2	7	–3	0	17	6	–6	–1
y	8	3	13	10	–7	4	16	11

12. 21 динар. **13.** $\frac{120}{7}$ kg.

14. а) $x = 2$; б) $x = 10$; в) $x = 48$; г) $x = 12$.

15. 10. **16.** Анка 210 динара. Бранка 330 динара.

17. $x = 18$. **18.** Михаило 35 кликера. Јован 25 кликера.

19. $AM = 16$ cm; $BM = 28$ cm.

20. Да. **21.** а) 12; б) 6; в) 3; г) 2.

22. а) 32 сата; б) 12 радника.

23. а) 25; б) 20; в) 10. **24.** Не.

25. а) 18 година; б) мајка: 56 година; кћи: 24 године.

26. Најмање 63; највише 81.

27. По 50 и 75 задатака у свакој лекцији.

28. Већи угао 45°; мањи угао 27°.

29. а) $\frac{1}{3}$; б) 7 : 9; в) 3. **30.** а) $\frac{7}{4}$; б) 7 : 3.

31. 7,4 km. **32.** 20 cm. **33.** 81 km.

34. Јаша: 12 cm и 16 cm; Раша: 6 cm и 8 cm.

35. а) $a = \frac{8}{3}$; б) $n = 2$; в) $m = 36$.

36. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ окренимо „кормило” за 180°

и добијамо $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

37. а) $\frac{a}{c} = \frac{5}{8}$; б) $\frac{b}{d} = \frac{35}{48}$; в) $\frac{a}{d} = \frac{35}{64}$.

38.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8			L					T
7								
6								
5								
4								
3								
2		S			P			
1								

39. $A(-4, 4)$; $B(2, -3)$; $C(-3, -2)$; $D(1, 2)$; $E(-2, 1)$.

40. $A(0, 0)$ не припада ни једном квадранту; $B(4, 3)$ је у I квадранту; $C(-2, 1)$ је у II квадранту; $D(-1, -4)$ је у III квадранту; $E(3, -2)$ је у IV квадранту.

41.

Тачка	Координате		Растојање од	
	x	y	x-осе	y-осе
A	0	0	0	0
B	4	3	3	4
C	–2	1	1	2
D	–1	–4	4	1
E	3	–2	2	3

42. $AB = 3$; $BC = 2$; $DE = 7$; $EF = 4$.

43. а) $A_1(-2, 3)$; б) $B_1(2, 2)$; в) $C_1(3, -1)$; г) $D_1(-3, -2)$.

44.

Дуж	Дужина дужи	Координате средишта дужи	
		x	y
AB	6	–3	2
BC	8	1	5

45.

x број молера	1	2	3	4	6	9	12	18
y број дана	72	36	24	18	12	8	6	4

46.

Ученик	Анка	Бранка	Влада	Горан	Дивна
Маса	45	55	57	64	50

Просечна маса: девојчице 50 kg; дечаци 60,5 kg; групе 54,2 kg.

47.

Колико месеци у току 2016. године на Златибору је била просечна температура испод нуле?	1
У ком месецу у току 2016. године на Златибору је била просечна температура најнижа?	12
У ком месецу у току 2016. године на Златибору је била просечна температура највиша?	7
Колико има месеци у току 2016. године у којима је просечна температура између 10°C и 15°C?	3
У ком месецу у току 2016. године на Златибору се просечна температура највише разликовала од вишегодишњег просека у истом месецу?	2

48.

x	8	36	154	17	59	63	77	82	93
y	1	4	16	2	6	7	8	9	10

49. $O = 3a$.

50.

t (min)	20	30	45	60	15	90	75	105
s (km)	4	6	9	12	3	18	15	21

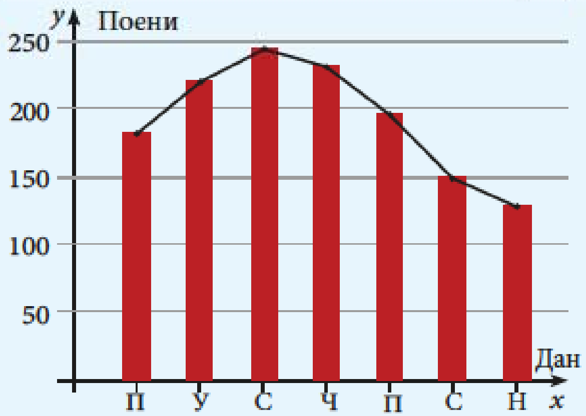
51.

ТАКМИЧАР / ЕКИПА	ТАК 1	ТАК 2	ТАК 3	ТАК 4	ТАК 5	УКУПНО
6 - А	11	8	6	10	12	47
6 - В	7	12	8	10	11	48
Колика је аритметичка средина броја решених задатака екипе А?						9,4
Колика је аритметичка средина броја решених задатака екипе В?						9,6
Која екипа је победила: А или В?						В

52.

ДАНИ	ПОН	УТО	СРЕ	ЧЕТ	ПЕТ	СУБ	НЕД
РЕЗУЛТАТ У %	80	95	75	100	85	100	75
Колико пута (дана) је Миша имао максималан резултат?							2
Који је Мишин најслабији проценат?							75
Колики је просечан Мишин резултат?							$87\frac{1}{7}$

53.



54. Не. **55.** $k = -2$. **56.** а) 1050 динара; б) 5 сладоледа.

57. 66,8 kg.

58. Браца 2 400 000 динара; Цаца 3 300 000 динара.

59. Марко 16 јабука; Јанко 24 јабуке; Звонко 32 јабуке. **60.** $a = 8$ cm; $b = 10$ cm; $c = 12$ cm.

61. $\alpha = 60°$; $\beta = 80°$; $\gamma = 40°$.

62. а) Три; б) најмања вредност $x = 8$; највећа вредност $x = 72$.

63. Не. **64.** Да. $k = 100$.

65.

x - број молера	8	12	16	48	6	3	2	1
y - број дана	6	4	3	1	8	16	24	48

а) 16; б) 12.

66. Да.

67. а)

Дужина странице a	2	3	5	6	9	8	4	3
Дужина странице b	18	17	15	14	11	12	16	17

б) не.

68. а)

x - број радника	8	12	6	48	24	12	3
y - број дана	3	2	4	0,5	1	2	8

б) $xy = 24$; в) да.

6 ЧЕТВОРОУГАО

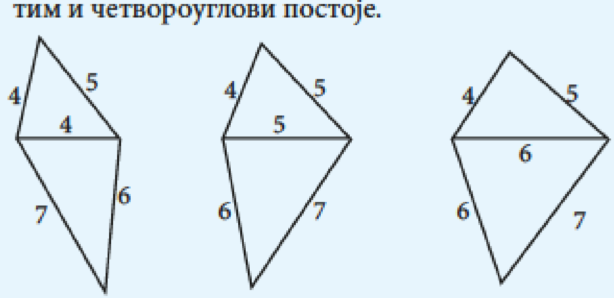
1. 5 cm. **2.** 5 cm, 6 cm, 7 cm и 8 cm.

3. $b = \frac{4}{3}a$, $c = \frac{5}{3}a$ и $d = \frac{6}{3}a$. Збир $a + \frac{4}{3}a + \frac{5}{3}a + \frac{6}{3}a$ мора бити 180 cm. Решење $a = 30$ cm. Странице су $a = 30$ cm, $b = 40$ cm, $c = 50$ cm и $d = 60$ cm.

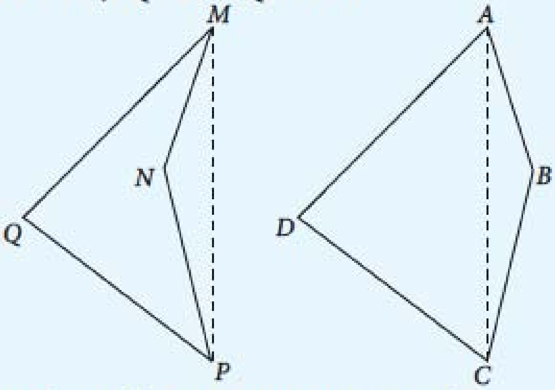
4. Ако је заједничка страница $AB = 5$ cm, обим четвороугла ће бити $6 + 7 + 7 + 6 = 26$ cm. Ако је заједничка страница $BC = 6$ cm, обим четвороугла ће бити $5 + 7 + 7 + 5 = 24$ cm. Ако је заједничка страница $AB = 7$ cm, обим четвороугла ће бити $6 + 5 + 5 + 6 = 22$ cm.

5. Могу да буду (ако су им све странице и сви углови подударни). Али не морају бити подударни. На пример, ако је $ABCD$ квадрат чија је страница 6 cm, а $MNPQ$ предствља четвороугао настао слепљивањем два једнакостранична троугла странице 6 cm.

6. Постоје. Примери са мерним бројевима су на сликама. Увери се да сви троуглови на сликама задовољавају неједнакости троугла, па самим тим и четвороуглови постоје.



7. Четвороугао $MNPQ$ на слици је неконвексан. Уочи троуглове ΔQPM и ΔMNP. Ако су два нова троугла ΔDCA и ΔABC таква да важи $\Delta QPM \cong \Delta DCA$ и $\Delta MNP \cong \Delta ABC$ и имају заједничку страницу AC, као на слици десно, онда је четвороугао $ABCD$ конвексан а странице су једнаке страницама четвороугла $MNPQ$: $MN = AB$, $NP = BC$, $PQ = CD$ и $QM = DA$.



