Мр Срђан Огњановић • Наташа Костић

МАТЕМАТИКА 5

Уџбеник са збирком задатака за пети разред основне школе

АрхиКњига

МАТЕМАТИКА 5

Уџбеник са збирком задатака за пети разред основне школе

ФОНДАЦИЈА АЛЕК КАВЧИЋ Редакција Фондације Алек Кавчић

Аутори мр Срђан Огњановић, Наташа Костић

Рецензенти Мирослав Антонић, ОШ „Јосиф Панчић", Београд
Бојана Жујовић, ОШ „Кнез Лазар", Лазаревац
Виолета Бараћ, Гимназија, Лазаревац

Главни уредник Смиљка Наумовић

Уредник Смиљка Наумовић

Илустрације Марија Поповић, Горан Витановић

Лектура и коректура Редакција Фондације Алек Кавчић

Ликовни уредник Слађана Николић

Дизајн и прелом Марија Поповић, Слађана Николић

Издавач АрхиКњига д. о. о.
Љубостињска 2, Београд

За издавача Смиљка Наумовић

Штампа Дунав д. о. о., Земун

Тираж 3.000

Прво издање, 2022.

ISBN 978-86-6130-013-4

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)

ОГЊАНОВИЋ, Срђан, 1954-
Математика 5 : уџбеник са збирком задатака за пети разред основне школе / Срђан Огњановић, Наташа Костић ; [илустрације Марија Поповић, Горан Витановић]. - 1. изд. - Београд : АрхиКњига, 2022 (Земун : "Дунав"). - 232 стр. : илустр. ; 29 cm

Тираж 3.000. - Решења: стр. 216-229. - Регистар.

ISBN 978-86-6130-013-4

1. Костић, Наташа, 1971- [аутор]

COBISS.SR-ID 71980809

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије одобрило је овај уџбеник за употребу у школама решењем број: 650-02-00054/2022-07 од 1. 8. 2022. године.

РЕЧ АУТОРА

Овај уџбеник са збирком задатака намењен је ученицима петог разреда основне школе. Написан је по најновијем програму за предмет Математика. Градиво је подељено у осам целина:

1. Природни бројеви и дељивост – први део
2. Основни појмови геометрије
3. Природни бројеви и дељивост – други део
4. Разломци – први део
5. Угао
6. Разломци – други део
7. Осна симетрија
8. Разломци – трећи део

Свака од ових целина (поглавља) подељена је на више одељака. После сваког одељка у књизи следе задаци који непосредно илуструју градиво, док је на крају сваког поглавља дат избор „разних задатака” који треба да послуже, како за увежбавање и понављање, тако и за продубљивање градива. Задаци, који су нешто тежи, означени су звездицама. На крају књиге дати су резултати, а понегде и кратка упутства за решавање задатака или комплетна решења.

Аутори

САДРЖАЈ

Водич кроз уџбеник . . . 6

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ И ДЕЉИВОСТ – *Први део*

1.1. Својства операција сабирања, одузимања, множења и дељења у скупу N_0 . . . 7
1.2. Дељење са остатком у скупу N_0 (једнакост $a=b\cdot q+r,\ 0\leq r<b$) . . . 14
1.3. Својства дељивости. Чиниоци и садржаоци природног броја . . . 17
1.4. Дељивост са 2, 5 и декадним јединицама . . . 20
1.5. Дељивост са 4 и 25 . . . 23
1.6. Дељивост са 3 и 9 . . . 25
1.7. Скупови . . . 27
1.8. Скуповне операције: унија, пресек и разлика . . . 31
Разни задаци . . . 34

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

2.1. Тачке и праве, односи припадања и распореда . . . 38
2.2. Односи правих у равни . . . 41
2.3. Мерење дужине и једнакост дужи . . . 44
2.4. Преношење и надовезивање дужи . . . 46
2.5. Многоугао . . . 50
2.6. Кружница и круг. Кружница и права . . . 55
2.7. Централна симетрија . . . 62
2.8. Вектор и транслација . . . 68
Разни задаци . . . 73

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ И ДЕЉИВОСТ – *Други део*

3.1. Прости и сложени бројеви. Ератостеново сито . . . 78
3.2. Растављање природних бројева на просте чиниоце . . . 81
3.3. Заједнички делилац и највећи заједнички делилац. Еуклидов алгоритам за налажење НЗД . . . 83
3.4. Заједнички садржалац и најмањи заједнички садржалац. Веза између НЗД и НЗС . . . 88
Разни задаци . . . 92