8. $\measuredangle NPQ = \measuredangle PQN = 60°$, те је троугао NPQ једнакостраничан и $NP = PQ = QN = 10$ cm. Обим четвороугла $MNPQ$ је тада: $6 + 10 + 10 + 8 = 34$ cm.

9. Конвексни су A и C, а неконвексни B и D.

10. Троуглови имају заједничку хипотенузу и обим квадрата је $4 \cdot 8 = 32$ cm.

11. Троуглови имају заједничку хипотенузу и обим четвороугла је $6 + 8 + 8 + 6 = 28$ cm.

12. Постоји. На пример постоји ΔABC чије су странице $AB = 2$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 6{,}5$ cm. Затим се увери да постоји ΔADC страница $CD = 3$ cm и $DA = 4$ cm. $ABCD$ је пример траженог четвороугла.

13. Из неједнакости троугла је: $AB + BC = 7 + 8 = 15$ cm $> AC$ и $AC + CD > 15 + 9 = 24$ cm. Како је $AD = 25$ cm, то такав четвороугао не постоји.

14. Постоји и он се састоји из два подударна једнакостранична троугла ABC и ACD.

15. а) $\measuredangle DAB$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$; б) $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ и $\measuredangle D$; в) α, β, γ и δ.

16. Угао $\delta = 360° - 56° - 72° - 123° = 109°$.

17. Четврти угао је $360° - 70° - 80° - 90° = 120°$.

18. Четврти угао је $360° - 75° - 75° - 75° = 135°$.

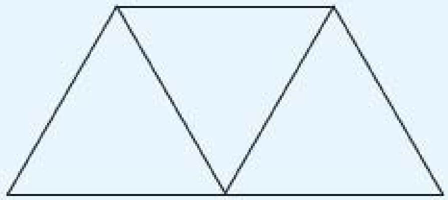
19. Ако је најмањи угао x, онда су остали углови четвороугла $x + 20°$, $x + 40°$ и $x + 60°$. Тада је $4x + 120° = 360°$. То значи да је $4x = 240°$, а $x = 60°$. Углови четвороугла су 60°, 80°, 100° и 120°. Збир најмањег и највећег је 180°.

20. Докажи да је $\Delta MNQ \cong \Delta PNQ$, па је $\measuredangle NMQ = \measuredangle NPQ = 60°$. Углови четвороугла су 60°, 108°, 60° и 132°.

21. Унутрашњи углови су 60°, 80°, 100° и 120°. Тражена разлика је $120° - 60° = 60°$.

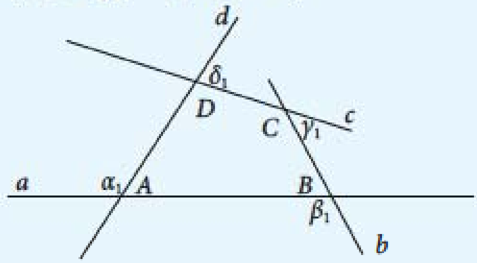
22. Имамо $\alpha = 2\beta$, затим $\gamma = \beta + 20°$ и $\delta = \alpha - 20° = 2\beta - 20°$. Тада је $2\beta + \beta + \beta + 20° + 2\beta - 20° = 360°$, па је $\beta = 60°$, а остали углови четвороугла су $\alpha = 120°$, $\gamma = 80°$ и $\delta = 100°$.

23. Углови тог четвороугла су 60°, 120°, 60° и 120°.



24. $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ (јер је $AB = BC$, $AD = DC$, $BD = BD$). Зато је $\alpha = \gamma$. Углови четвороугла су: $\alpha = 130°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 130°$, $\delta = 70°$.

25. $\measuredangle aAD = \alpha_1$, $\measuredangle bBA = \beta_1$, $\measuredangle cCB = \gamma_1$, $\measuredangle dDC = \delta_1$.



26. $\alpha_1 = 115°$, $\beta_1 = 128°$, $\gamma_1 = 66°$ и $\delta_1 = 51°$.

27. 80°, 70°, 60° и 150°. **28.** 81°, 81°, 81°и 117°.

29. Унутрашњи углови су 66°, 82°, 98° и 114°. Збир најмањег и највећег је 180°.

30. Спољашњи углови четвороугла су 72°, 84°, 96° и 108°. Одговарајући унутрашњи углови су 108°, 96°, 84° и 72°, па је тражена разлика $108° - 72° = 36°$.

31. $\alpha = 95°$, $\beta = 85°$, $\gamma = 70°$ и $\delta = 110°$; $\alpha_1 = 85°$, $\beta_1 = 95°$, $\gamma_1 = 110°$ и $\delta_1 = 70°$.

32. $\alpha = 56°$, $\beta = 72°$, $\gamma = 57°$ и $\delta = 175°$; $\alpha_1 = 124°$, $\beta_1 = 108°$, $\gamma_1 = 123°$ и $\delta_1 = 5°$.

33. Збир унутрашњих углова четвороугла је 360°, а збир спољашњих је такође 360°. То значи да су ти збирови једнаки.

34. Постоји. Сви тражени углови су по 90°, а тај четвороугао је квадрат или правоугаоник.

35. $\alpha = 48°$, $\beta = 72°$, $\gamma = 96°$ и $\delta = 144°$. $\alpha_1 = 132°$, $\beta_1 = 108°$, $\gamma_1 = 84°$ и $\delta_1 = 36°$. Размере спољашњих углова су $\alpha_1 : \beta_1 = 11 : 9$; $\beta_1 : \gamma_1 = 9 : 7$; $\gamma_1 : \delta_1 = 7 : 3$.

36. а) 63°, 117°, 63° и 117°; б) 123°, 57°, 123°, 57°.

37. а) 110°, 70°, 110°, 70°; б) 71°, 109°, 71°, 109°.

38. Дата разлика је разлика два суседна угла (јер разлика несуседних углова је 0°). Дакле:
а) 63°, 117°, 63°, 117°; б) 31°, 149°, 31°, 149°.

39. 45°, 135°, 45°, 135°. **40.** 60°, 120°, 60°, 120°.

41. 66°, 114°, 66°, 114°.

42. Ако су дијагонале паралелограма нормалне, оне су и симетрале углова паралелограма.
Тада је $\measuredangle MNP = 2 \cdot 36° = 72°$. Углови паралелограма су 72°, 108°, 72°, 108°.

43. Дати паралелограм је правоугаоник.

44. Дати паралелограм је квадрат или ромб.

45. Може да буде, ако су остала два угла по 60°. Али не мора, ако остала два угла нису једнака, а њихов збир је 120°.

46. Може да буде паралелограм, ако је NP паралелно са MQ. У супротном је трапез.

47.

Паралелограм	Сви углови су једнаки
Све странице су једнаке	Квадрат
Све странице нису једнаке	Правоугаоник

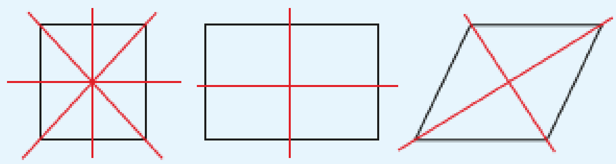
48. Јесте, али само ако је $AB \| CD$.

49. Јесте, али само ако је $AB = CD$.

50. Квадрат. **51.** Ромб. **52.** Није.

53. Јесте, јер има све странице једнаке и све углове праве.

54. а) 4; б) 2; в) 2.

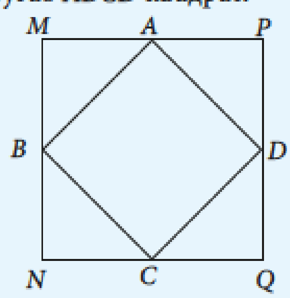


55. Јесте, ако дате тачке A, B, C и D нису колинеарне. Није, ако су дате тачке A, B, C и D колинеарне.

56. Из задатка 55 имамо да је четвороугао паралелограм. Пошто су дијагонале једнаке, следи да је паралелограм заправо правоугаоник.

57. Докажи да су дијагонале четвороугла $MNPQ$ нормалне, а странице једнаке.

58. Средишта страница квадрата $MNPQ$ су тачке A, B, C и D. Докажи да су дијагонале четвороугла $ABCD$ нормалне, да су једнаке и да се полове, па је четвороугао $ABCD$ квадрат.



59. $AC \| PQ$ јер је PQ средња линија ΔACD. Такође је $AC \| MN$, па је зато $PQ \| MN$. Слично имамо $MQ \| PN$. Дакле четвотроугао $MNPQ$ има два пара паралелних страница, па је паралелограм.

60. Може да буде, ако се дијагонале међусобно полове.

61. а) Конструише се прав угао $\measuredangle DAB$ и на крацима правог угла дужи $AB = AD = 3$ cm. Настави.
б) Конструише се симетрала правог угла $\measuredangle dAb$ и на њој дуж $AC = 4$ cm. Из темена C се конструишу праве нормалне на праве d и b, које их секу у тачкама D и B.

62. Конструише се прав угао $\measuredangle DAB$ и на крацима правог угла дужи $AB = 5$ cm и $AD = 3$ cm. Настави.

63. Конструише се $\measuredangle DAB = 45°$ и на крацима угла дужи $AB = AD = 4$ cm. Настави.

64. Конструише се $\measuredangle ABC = 120°$ и на крацима тог угла дужи $AB = 5$ cm и $BC = 3$ cm. Настави.

65. Конструише се помоћни троугао MNP, тако да је $MN = 6$ cm, $NP = MQ = 4$ cm и $MP = 7$ cm. Настави.

66. Конструише се помоћни троуго ABO, где је $\measuredangle AOB = 90°$ и краци (катете) $AO = 7 : 2 = 3{,}5$ cm и $BO = 4 : 2 = 2$ cm. Настави.

67. Конструише се троугао ABD, где је $AD = 4$ cm, $\measuredangle DAB = 30°$ и $AB = 6$ cm (СУС). Из темена D се конструише права паралелна са AB, а на њој тачка C тако да је $DC = 6$ cm.

68. Задатак има два решења. Битно је уочити која тачно дијагонала има дужину 8 cm. Погледај Пример 3 на страни 205.

69. Конструише се помоћни троуго ABO, где је $\measuredangle AOB = 60°$ и краци (катете) $AO = 6 : 2 = 3$ cm и $BO = 8 : 2 = 4$ cm. У продужетку AO, преко тачке O, уцртај тачку C тако да је $OC = 3$ cm. У продужетку BO, преко тачке O, уцртај тачку D тако да је $OD = 4$ cm.

70. Ако су дате тачке A, B и C, онда су познате дужи AB, BC и CA. Треба конструисати троугао ABC, а затим и троугао ACD, тако да је $AD = BC$ и $CD = AB$,

71. Теме C је централносиметрично са A у односу на O, а теме D је централносиметрично са B у односу на O.

72. Теме C је централносиметрично са A у односу на O, а темена B и D се налазе на правој која садржи тачку O, а нормална је на AC, тако да је $AO = BO = DO$.

73. Теме C је централносиметрично са A у односу на O. Права CM одређује правац странице BC, при чему је $AO = BO$. Тачка B се добија у пресеку нормале из тачке A на CM. Настави.

74. Полупречник кружнице описане око правоугаоника једнак је половини дијагонале правоугаоника која износи 10 cm. Могуће је конструисати правоугли троугао ABC чији су елементи: $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm и $\measuredangle ABC = 90°$. Настави.

75. Страница датог квадрата је 4. Координате темена C и D су (има два решења): а) $C(6, 4)$; $D(2, 4)$ и б) $C(6, -4)$; $D(2, -4)$.

76. Само једно решење $D(1, 2)$.

77. Само једно решење $D(3, 4)$.

78. Имају два решења: а) $C(-4, 0)$; $D(0, -4)$ и б) $C(4, 8)$; $D(8, 4)$.

79. Суседни углови ромба су 60° и 120°. (Зашто?) Конструиши помоћни једнакостранични троугао странице $a = 3$ cm, па настави.

80. $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BD} = 2\vec{a}$; $\overrightarrow{CA} = -2\vec{a}$; $\overrightarrow{DA} = -3\vec{a}$.

81. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CD} = -\vec{a}$; $\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.

82. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = 2\vec{b}$; $\overrightarrow{CA} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$;

$\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{NP} = -\vec{a}$; $\overrightarrow{PM} = -\vec{b}$;

$\overrightarrow{AN} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BP} = \vec{b} - \vec{a}$.

83. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a}}{2}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{CP} = -\frac{\vec{a}}{2}$; $\overrightarrow{DQ} = -\frac{\vec{b}}{2}$;

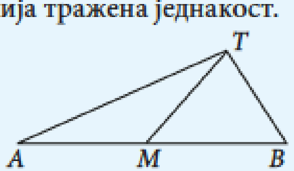
$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{NP} = \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}}{2}$;

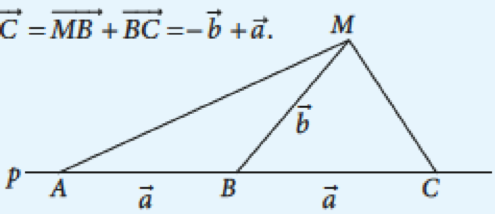
$\overrightarrow{PQ} = -\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{QM} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$.

84. Решење је у тексту уџбеника на страни 213.

85. Из троуглова ΔAMT и ΔBMT следи да је: $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BM}$.
Сабирањем добијених једнакости добија се $\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{TM} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BM}$. Збир вектора $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ је нула вектор, јер су то два вектора истог правца и интензита, а различитог смера, па се добија тражена једнакост.



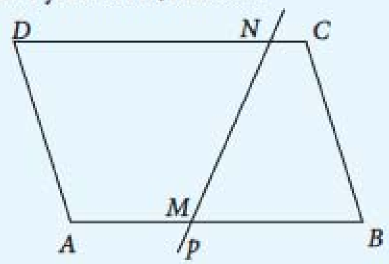
86. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \vec{b}$;
$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{a}$.



87. а) $\overrightarrow{AC} = 2\vec{x}$; $\overrightarrow{BE} = 3\vec{x}$; $\overrightarrow{PR} = 2\vec{x}$; $\overrightarrow{CR} = 2\vec{y}$;
$\overrightarrow{ND} = -\vec{y}$; $\overrightarrow{QB} = -2\vec{y}$;
б) $\overrightarrow{BK} = \vec{y} - \vec{x}$; $\overrightarrow{CP} = 2\vec{y} - 2\vec{x}$; $\overrightarrow{QD} = 2\vec{x} - 2\vec{y}$;
$\overrightarrow{AM} = 2\vec{x} + \vec{y}$; $\overrightarrow{EL} = \vec{y} - 3\vec{x}$.

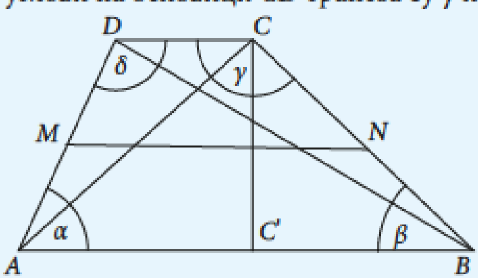
88. Постоји. Уочимо на правој p тачку M тако да је $AM = MB$.

89. Трапези су: $AMND$, $MBCN$.



90. Како је $\beta + \gamma = 74° + 106° = 180°$, то је збир $\alpha + \delta = 180°$, па је четвороугао $ABCD$ трапез.

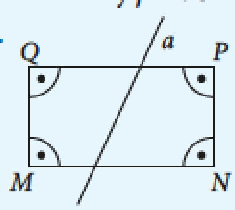
91. а) Краци трапеза су BC и AD;
б) висина трапеза је дуж CC';
в) средња линија трапеза је дуж MN;
г) дијагонале трапеза су AC и BD;
д) углови на основици AB трапеза су α и β;
ђ) углови на основици CD трапеза су γ и δ.



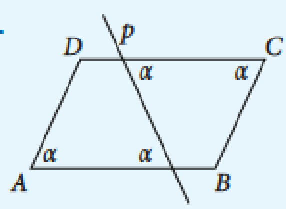
92. Углови су $\gamma = 102°$ и $\delta = 115°$.

93. Углови су $\beta = 76°$ и $\delta = 122°$.

94.



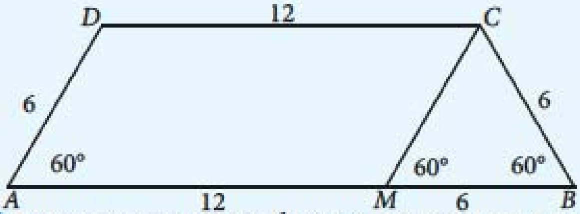
95.



96. а) Углови трапеза су: 68°, 68°, 112° и 112°.
б) Једнакост дијагонала следи из $\Delta MNP \cong \Delta NMQ$.

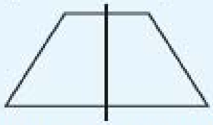
97. Углови трапеза су: 70°, 90°, 90° и 110°.

98. Ако се нацрта дуж CM која је паралелна са краком AD, тада је троугао MBC једнакостранични па је $MB = BC = CM = 18 - 12 = 6$ cm. Обим трапеза је $18 + 6 + 12 + 6 = 42$ cm. (Види слику.)



99. Висина трапеза мора бити једнака разлици основица, дакле 8 cm.

100. Једнакокраки трапез јесте основносиметрична, али није централносиметрична фигура.



101. Правоугли трапез није ни осносиметрична ни централносиметрична фигура.

102. Погледај занимљивост изнад примера 5 на страни 218.

103. Конструише се прво помоћни троугао ABC ($AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm и $AC = 5$ cm).
Дуж $CD = 3$ cm је паралелена са правом AB.

104. Како је разлика основица 4 cm, треба конструисати помоћни троугао MBC, где је $MB = 4$ cm, $BC = 5$ cm и $MC = AD = 6$ cm.
Настави.

105. Конструише се помоћни троугао ABC ($AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm, а угао код темена B је 60°). Конструиши кроз тачку A праву p тако да је $\measuredangle pAB = 75°$. На правој p одреди тачку D такву да је $CD \parallel AB$.

106. Трапез је једнакокраки, јер су углови на основици једнаки. Зато се конструише једнакостранични троугао ABM чија је страница 9 cm. Како је и троугао CDM такође једнакостранични то је $MC = MD = CD = 6$ cm.

107. Како је разлика основица 2 cm, треба конструисати помоћни правоугли троугао MBC, где је $MB = 2$ cm, $BC = 3$ cm и $\measuredangle BMC = 90°$.
Настави.

108. Конструиши помоћни једнакокраки ΔMBC чија је основица $MB = AB - CD = 7 - 5 = 2$ cm а краци $MC = BC = 4$ cm. На правој BM у продужетку тачке M постави тачку A тако да је $AM = 5$ cm. Остаје да се конструише још само паралелограм $AMCD$.