РАЗЛОМЦИ – *Први део*

4.1. Појам разломка облика $\frac{a}{b}$ $(a, b\in N)$ . . . 94
4.2. Придруживање тачака бројевне полуправе разломцима . . . 98
4.3. Проширивање, скраћивање и упоређивање разломака . . . 101
4.4. Децимални запис разломка и превођење у запис облика $\frac{a}{b}$ $(a\in N_0,\ b\in N)$ . . . 107
4.5. Упоређивање и заокругљивање бројева у децималном запису . . . 111
Разни задаци . . . 115

УГАО

5.1. Угао, централни угао, једнакост углова 119
5.2. Преношење углова и надовезивање углова 123
5.3. Упоредни углови, врсте углова 125
5.4. Мерење углова, сабирање и одузимање мере углова .128
5.5. Угао између две праве, унакрсни углови 131
5.6. Транслација и углови. Углови на трансверзали 134
Разни задаци 138

РАЗЛОМЦИ – *Други део*

6.1. Сабирање и одузимање разломака (запис $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$) 143
6.2. Сабирање и одузимање разломака (децимални запис) 147
6.3. Основна својства сабирања и одузимања разломака. Бројевни изрази 149
6.4. Једначине са сабирањем и одузимањем разломака 151
6.5. Неједначине са сабирањем и одузимањем разломака 154
6.6. Множење разломака (запис $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$) 157
6.7. Множење разломака (децимални запис) 160
6.8. Реципрочан број. Дељење разломака (запис $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$) 163
6.9. Дељење разломака (децимални запис) 166
6.10. Основна својства множења и дељења разломака. Бројевни изрази. 169
6.11. Једначине са множењем и дељењем разломака 172
6.12. Неједначине са множењем и дељењем разломака 176
Разни задаци 179

ОСНА СИМЕТРИЈА

7.1. Осна симетрија 187
7.2. Осносиметричне фигуре 194
7.3. Симетрала дужи и конструкција нормале 196
7.4. Симетрала угла 199
Разни задаци 202

РАЗЛОМЦИ – *Трећи део*

8.1. Проценти и примена процената 205
8.2. Размера. Аритметичка средина 209
Разни задаци 213