109. Конструиши помоћни троугао MBC, тако да је $MB = 3$ cm, $BC = 5$ cm и $MC = 3$ cm. На правој BM у продужетку тачке M постави тачку A тако да је $AM = 4$ cm. Остаје да се конструише још само паралелограм $AMCD$.

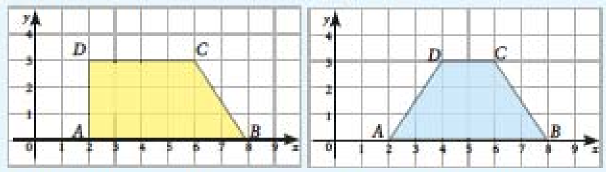
110. Конструиши троугао ABC чије су странице $AC = 6$ cm, $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm. Кроз тачку C конструиши праву паралелну са AB а на њој тачку D тако да је $BD = 7$ cm.

111. Кроз тачку C конструиши праву паралелну са AB а на њој тачку D тако да је $CD = 5$ cm.

112. Кроз тачку C конструиши праву p паралелну са AB. Кроз тачку A конструиши праву q тако да је $\measuredangle qAB = 90°$. Праве p и q се секу у траженој тачки D.

113. Види задатак 106.

114. а) $D\ (2, 3)$; б) $D(4, 3)$.



115. Постоји само један делтоид чије су странице 3 cm, 3 cm, 4 cm и 4 cm. Слепљивање је обављено по страници од 5 cm.

116. Два преостала угла су једнака:
$(360° - 70° - 80°) : 2 = 210° : 2 = 105°$.

117. Постоји и његови углови су: 80°, 90°, 100° и 90°.

118. Три: а) 110°, 65°, 120°, 65°; б) 110°, 120°, 110°, 20°; в) 120°, 110°, 120°, 10°.

119. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$, па је $ACBD$ делтоид. Зашто?

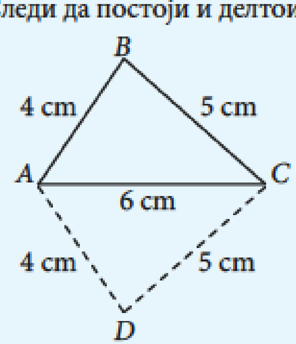
120. Могу, јер тај делтоид настаје слепљивањем хипотенуза два подударна правоугла троугла.

121. Не око сваког, али може око делтоида насталог слепљивањем два правоугла троугла по хипотенузи. Центар описаног круга је у средишту те хипотенузе (симетрале неједнаких углова делтоида).

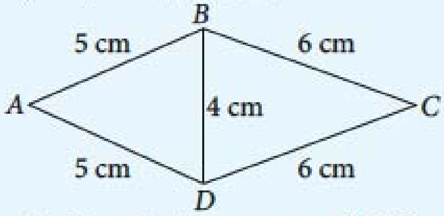
122. Може и то у сваки делтоид. Центар уписаног круга је у пресеку симетрала углова делтоида.

123. Постоји. На пример са угловима 80°, 80°, 80° и 120°.

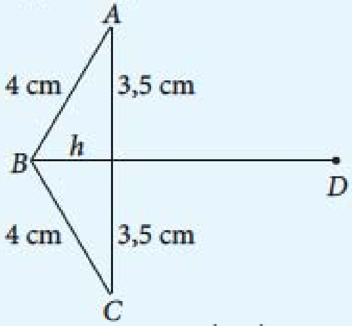
124. Постоји. Увери се да постоји ΔABC као на слици тако што ћеш проверити све три неједнакости троугла. Углови BAC и BCA су оштри. (Зашто?) Постоји и ΔADC подударан троуглу ABC (види слику). Следи да постоји и делтоид $ABCD$.



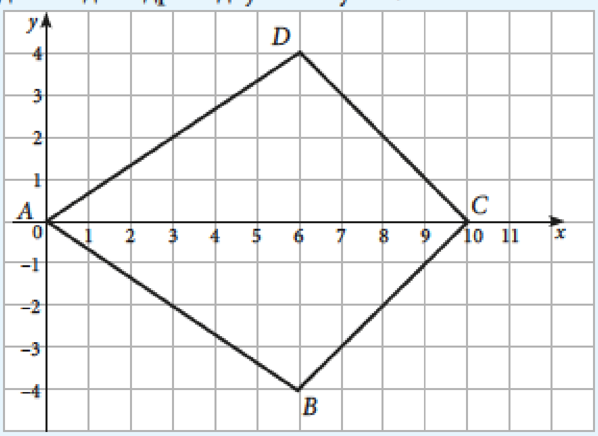
125. Постоји. Провери све неједнакости троугла и увери се да постоји једнакокраки ΔABD као на слици. На исти начин се увери да постоји и једнакокраки ΔBDC као на слици. Следи да постоји и делтоид $ABCD$.



126. Постоји. Постоји једнакокраки ΔABC као на слици. (Провери неједнакости троугла.) Висина троугла ABC из темена B мора бити краћа од 4 cm, дакле $h < 4$ cm. (Зашто?) То значи да у продужетку те висине постоји тачка D таква да је $BD = 8$ cm (јер је 8 cm > 4 cm > h). Следи да постоји и делтоид $ABCD$.



127. Теме D има координате (6, 4), јер оса симетрије делтоида садржи дијагоналу AC.



128. Троугао ABD је једнакокрак $AB = AD = 10$ cm, а троугао BCD је једнакостраничан, $BC = CD = DA = 14$ cm. Обим четвороугла $ABCD$ је: $10 + 10 + 14 + 14 = 48$ cm.

129. Дати четвороугао је ромб и има углове 80°, 100°, 80° и 100°.

130. ΔABC и ΔBCD су једнакокраки. Ако је: $\measuredangle BAC = \varphi$, онда је и $\measuredangle BCA = \varphi$, па је и $\measuredangle BDC = \varphi$. Ако је O пресек дијагонала, следи $\measuredangle BOC = 110°$. Тада је $2\varphi = 70°$, па је $\varphi = 35°$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 110°$, а углови четвороугла су: 70°, 70°, 110° и 110°.

131. Ако је један унутрашњи угао паралелограма, рецимо $\measuredangle DAB = 72°$, други угао је $\measuredangle ABC = 108°$. Тада из четвороугла $MBND$ следи: $\measuredangle MDN = 360° - 90° - 90° - 108° = 72°$.

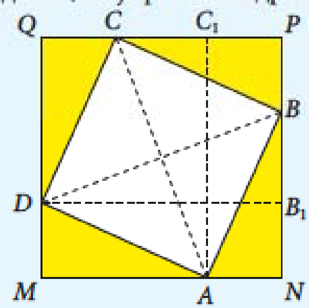
132. Не могу. Јер ако би сви били оштри, онда би њихов збир био мањи од $4 \cdot 90°$, а збир углова мора бити једнак 360°.

133. Три, јер ако би их било 4, онда би њихов збир био већи од 360°.

134. Ако је збир три угла четвороугла мањи од 180°, онда је четврти угао већи од 180°. То значи да је тај четвороугао неконвексан.

135. Збир углова α и γ је 188°, што значи да је $\beta + \delta = 172°$, те ниједан од углова β или δ, као ни α или γ, није већи од 180°, па је четвороугао конвексан.

136. ΔDMA, ΔANB, ΔBPC и ΔCQD су подударни (докажи!), па је $AB = BC = CD = DA$. Дакле, четвороугао $ABCD$ је ромб. Уочи на страницама NP и QP тачке B_1 и C_1 такве да је $B_1D \| NM$ и $C_1A \| PN$. Сада имамо $\Delta C_1CA \cong \Delta B_1BD$ (докажи!), па имамо $CA = BD$. Дакле, дијагонале ромба $ABCD$ су једнаке, па је ромб квадрат.



137. Средња линија трапеза је: $(10 + 6) : 2 = 8$ cm.

138. Средња линија трапеза је: $(20 + 12) : 2 = 16$ cm. Средње линије троуглова ADC и BCD су по 6 cm. Тада је дуж $MN = 16 - 6 - 6 = 4$ cm.

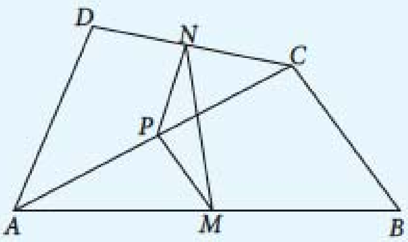
139. Јесте, јер из дате једнакости је дуж AB паралелна са CD, и три пута дужа од CD.

140. Јесте, али само ако су углови 80° и 100° суседни.

141. Нацртај слику и докажи $\measuredangle ABC = 30°$, па су углови трапеза 30°, 30°, 150° и 150°.

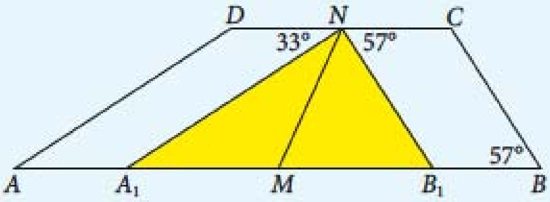
142. $\Delta AMB \cong \Delta CND$, па је $BM = DN$. $\Delta AMD \cong \Delta CNB$ па је $MD = NB$. Следи да је четвороугао $MBND$ паралелограм.