РЕШЕЊА 216

ИНДЕКС ПОЈМОВА 230

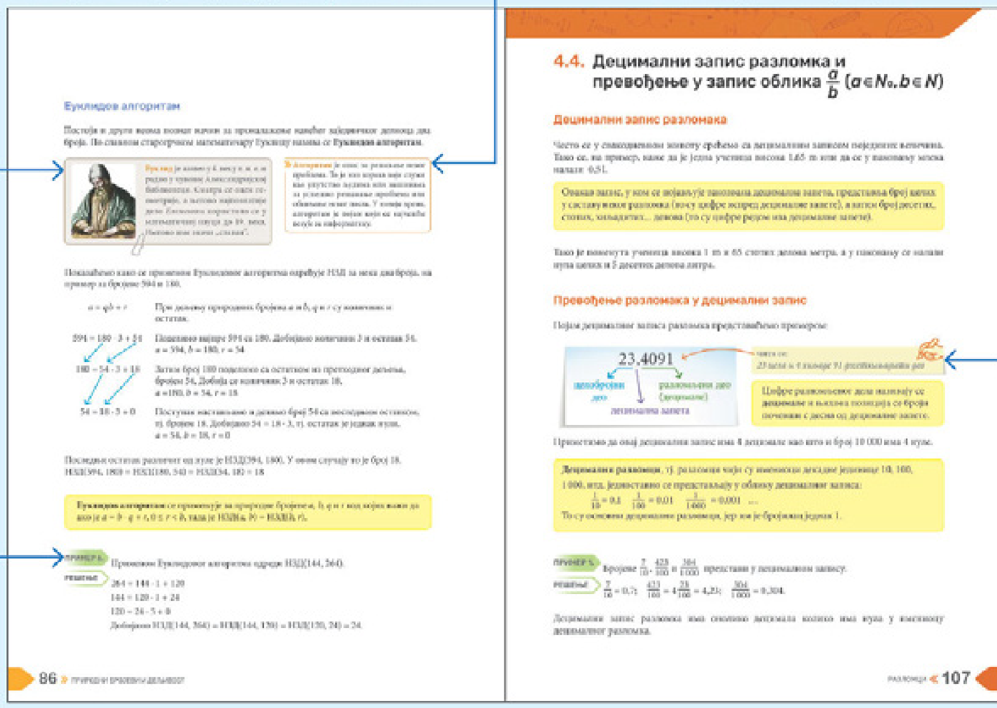
ВОДИЧ КРОЗ УЏБЕНИК

Непознате речи су објашњене уз текст у лекцији где су употребљене

Допунска објашњења споредних појмова и поступка израчунавања

Сазнај више о математичарима, језичким појавама, предметима из окружења и реши задатке на интернету који су у вези са градивом лекције

Пример који је решен за разумевање новог градива у лекцији

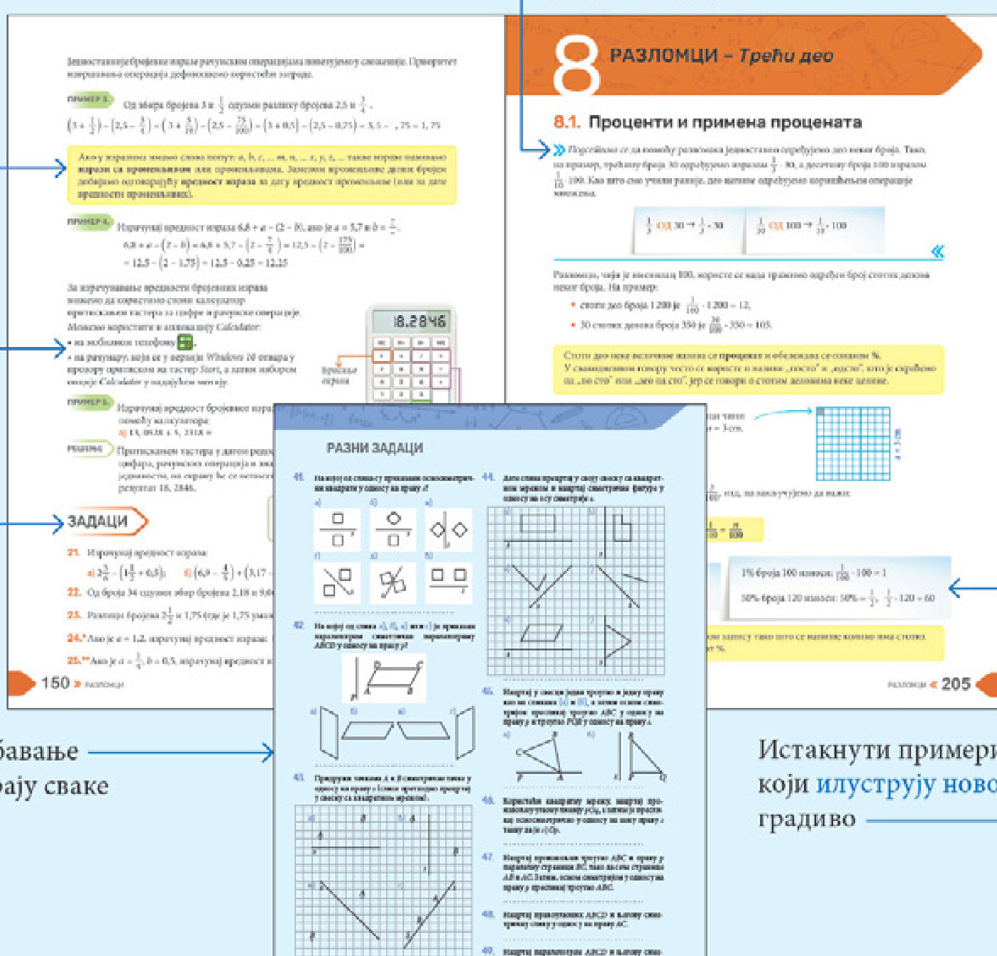


Подсетимо се претходно усвојеног градива

Објашњење или тврђење у вези са новим математичким појмом

При решавању неких задатака користи се калкулатор

Задаци за увежбавање градива на крају лекције, чија се решења налазе на крају уџбеника



Разни задаци за увежбавање и проверу знања на крају сваке тематске целине

Истакнути примери који илуструју ново градиво

1 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ И ДЕЉИВОСТ – *Први део*

1.1. Својства операција сабирања, одузимања, множења и дељења у скупу N_0

У свакодневном животу често користимо бројеве. На пример, када говоримо о броју ученика у одељењу, броју књига на полици у библиотеци, резултату кошаркашке утакмице... У свим овим примерима појављују се природни бројеви: 1, 2, 3, 4...

Каже се да бројеви 1, 2, 3, 4... **представљају елементе скупа природних бројева**. Тај скуп обележава се словом N. Овај скуп има бесконачно много чланова (елемената) – то су сви природни бројеви. Често се користи и проширени скуп природних бројева. То је скуп N_0 који се добија када се природним бројевима придода и број 0.

Природних бројева има бесконачно много, јер од сваког природног броја постоји већи. Број који је за један већи од неког природног броја назива се **следбеником** тог броја. Сви природни бројеви имају следбенике. **Претходник** неког природног броја је природан број за један мањи од њега. Сви природни бројеви, осим броја 1, имају претходнике.

Подсетимо се да се сви природни бројеви, па и бројеви из скупа N_0, могу придружити тачкама бројевне полуправе:

Број 0 је мањи од сваког природног броја.

Стрелица показује смер у ком бројеви расту.

n	природан број
$n+1$	следбеник природног броја n
$n-1$	претходник природног броја n $(n \neq 1)$

На бројевној полуправој се може видети како се упоређују бројеви из скупа N_0. Ако се тачка која одговара броју a налази лево у односу на тачку која одговара броју b, тада је a мање од b.

То записујемо овако: $a < b$.

На пример: $3 < 6$,
$5 < 8$,
$0 < 10$, итд.

ПРИМЕР 1. Дати су бројеви 1, 3, 5, 11, 12.

а) Који бројеви су мањи од следбеника броја 4?

б) Који бројеви су већи од претходника броја 7?

РЕШЕЊЕ

а) Следбеник броја 4 је број 5. Од броја 5 мањи су 1 и 3, што записујемо $1 < 5$ и $3 < 5$.
Број 5 није мањи од следбеника броја 4, тј. важи $5 = 5$. Важи такође и $5 \leq 5$.

б) Претходник броја 7 је број 6. Од броја 6 већи су 11 и 12. То пишемо $11 > 6$ и $12 > 6$.

Најважније операције у скупу N_0 су **сабирање**, **одузимање**, **множење** и **дељење**.

Ево неколико примера операција у скупу N_0:

САБИРАЊЕ

$$\begin{array}{rl} 3\,205 & \leftarrow \text{сабирак} \\ +\ \ 226 & \leftarrow \text{сабирак} \\ \hline 3\,431 & \leftarrow \text{збир} \end{array}$$

ОДУЗИМАЊЕ

$$\begin{array}{rl} 7\,026 & \leftarrow \text{умањеник} \\ -\ 3\,538 & \leftarrow \text{умањилац} \\ \hline 3\,488 & \leftarrow \text{разлика} \end{array}$$

МНОЖЕЊЕ

чинилац ↘ ↙ чинилац

$$\begin{array}{r} 954 \cdot 26 \\ \hline 5724 \\ +\ 1908\ \ \\ \hline 24804 \end{array} \leftarrow \text{производ}$$

ДЕЉЕЊЕ

дељеник ↘ ↙ делилац

$$\begin{array}{l} 145 : 12 = 12 \leftarrow \text{количник} \\ \underline{-\ 12} \\ \ \ \ 25 \\ \underline{\ \ -24} \\ \ \ \ \ \ 1 \leftarrow \text{остатак} \end{array}$$

$$84 - 63 : 7 + 11 = 84 - 9 + 11 = 75 + 11 = 86$$

$$22 + 8 \cdot 4 = 22 + 32 = 54$$

Множење и дељење су **приоритетне операције** у односу на сабирање и одузимање.

Подсетимо се својстава ових операција.