143. а) Нека је P средиште дијагонале AC. Тада су MP и PN средње линије троуглова ABC и ACD, па је $AD = 2 \cdot PN$ и $BC = 2 \cdot PM$. Тада је $AD + BC = 2 \cdot PN + 2 \cdot PM = 2(PN + PM) \geq 2 \cdot MN$, а неједнакост следи из неједнакости троугла MPN.

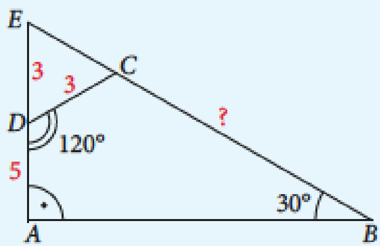


б) Једнакост важи ако су дужи PM и PN колинеарне, тј. ако су праве AD и BC паралелне, а тада је четвороугао $ABCD$ трапез.

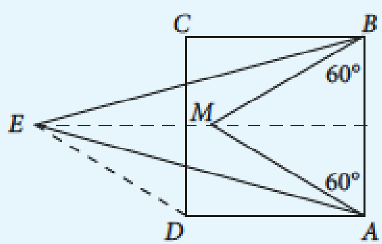
144. Уочимо тачке A_1 и B_1 тако да добијемо паралелограме AA_1ND и BB_1NC. Тада је дуж A_1B_1 једнака разлици основица AB и CD. И тада је $A_1M = B_1M = MN$, једнако половини разлике основица. То значи да је троугао A_1B_1N правоугли и $\measuredangle A_1NB_1 = 90°$. (Докажи ово самостално.) Како је $\measuredangle B_1NC = 57°$, то је угао $\measuredangle A_1ND = 33°$. Углови трапеза су: 33°, 57°, 123° и 147°.



145. Странице AD и BC продужимо до њиховог пресека у тачки E. Тада је троугао ABE правоугли, а његови углови су: $\measuredangle ABE = 30°$ и $\measuredangle AEB = 60°$. То значи да је троугао CDE једнакостранични, па је: $CD = DE = EC = 3$. Следи да је $AE = 5 + 3 = 8$, а $BE = 16$. Коначно $BC = BE - CE = 16 - 3 = 13$.

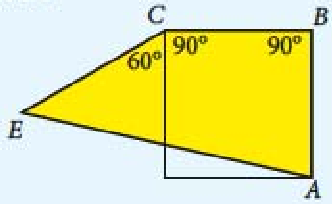


146. Уочи симетралу угла $\measuredangle AEB$ и на њој тачку M тако да је ΔBAM једнакостранични. Докажи $\measuredangle MEA = \measuredangle MAE = 15°$, па је ΔEAM једнакокраки, тј. $EM = MA$. Докажи и $EM \| AD$. Следи да је $AMED$ ромб. EA је дијагонала ромба која полови угао $\measuredangle MED$, па је $\measuredangle AED = 15°$.



147. Решење: 1,5. Помоћ: Нека је тачка O средиште дијагонала правоугаоника. Докажи $\measuredangle AOM = 30°$ и $\measuredangle OAM = 60°$ и $AO = 3$.

148. Погледај слику и увери се да је задатак практично идентичан задатку 147. Сада нађи начин да покажеш да је $\measuredangle CEA = 45°$ и $\measuredangle EAB = 75°$.



149. $\Delta ABM \cong \Delta ADN$, па је $AB = AD$. $\Delta ANC \cong \Delta AMC$, па је $CN = CM$, односно $CD = CB$. Четвороугао $ABCD$ је делтоид, па су његове дијагонале нормалне.

150. Нацртај слику, па се увери да на слици постоје троуглови чије средње линије задовољавају $CR = AS = QM : 2$, затим $DC = BA = MP : 2$ и $RD = SB = QP : 2$. По ставу ССС следи $\Delta ABS \cong \Delta CDR$. Слично се доказује $\Delta ADR \cong \Delta CBS$.

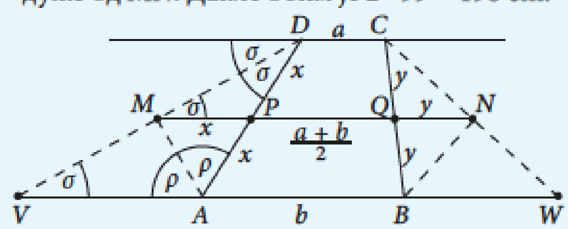
151. а) Тачке C, E и F су колинеарне, јер је:

$$\measuredangle ECF = \measuredangle ECA + \measuredangle ACB + \measuredangle BCF = 45° + 90° + 45° = 180°.$$

б) Једнакости дужи $EE' = AC'$ и $FF' = BC'$ се доказују из подударности троуглова AEE' и ACC', односно BFF' и BCC'.

152. Из услова задатка је $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \frac{\beta}{2}$ (нацртај слику). Како је: $\measuredangle ACD = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BDC = \frac{\beta}{2}$ то су ΔACD и ΔBCD, једнакокраки и тада је $AD = DC$ и $BC = CD$. Следи да су краци једнаки $AD = BC$, па је трапез једнакокрак.

153. Погледај слику. Нека права MN сече краке трапеза у тачкама P и Q. Прво докажи $\Delta AMV \cong \Delta AMD$, па следи да је $MV = MD$. Слично докажи да је $CN = NW$. Следи да је MN средња линија трапеза $VWCD$ и паралелна је са CD и AM. Онда је $\measuredangle PMD = \sigma$, па је ΔMDP једнакокраки, те је $PM = PD = AP = x$. Слично је $CQ = QN = BQ = y$. $PQ = \dfrac{a+b}{2}$ јер је PQ средња линија трапеза. Сада имамо $MN = PM + PQ + QN = x + \dfrac{a+b}{2} + y$. А обим трапеза $ABCD$ је $2x + a + b + 2y$, што је два пута дуже од MN. Дакле обим је $2 \cdot 99 = 198$ cm.



154. Нека је подножје нормале из A на дијагоналу BD тачка E. По условима задатка је $AE = EF$. Како су тачке A и F симетричне у односу на дијагоналу BD, то је $AD = DF = BC$. Ако је CC' растојање тачке C од дијагонале BD, онда је $CC' = EF$, па је права CF паралелна са BD. Дакле, четвороугао $BCFD$ је једнакокраки трапез.

155. Видети задатак 152.

156. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$, $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\left(-\vec{x}+\vec{y}\right)$,

$\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$,

$\overrightarrow{CD} = -\vec{x}$, $\overrightarrow{DA} = -\vec{y}$.

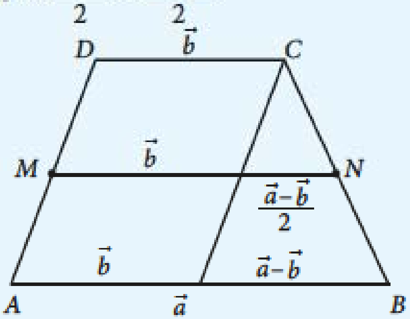
157. $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = -\vec{a} - \vec{b}$.

158. Види задатак 84.

159. Ако је у трапезу $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, онда је вектор средње линије трапеза:

$$\overrightarrow{MN} = \vec{b} + \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$



160. Из неједнакости троугла следи:
а) може; б) може; в) не може.

161. Како је $MB = MD$ и $AM = CM$, то се дијагонале четвороугла $ABCD$ полове, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

162. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм јер има паралелне странице истих дужина. Онда следи да су друге две странице такође истих дужина и да су наспрамни углови једнаки.

163. Пошто се дијагонале полове, онда сваке две половине дијагонала граде угао од 90°. Тада имамо $\Delta AOB \cong \Delta COB \cong \Delta COD \cong AOD$, па одатле следи $AB = CB = CD = AD$.

7 ПОВРШИНА ТРОУГЛА И ЧЕТВОРОУГЛА

1.

Дужина	cm	dm	mm
1 m	100	10	1 000
0,4 m	40	4	400
3,6 m	360	36	3 600

2.

Површина	cm^2	dm^2	mm^2
1 m^2	10 000	100	1 000 000
0,2 m^2	2 000	20	200 000
7,5 m^2	75 000	750	7 500 000

3. 500 m^2. **4.** Да.

5.

Површина плаво обојених квадратића	10	cm^2
Површина жуто обојених квадратића	18	cm^2
Површина црвено обојених квадратића	26	cm^2
Површина бело обојених квадратића	2	cm^2

6. Да. Две подударне фигуре се могу померити тако да се преклапају, а површине две фигуре које се преклапају, су једнаке.

7. Да. На пример, F_1 је квадрат странице 6 cm и фигура F_2 је правоугаоник страница 9 cm и 4 cm. Ове две фигуре нису подударне а имају исту површину. Колика је та површина?

8. Обим 60 cm, површина 216 cm^2.

9. Страница је 2,5 cm; површина 6,25 cm^2.

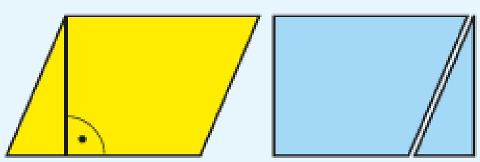
10. а) 40 cm^2; б) 35 cm^2.

11. Квадрат има већу површину. Обими су им једнаки.

12. Површина пода просторије је 91 000 cm^2, а површина плочице је 91 cm^2. Потребно је 1 000 плочица.

13. а) 16 cm^2; б) 26 cm^2.

14.



15. 20 cm^2.

16. Нису сви подударни. Не постоји квадрат чија је страница 6 cm, а висина 4 cm. Постоји правоугаоник тих особина. Постоји и ромб. Ромб и правоугаоник нису подударни.