Нека су m, n и p бројеви из скупа N_0. Тада важи:

Комутативност сабирања

$m + n = n + m$

$3 + 5 = 5 + 3$

Асоцијативност сабирања

$m + (n + p) = (m + n) + p$

$3 + (5 + 1) = (3 + 5) + 1$

Неутрални елемент за сабирање је 0

$m + 0 = 0 + m = m$

$5 + 0 = 0 + 5 = 5$

Комутативност множења

$m \cdot n = n \cdot m$

$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$

Асоцијативност множења

$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$

$3 \cdot (5 \cdot 1) = (3 \cdot 5) \cdot 1$

Множење нулом даје нулу

$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$

$5 \cdot 0 = 0 \cdot 5 = 0$

Неутрални елемент за множење је 1

$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$

$5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$

Дистрибутивност множења према сабирању

$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

$5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3$

Дељење нуле даје нулу

$0 : m = 0, m \neq 0$

А најважније, дељење нулом је неизводљиво, тј. нема резултата

$\cancel{m : 0}$

Збир и производ два природна броја је увек природан број

Разлика и количник два природна броја не морају увек бити природни бројеви

ПРИМЕР 2. Израчунај на што једноставнији начин:

а) Колико је новца потрошила Ана ако је платила жваке 32 динара, бомбоне 29 динара и чоколаду 268?

б) Колико је новца потрошио Лука када је купио 5 чоколадица по 27 динара и 5 сокова по 33 динара?

РЕШЕЊЕ

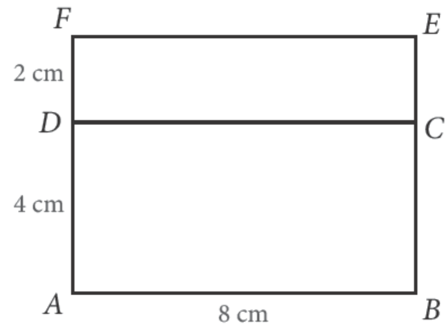
а) Применимо комутативни и асоцијативни закон за сабирање:

$32 + 29 + 268 = 32 + 268 + 29 = (32 + 268) + 29 = 300 + 29 = 329$

б) Применимо дистрибутивни закон:

$5 \cdot 27 + 5 \cdot 33 = 5 \cdot (27 + 33) = 5 \cdot 60 = 300$

ПРИМЕР 3. Странице правоугаоника $ABCD$ на слици имају дужине $AB = 8$ cm и $AD = 4$ cm.
Страница DF правоугаоника $DCEF$ има дужину 2 cm.
Израчунај површину правоугаоника $ABEF$.



РЕШЕЊЕ Површина правоугаоника $ABCD$ је $8 \cdot 4 = 32$ cm².

Површина правоугаоника $DCEF$ је $8 \cdot 2 = 16$ cm².

Површина правоугаоника $ABEF$ једнака је збиру површина правоугаоника $ABCD$ и $DCEF$:

$8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 32 + 16 = 48$ cm²

До тог резултата могли смо да дођемо и директно:
$AB \cdot AF = 8 \cdot (4 + 2) = 48$ cm².

Дакле, уверили смо се да важи:
$8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 8 \cdot (4 + 2)$

У скупу природних бројева решавају се и проблеми који се могу поставити у облику једначина:

непознати сабирак, познати сабирак, збир

$$x + 14 = 23$$

познати сабирак, непознати сабирак, збир

$$14 + x = 23$$

Сабирање је комутативна операција у скупу природних бројева.

$$x = 23 - 14$$
$$x = 9$$

Непознати сабирак израчунавамо тако што од збира одузмемо познати сабирак.

умањеник, умањилац, разлика

$$x - 13 = 5$$
$$x = 5 + 13$$
$$x = 18$$

Непознати умањеник израчунавамо тако што саберемо разлику и умањилац.

умањеник **умањилац** разлика

$$36 - x = 19$$
$$x = 36 - 19$$
$$x = 17$$

Непознати умањилац израчунавамо тако што од умањеника одузмемо разлику.

непознати чинилац, познати чинилац, производ

$$x \cdot 3 = 33$$

познати чинилац, непознати чинилац, производ

$$3 \cdot x = 33$$

Множење је комутативна операција у скупу природних бројева.

$$x = 33 : 3$$
$$x = 11$$

Непознати чинилац израчунавамо тако што производ поделимо познатим чиниоцем.

дељеник делилац количник

$$x : 7 = 12$$
$$x = 12 \cdot 7$$
$$x = 84$$

Непознати дељеник израчунавамо тако што помножимо количник и делилац.

дељеник **делилац** количник

$$38 : x = 19$$
$$x = 38 : 19$$
$$x = 2$$

Непознати делилац израчунавамо тако што дељеник поделимо количником.