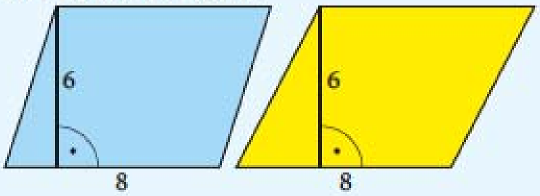
17. Допуњена таблица је:

a	9 cm	$\frac{7}{2}$ = 3,5 cm	14 cm	8 cm	30 cm
h_a	8 cm	12 cm	$\frac{36}{7}$ cm	6 cm	$\frac{72}{5}$ = 14,4 cm
b	12 cm	7 cm	9 cm	12 cm	18 cm
h_b	6 cm	6 cm	8 cm	4 cm	24 cm
O	42 cm	21 cm	46 cm	40 cm	96 cm
P	72 cm²	42 cm²	72 cm²	48 cm²	432 cm²

18. Површина 540 cm²; друга висина 27 cm.

19. 180 cm².

20. Постоје. Довољно је да имају исте висине, на пример као на слици.



21. Паралелограми *A* и *B* могу, али не морају бити подударни.

22. Ромбови *A* и *B* могу, али не морају бити подударни. **23.** Да.

24. ΔABC и ΔBCD имају површину по 25 cm².

25. D (3, 4). Површина је $5 \cdot 4 = 20$.

26. Пошто је $P = 18 \cdot h_a = 12 \cdot h_b$, онда је $h_a : h_b = 12 : 18 = 2 : 3$.

27. Пошто је $P = 5x \cdot h_a = 3x \cdot h_b$, онда је $h_a : h_b = (3x) : (5x) = 3 : 5$.

28. ΔABD и ΔBCD имају једнаке површине; 20 cm².

29. Троуглови ABC и CDA су подударни и имају једнаке површине; 63 cm². **30.** 90 cm².

31. Допуњена таблица има следећи изглед:

a	20	30	12	15
b	15	20	16	12
h_a	12	10	8	8
h_b	16	15	6	10
P	120	150	48	60

32. Висине троугла су $\frac{168}{13}$ cm, $\frac{168}{14} = 12$ cm и $\frac{168}{15}$ cm.

33. а) $AK = 6$ cm; $KM = 9$ cm; $MB = 12$ cm.
б) Површине ΔAKC, ΔKMC и ΔBMC су 48 cm², 72 cm² и 96 cm².

34. а) 6 cm; б) 36 cm². **35.** 8 cm.

36. Хипотенуза је 10 cm, а површина је 20 cm².

37. 84 cm². **38.** Површина $(20 + 12) \cdot 14 : 2 = 224$ cm².

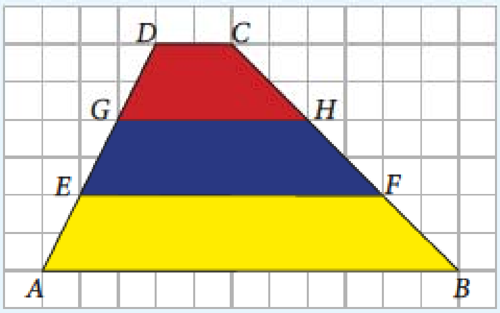
39. Допуњена таблица има следећи изглед:

Дужина веће основице трапеза	10 cm	13 cm	18 cm	20 cm
Дужина мање основице трапеза	8 cm	7 cm	12 cm	16 cm
Дужина средње линије трапеза	9 cm	10 cm	15 cm	18 cm
Дужина висине трапеза	5 cm	8 cm	10 cm	12 cm
Површина трапеза	45 cm²	80 cm²	150 cm²	216 cm²

40. 6 cm. **41.** 18 cm.

42. Средња линија трапеза је $(28 + 10) : 2 = 19$ cm.
Површина трапеза је $19 \cdot 16 = 304$ cm².
Површине мањих трапеза су
$(28 + 19) \cdot 8 : 2 = 188$ cm² и
$(19 + 10) \cdot 8 : 2 = 116$ cm².
Однос површина је $188 : 116 = 47 : 29$.

43. Ако је $CD = 2$ cm, онда је $GH = 5$ cm, $EF = 8$ cm и $AB = 11$ cm, а висина је 6 cm. Површина целог трапеза је 39 cm², а површине мањих трапеза су 7 cm² (црвени), 13 cm² (плави) и 19 cm² (жути).



44. Ако средња линија трапеза и висина трапеза имају дужину x, онда је површина трапеза $x \cdot x = 100$ cm², па је $x = 10$ cm. Ако се основице трапеза разликују за 4 cm, онда једна има дужину 12 cm, а друга 8 cm.

45. Дуж MN је средња линија троугла и она је паралелна са основицом AB што значи да је четвороугао $ABNM$ трапез. Остале средње линије деле троугао на 4 подударна троугла па је површина сваког од троуглова $60 : 4 = 15$ cm². То значи да је површина троугла MNC једнака 15 cm², а површина трапеза $ABMN$ једнака 45 cm².

46. Слично претходном задатку, површина ΔABC је 96 cm². Површина ΔCMN је $96 : 4 = 24$ cm², а површина трапеза $ABNM$ је 72 cm².

47. Тражена тачка је $D(2, 6)$; површина трапеза $ABCD$ је 20.

48. $14 \cdot 14 : 2 = 98$ cm². **49.** $12 \cdot 18 : 2 = 108$ cm².

50. $20 \cdot 30 : 2 = 300$ cm². **51.** $16 \cdot 12 : 2 = 96$ cm².

52. Да направи змаја у облику делтоида чије су дијагонале 32 cm и 40 cm, Лази треба најмање $32 \cdot 40 : 2 = 640\ \text{cm}^2$ картона.

53. Дијагонале четвороугла *MNPQ* су 16 cm и 10 cm, па је површина четвороугла *MNPQ* једнака $16 \cdot 10 : 2 = 80\ \text{cm}^2$. Како је површина правоугаоника *ABCD* једнака $640\ \text{cm}^2$, то је површина обојене фигуре $640 - 80 = 560\ \text{cm}^2$.

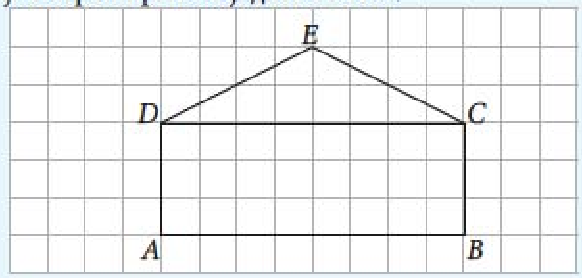
54. Површина ромба *ABCD* је $18 \cdot 12 : 2 = 108\ \text{cm}^2$. Имамо $AM = MN = NC = 18 : 3 = 6$ cm, па је површина ромба *MBND* $12 \cdot 6 : 2 = 36\ \text{cm}^2$. Тада је површина обојене фигуре једнака $108 - 36 = 72\ \text{cm}^2$.

55. $8 \cdot 6 : 2 = 24$. **56.** $6 \cdot 6 : 2 = 18\ \text{cm}^2$.

57. $(80 + 40) \cdot 40 : 2 = 2\,400\ \text{cm}^2$.

58. Слово П има 12 квадрата, а Р има 10 квадрата, па су им површине $12\ \text{dm}^2$ и $10\ \text{dm}^2$.

59. Фигуру сачињавају правоугаоник и трогао, чији је збир површина једнак $32\ \text{cm}^2$.



60. Једнаке су, јер и једна и друга представљају површину полукруга.

61. Странице имају дужине 16 cm и 20 cm. Површина је $320\ \text{cm}^2$.

62. Површина правоугаоника је $144\ \text{cm}^2$, а одатле је страница квадрата 12 cm јер је $12 \cdot 12 = 144$. Обим квадрата је 48 cm, а правоугаоника 50 cm. Правоугаоник има већи обим.

63. Игралиште има димензије 44 m и 24 m; површина је $1\,056\ \text{m}^2$.

64. $D(1, 2)$; површина 20.

65. Површина квадрата је $64\ \text{cm}^2$. Странице правоугаоника су x и $4x$, а његова површина $x \cdot 4x$ мора бити такође једнака $64\ \text{cm}^2$. Тада су странице правоугаоника $x = 4$ cm и $4x = 16$ cm. Обим квадрата је 32 cm, а обим правоугаоника је 40 cm. Обим правоугаоника је за 8 cm већи од обима квадрата.

66. Нека је страница квадрата a. Страница увећаног квадрата је $4a$, па су обими квадрата и увећаног квадрата $4a$ и $16a$, а површине квадрата и увећаног квадрата $a \cdot a$ и $16 \cdot a \cdot a$. Дакле, обим се повећао 4 пута, а површина 16 пута.

67. Посматрамо квадрат странице a и правоугаоник страница $2a$ и $3a$. Њихови обими су редом $4a$ и $2 \cdot (2a + 3a) = 10a$, а површине редом $a \cdot a$ и $2a \cdot 3a = 6 \cdot a \cdot a$. Обим правоугаоника је већи 2,5 пута, а површина 6 пута.

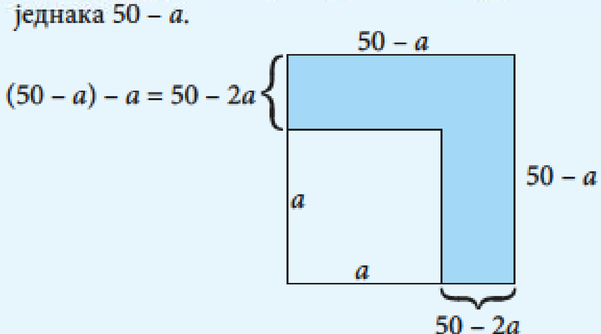
68. Површина сваког троугла је четвртина површине квадрата, а то је $64\ \text{cm}^2$.

69. Нека је дужина странице малог квадрата a. Када се његова страница увећа за 3 cm, његова површина се увећа за $3 \cdot a + 9 + 3 \cdot a = 57$. Следи да је $6a = 48$ cm па је $a = 8$ cm. Обим првог квадрата је 32 cm.

70. Ако је страница мањег квадрата a, онда се површине разликују за $a + 1 + a = 63$ cm. Тада је $a = 31$ cm. Обими квадрата су 124 cm и 128 cm, а површине су $961\ \text{cm}^2$ и $1\,024\ \text{cm}^2$.

71. <u>I начин:</u> Ако оба квадрата имају странице 25 cm, збир обима је 200 cm, али су им површине исте. То значи да морамо увећавати страницу једног, а смањивати страницу другог квадрата да им разлика површина постане $100\ \text{cm}^2$. Пробајмо да увећамо старницу првог квадрата за 1 cm, а смањимо страницу другог такође за 1 cm. Тада су странице 26 cm и 24 cm. Збир обима остаје 200 cm, а површине су $676\ \text{cm}^2$ и $576\ \text{cm}^2$, тако да је разлика површина $100\ \text{cm}^2$. Обими ових квадрата су 104 cm и 96 cm.

<u>II начин:</u> Нека је a страница мањег квадрата. Збир странице мањег и странице већег квадрата мора бити 50 cm (јер је то четвртина збира обима), па је зато страница већег квадрата једнака $50 - a$.



На слици је осенчена разлика површина два квадрата, и она мора бити $100\ \text{cm}^2$, па имамо једначину:

$$2 \cdot a \cdot (50 - 2a) + (50 - 2a) \cdot (50 - 2a) = 100$$
$$[2 \cdot a + (50 - 2a)] \cdot (50 - 2a) = 100$$
$$50 \cdot (50 - 2a) = 100.$$

Решење ове једначине је дужина странице мањег квадрата $a = 24$ cm. Страница већег квадрата је $50 - a = 26$ cm. Сада самостално израчунај обиме и површине оба квадрата.

72. Нов квадрат мора имати површину $9 + 16 = 25\ \text{cm}^2$, дакле страницу 5 cm, а обим 20 cm.

73. Нека су странице правоугаоника x и $x + 2$. Тада је увећање површине једнако $3(x + 2) + 9 + 3x = 6x + 15 = 105$, па је $x = 15$ cm. Странице су $x = 15$ cm и $x + 2 = 17$ cm. Обим је 64 cm, а површина $255\ \text{cm}^2$.

74. Странице правоугаоника су 9 cm и 4 cm, па је обим 26 cm, а површина је 36 cm². Квадрат исте површине има страницу 6 cm. Обим квадрата је 24 cm, дакле мањи од обима правоугаоника.

75. Под има површину $200 \cdot 22 \cdot 11 = 48\,400$ cm². Квадратна плочица има површину 400 cm². Број потребних квадратних плочица је $48\,000 : 400 = 121$.

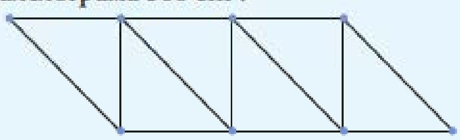
76. Да. Остатак има површину $100 - 6 \cdot 6 = 64$ cm², што је површина квадрата странице 8 cm, чији је обим 32 cm.

77. Ако је страница сваког квадрата x, онда су странице правоугаоника x и $2x$, а обим правоугаоника $6x = 96$, па је $x = 16$ cm. Обим сваког квадрата је 64 cm. Обим правоугаоника је за 32 cm већи од обима квадрата.

78. Нека је страница квадрата x. Странице правоугаоника су $x + 4$ и $x - 3$. Обим квадрата је $4x$ а правоугаоника је $4x + 2$, те правоугаоник има већи обим за 2 cm.

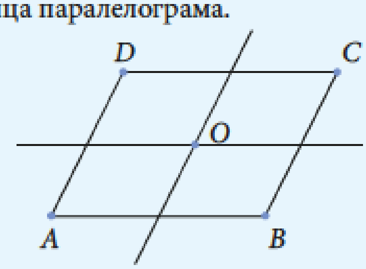
79. Висина на основици AB је 4 cm. Површина је једнака 44 cm².

80. Површина једног троугла је 50 cm², а површина паралелограма 300 cm².

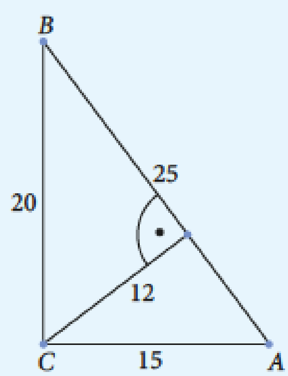


81. Увери се: висина ромба 5 cm, а површина 50 cm².

82. Има 2 решења. Права p конструисана кроз тачку O, може бити паралелна било којој од страница паралелограма.

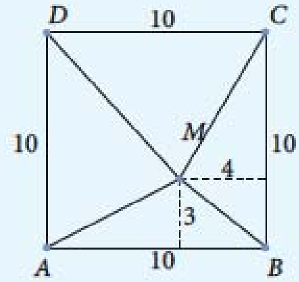


83. $12 \cdot 12 : 2 = 72$ cm².

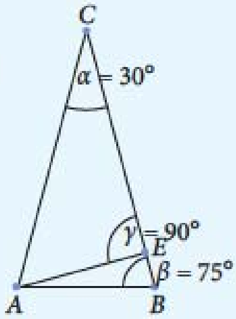


84. Најмања висина одговара хипотенузи, а остале две су катете.
а) 15 cm; б) 20 cm; в) 150 cm²; г) $150 \cdot 2 : 12 = 25$ cm.

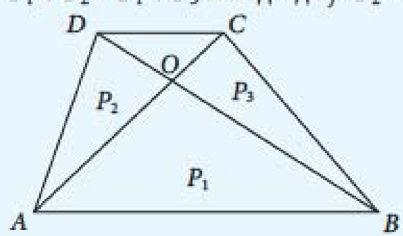
85. а) 15 cm²;
б) 20 cm²;
в) 35 cm²,
г) 30 cm².



86. Висина AE наспрам угла од 30° у ΔAEC је једнака половини крака; 8 cm. Површина је $8 \cdot 16 : 2 = 64$ cm².



87. ΔABC и ΔABD имају једнаке површине (имају заједничку страницу AB и једнаке висине), дакле $P_1 + P_2 = P_1 + P_3$. Следи да је $P_2 = P_3$.

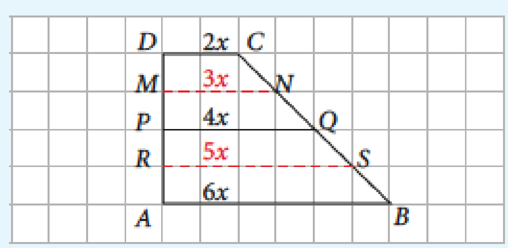


88. Дужина AB је 5, а висина из C на AB је 4; површина је 10.

89. $D(5, 2)$; па је висина 4, а основице су 6 и 4; површина је 20.

90. Продужи AD и BC тако да се секу у тачки M. Онда је $AM = BM = 40$ cm (јер је CD средња линија троугла ABM), а $CM = DM = 20$ cm. По узору на задатак 86, површина ΔCDM је 100 cm² а површина ΔABM је 400 cm². Површина трапеза је $400 - 100 = 300$ cm².

91. Како су висине доњег и горњег трапеза ($ABQP$ и $PQCD$) једнаке то им је однос површина једнак односу средњих линија, па су средње линије једнаке $MN = 3x$ и $RS = 5x$. Тада средња линија трапеза $RSNM$ мора бити једнака $PQ = 4x$. Основица AB мора бити $AB = 6x$ јер је $RS = 5x$ средња линија трапеза $ABQP$, чија друга основица је $QP = 4x$. Слично, $CD = 2x$. Основице AB и CD су у односу $6 : 2 = 3 : 1$.



92. Пошто је паралелограм централносиметричан у односу на тачку O свака права која садржи O, а не садржи дијагоналу паралелограма, испуњава услов. Дијагонале паралелограма деле правоугаоник на два троугла, а не на два четвороугла.

93. $D(2, 5)$. Површина $6 \cdot 8 : 2 = 24$.

94. Нека је $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ и нека су D и D_1 подножја висина из A и A_1 на BC и B_1C_1. Тада је $\Delta ABD \cong \Delta A_1B_1D_1$ по ставу УСУ. Дакле троуглови имају једнаке висине, па и површине.

95. а) Не постоји. Претпоставимо да је површина троугла једнака $3x$. То значи да су одговарајуће дужине страница троугла једнаке $6x$, $3x$ и $2x$, али ове дужине страница не задовољавају неједнакости троугла, јер имамо: $2x + 3x = 5x < 6x$.
б) Постоји.

96. Средње линије деле сваки троугао на четири подударна троугла површине $2\,020 : 4 = 505$.