ПРИМЕР 4. Марија ће кроз три године имати 15 година. Колико година Марија има сада? Колико година је Марија имала прошле године?

РЕШЕЊЕ m – број Маријиних година у овом тренутку

$m + 3 = 15$

$m = 15 - 3$

$m = 12$ Марија сада има 12 година.

$12 - 1 = 11$ Прошле године Марија је имала 11 година.

У скупу N_0 решавају се и проблеми који се могу поставити у облику неједначина:

САБИРАЊЕ

$x + 4 \leq 9$

$x \leq 9 - 4$

$x \leq 5$

0 1 2 3 4 5 6 7 x

ОДУЗИМАЊЕ

$x - 7 > 16$

$x > 16 + 7$

$x > 23$

22 23 24 25 26 27 28 29 x

$3 - x > 1$

$x < 3 - 1$

$x < 2$

0 1 2 3 4 x

Када је у неједначини непознат умањилац, приликом решавања знак неједнакости се мења.

МНОЖЕЊЕ

$5 \cdot x \leq 15$

$x \leq 15 : 5$

$x \leq 3$

0 1 2 3 4 5 6 7 x

ДЕЉЕЊЕ

$x : 4 \geq 6$

$x \geq 6 \cdot 4$

$x \geq 24$

22 23 24 25 26 27 28 29 x

$18 : x > 6$

$x < 18 : 6$

$x < 3$

0 1 2 3 4 x

(Нула не може бити решење, јер се нулом не дели!)

Када је у неједначини непознат делилац, приликом решавања знак неједнакости се мења.

ПРИМЕР 5. Млади ватерполиста Бојан био је стрелац у првој четвртини меча, а до краја утакмице постигао је још 4 гола. Ако је укупан број Бојанових погодака мањи од 9, колико је голова могао постићи у првој четвртини?

РЕШЕЊЕ n – број голова које је Бојан постигао у првој четвртини

$n + 4 < 9$

$n < 9 - 4$

$n < 5$

У првој четвртини Бојан је могао да постигне 1, 2, 3 или 4 гола.

ЗАДАЦИ

1. На слици је приказан број продатих кифли у једној пекари у току недеље.

дан у недељи →	понедељак	уторак	среда	четвртак	петак	субота
број продатих кифли →	73	91	82	69	108	54

а) Када је продато највише, а када најмање кифли?
б) Колико кифли мање је продато у суботу него у петак?
в) Колико пута мање кифли је продато у суботу него у петак?
г) Колико је укупно продато кифли у току те недеље?

2. Израчунај:

а) производ; б) разлику; в) количник;
најмањег троцифреног и најмањег двоцифреног броја.

3. Израчунај на што једноставнији начин:

а) $357 + 589 + 643$ б) $412 - 236 + 824$ в) $23 \cdot 7 - 13 \cdot 7$ г) $54 \cdot 17 + 46 \cdot 17$

4.* Нека су m и n природни бројеви. Који од следећих исказа су увек тачни?

а) $m + n$ је природан број б) $m - n$ је природан број
в) $m \cdot n$ је природан број г) $m : n$ је природан број

5. Никола је рођен 1993. године. Колико година је напунио последње године XX века, а колико прве године XXI века?

6. Ако је $a = 9$ и $b = 3$, израчунај вредност израза $(a + b) : (a - b)$.

7. За које природне бројеве n важи $8 < n \leq 11$?

8. Израчунај:

а) $(8 - 8) : 3$ б) $5 \cdot (6 + 4)$ в) $7 \cdot 2 + 6 \cdot 2$ г) $80 : (20 : 4)$

9. Колика је вредност израза?

а) $4 \cdot (5 + 10)$ б) $4 \cdot 5 + 10$ в) $4 + 5 \cdot 10$ г) $(4 + 5) \cdot 10$

10. Жељко је за месец октобар добио од родитеља џепарац у износу од 5 040 динара. Ако је сваког дана током месеца потрошио по 140 динара, колико му је на крају месеца преостало?

11. Хана је купила две исте оловке и шестар који је платила 170 динара и укупно је потрошила 350 динара. Колико је платила сваку оловку?

12. Од ког броја треба одузети 38 да би се добио број 56?

13. Који број треба поделити са 4 да би се добио број 59?

14. Којим бројем треба поделити број 126 да би се добио број 7?

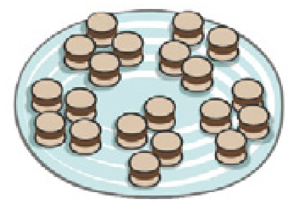
15.* Са колико треба поделити број 144 да би се добио број који није мањи од 24?

16. Реши: а) неједначину $3 \cdot x - 45 < 126$;
б) једначину $(x : 3 + 60) - 34 = 104$.

1.2. Дељење са остатком у скупу N_0 (једнакост $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < b$)

ПРИМЕР 1. У једној чинији се налази 20 колача. Треба их поделити на 5 ученика тако да свако добије једнак број колача. Како је 20 : 5 = 4, то ће сваки ученик добити по 4 колача.

Међутим, ако би 20 колача требало поделити на 6 ученика, видели бисмо да се 6 садржи 3 пута у 20, али постоји и остатак. Сваки од 6 ученика ће добити по 3 колача, а 2 ће преостати.



Када се дељење једног броја a другим бројем b реализује без остатка, кажемо да је број a дељив бројем b.

дељеник делилац количник

$48 : 16 = 3$

На пример, број 48 је дељив бројем 16, јер је $48 : 16 = 3$ или $48 = 16 \cdot 3$.

Међутим, број 17 није дељив са 7, јер је $17 = 7 \cdot 2 + 3$.

количник

$17 : 7 = 2$

$-\ 14$

3 ⟵ остатак

Количник при дељењу броја 17 са 7 једнак је 2, а остатак је 3.

У општем случају, када број a делимо бројем b добићемо једнакост:

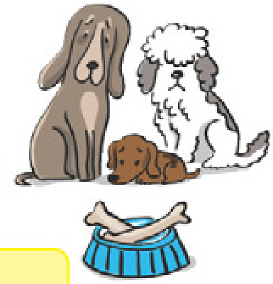
$$a = b \cdot q + r, \qquad 0 \le r < b$$

a – дељеник, b – делилац, q – количник, r – остатак.

Остатак је увек мањи од делиоца.

Ако је $r = 0$, каже се да је број a дељив бројем b .

Правило важи увек када је дељеник већи од делиоца, или једнак делиоцу, тј. када је $a \geq b$ у скупу природних бројева N. Међутим, у проширеном скупу природних бројева N_0 можемо делити и када је дељеник мањи од делиоца, тј. $a < b$, када количник при дељењу буде једнак нули а остатак једнак дељенику.



ПРИМЕР 2. У прихватилишту за псе чувари су покушали да нахране 3 пса са 2 коске, али тако да сваки од њих добије по једну и да ниједан не остане гладан. Међутим, покушај није успео јер су кости недељиве.
$2 : 3 = 0$, а остатак је и даље 2.

> Ако је дељеник мањи од делиоца, количник је једнак нули, а остатак дељенику.
> $\boldsymbol{a < b}$ **онда** $\boldsymbol{a : b = 0}$**, остатак је** $\boldsymbol{a}$**, тј.** $\boldsymbol{a = b \cdot 0 + a}$.

ПРИМЕР 3. Уочи остатке при дељењу бројева. Који број је дељив датим бројем без остатка?

а) $148 = 16 \cdot 9 + 4$ Остатак при дељењу је 4.

б) $222 = 11 \cdot 20 + 2$ Остатак при дељењу је 2.

в) $518 = 37 \cdot 14$ Остатак при дељењу је 0, па је број 518 дељив са 37.

ПРИМЕР 4. Који се остаци могу добити при дељењу природног броја n са 3?

РЕШЕЊЕ Како је остатак увек мањи од делиоца, остаци при дељењу са 3 могу да буду 0, 1 или 2.
На пример, $27 = 3 \cdot 9 + 0$, $208 = 3 \cdot 69 + 1$, $53 = 3 \cdot 17 + 2$.

$27 = 3 \cdot 9 + 0$
$208 = 3 \cdot 69 + 1$
$53 = 3 \cdot 17 + 2$
остатак ↑

> За операцију дељења не важе закони комутативности и асоцијативности.

ПРИМЕР 5. а) $\underbrace{32 : 8}_{4} \neq \underbrace{8 : 32}_{0}$, а остатак је 8.

Закључујемо да за операцију дељења не важи закон комутативности.