97. 12 cm² и 9 cm². (Допуни до правоугаоника, па одузми површине троуглова.)

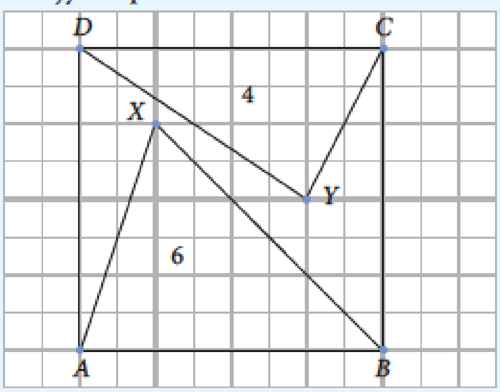
98. 13,5 cm².

99. 7 пута већа од површине ΔABC и једнака је 77.

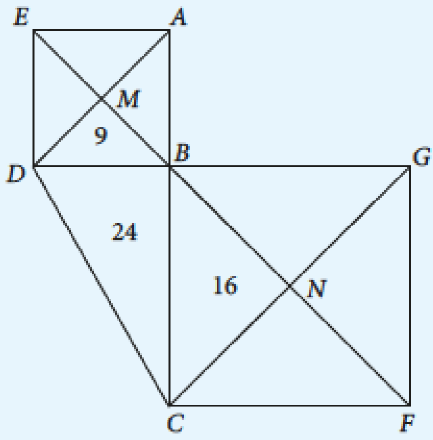
100. 100 cm² (види задатке 86 и 90).

101. 30. **102.** 36.

103. Могу. На слици је један пример. Троуглови имају површине 4 и 6.



104. Површина се рачуна као збир површина троуглова BNC, BCD и BMD. $16 + 24 + 9 = 49$.



105. 8. Ако са N означимо пресек правих које садрже дужи AB и DM, уочавамо $\Delta BNM \cong \Delta CDM$ (УСУ), па је M средиште DN а површина ΔAND једнака је површини трапеза. Површина ΔAMD једнака је половини површине ΔAND.

106. 75 (види задатак 90).

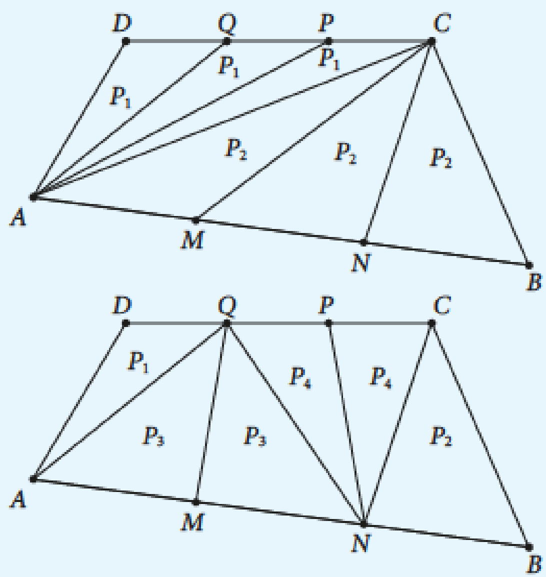
107. Може. Једнакокрако правоугли троугао са катетом 0,5 cm има већу површину него једнакокраки троугао са основицом 200 cm којој одговара висина 0,000000001 cm.

108. Постоји. Види задатак 95 и размотри да ли постоји троугао чије су висине 1, 1 и 2.

109. Површине су 30 cm² и 50 cm². Погледај и задатак 91.

110. Означимо са a страницу AB и са h њој одговарајућу висину и приметимо да су висине из M на AB и CD у збиру једнаке h, па је зато $P_1 + P_3 = a \cdot h : 2$ што је половина површине паралелограма. Одатле је $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

111. Погледај слике. Троуглови са истим дужинама страница и висина, имају исте површине. Површину четвороугла $ANCQ$ можемо изразити на два начина $2 \cdot (P_1 + P_2) = 2 \cdot (P_3 + P_4)$. Одатле је површина четвороугла $MNPQ$ једнака $P_3 + P_4 = P_1 + P_2$ а то је трећина површине четвороугла $ABCD$ која износи $3 \cdot (P_1+P_2)$.



112. Види задатак 92. Било која права кроз O дели паралелограм на фигуре једнаких површина.

113. Нацртај слику и увери се је висина трапеза 3. Површина је 15.

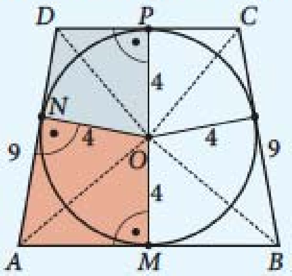
114. Оба трапеза имају исту висину и једнаке основице, па су им и површине једнаке.

115. Види задатак 105.

116. Површина ΔAMD је 10. Из претходног задатка имамо да је површина трапеза 20.

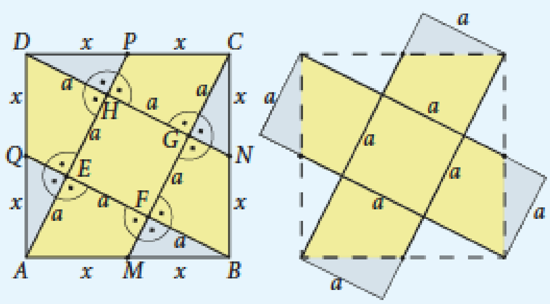
117. Допунимо фигуру до правоугаоника и онда одузимамо површине које смо додали и добијемо 52.

118. Види слику. Центар уписаног круга O је једнако удаљен од сваке странице трапеза, што значи да је O на симетрали сваког угла трапеза. Сада докажи $\Delta AMO \cong \Delta ANO$ и $\Delta DNO \cong \Delta DPO$, а затим да је површина трапеза 4 пута већа од површине ΔAOD. Површина трапеза је 72.

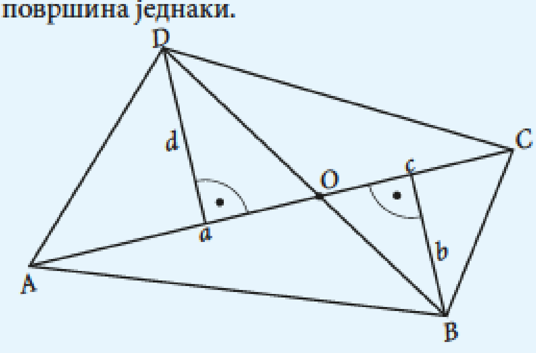


119. Из средњих линија троуглова чија је једна страница дијагонала четвороугла, добијамо да су $KL||AC||MN$ и $LM||BD||NK$ одакле је $KLMN$ паралелограм. Његова површина је $P:2$.

120. Погледај слике. Прво докажи:
$\Delta APD \cong \Delta DNC \cong \Delta CMB \cong \Delta BQA$. Следи да су сви углови у пресецима E, F, G и H једнаки 90°. Сада докажи $\Delta BFC \cong \Delta CGD \cong \Delta DHA \cong \Delta AEB$. Пошто је $FB||GN$, онда је GN средња линија ΔFBC. Следи да је $FG = GC = a$. Слично доказујемо $GH = HE = EF = a$, ра је $EFGH$ квадрат. Сада докажи да су сиво осенчени троуглови подударни, и прераспореди их у нову фигуру која има исту површину као квадрат $ABCD$. Следи да је површина квадрата $EFGH$ једнака петини површине квадрата $ABCD$, дакле 20 cm².



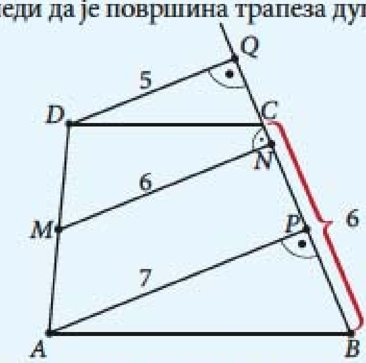
121. Погледај слику. Обележимо са b и d висине из B и D. Обележимо $AO = a$ и $CO = c$. Изрази површине троуглова ΔDOA, ΔCOD, ΔAOB и ΔBOC помоћу a, b, c и d, па докажи да су производи површина једнаки.



122. 40 cm². Помоћ: Докажи да је површина ΔAQM два пута већа од површине ΔADB, па настави даље и за остале троуглове ΔBMN, ΔCNP и ΔDPQ.

123. Означимо површину ΔDOA са x. Из задатка 121 имамо да је $8 \cdot 18 = 9 \cdot x$, па је $x = 16$.

124. Погледај слику. Обележимо са AP и DQ висине из A и D на BC. Ако је M средиште странице AD, онда висина из M на BC има дужину $MN = 6$ јер је MN средња линија трапеза $APQD$. Онда је површина ΔBCM једнака 18, а из задатака 115 следи да је површина трапеза дупло већа, 36.



125. Решава се слично као задатак 120. Четвороугао је квадрат површине 18 cm².

126. Додајмо тачке E, F и G као на слици. Из задатка 115, знамо да је површина трапеза $AFED$ једнака површини трапеза $BFEC$ (а можеш то и изнова самостално доказати). Пошто је центар уписане кружнице једнако удаљен од сваке странице, симетрала тупог угла пролази кроз центар уписане кружнице. Онда имамо $\Delta EOC \cong \Delta FOG$ (по ставу УСУ), па је површина ΔGBC једнака површини трапеза $BFEC$.

127. $D(0, 4)$, а тражена површина је 42.

ИНДЕКС ПОЈМОВА