б) $\underbrace{\underbrace{(32 : 8)}_{4} : 4}_{1} \neq \underbrace{32 : \underbrace{(8 : 4)}_{2}}_{16}$

Закључујемо да за операцију дељења не важи закон асоцијативности.

> За операцију дељења важи **дистрибутивност дељења према сабирању**, ако су m и n бројеви из скупа N_0, p је број из скупа N, а m и n су дељиви са p:
> $$(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}) : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} : \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} : \boldsymbol{p}$$
> Ако су сабирци дељиви неким бројем, онда и њихов збир можемо да поделимо тим бројем, тако што ћемо сабрати количнике сабирака и тог броја.

ПРИМЕР 6. $\underbrace{84 : 12}_{7} + \underbrace{36 : 12}_{3} = \underbrace{(84 + 36)}_{120} : 12$, јер је

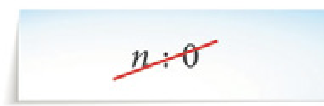
ПРИМЕР 7. Да ли се бројевни израз $(84 + 36) : 5$ може израчунати применом дистрибутивности дељења према сабирању?

РЕШЕЊЕ Бројевни израз $(84 + 36) : 5$ не можемо израчунати дељењем сваког сабирка бројем, јер сабирци нису дељиви са 5.

$84 : 5 = 16$, а остатак је 4
$36 : 5 = 7$, а остатак је 1

Зато бројевни израз израчунавамо дељењем збира бројем 5.
$(84 + 36) : 5 = 120 : 5 = 24$

За све природне бројеве n у скупу N_0 важи $0 : n = 0$.
Међутим, не може се делити нулом, тако да израз $n : 0$ нема смисла.



ЗАДАЦИ

17. Одреди количник и остатак при дељењу:
а) 249 са 27; б) 1 412 са 113; в) 4 025 са 691.

18. Који од бројева 138, 203, 611, 805, 2 300 су дељиви са 23?

19. Дати су бројеви a и b. Одреди количник q и остатак r при дељењу a са b и напиши одговарајућу једнакост у облику $a = b \cdot q + r$ за следеће парове бројева:
а) $a = 270,\ b = 87$; б) $a = 343,\ b = 46$;
в) $a = 315,\ b = 21$; г) $a = 28,\ b = 13$.

20. Који остаци се могу добити при дељењу неког броја са 5?

21. Одреди три броја који при дељењу са 12 дају остатак 7.

22. Одреди количник q и остатак r при дељењу броја 7 са 11.

23. Израчунај на што једноставнији начин: $1\,125 : 5 - 125 : 5$.

24. Колики остатак се добије при дељењу броја 529 са 9?

25. Да ли је број 323 дељив са 17 и са 19?

26. Одреди остатак при дељењу са 10 броја:
а) 243; б) 3 057; в) 10 246.

27.* Одреди број који при дељењу:
а) са 25 даје количник 8 и остатак 17;
б) са 76 даје количник 4 и остатак 39.

1.3. Својства дељивости. Чиниоци и садржаоци природног броја

Нека су a и q бројеви из проширеног скупа природних бројева N_0, а b је природан број.
Већ смо видели да ако важи $a = b \cdot q$, кажемо да је број a дељив бројем b.
Тада се каже и да је број b делилац броја a, а да је број a садржалац броја b.
Да је b делилац броја a пишемо $b|a$ и читамо: „Број b дели број a."

ПРИМЕР 1. Како је $28 = 4 \cdot 7$, то је број 28 садржалац броја 4, а број 4 је делилац броја 28.
Дакле, $4|28$.

Често уместо појма делилац (број који дели неки број), користимо појам чинилац (број који чини – сачињава неки број).

> Сваки природан број n има бар два чиниоца, јер важи $1|n$ и $n|n$.

> Сваки природан број дељив је јединицом и самим собом.

Неки број може имати и више чинилаца. На пример, из $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ закључујемо да су бројеви 3, 5 и 7 чиниоци броја 105.

То записујемо: $3|105$, $5|105$, $7|105$.

Иначе, број 105 има укупно 8 чинилаца. То су: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 и 105.

> Сваки природан број има коначно много чинилаца, а бесконачно много садржалаца.

На пример, следећи бројеви су садржаоци броја 7: 7, 14, 21, 28, 35...

Ако је реч садржаоци множина од речи садржалац, напиши множину од речи:

чинилац

____

делилац

____

ПРИМЕР 2. Одреди:

а) пет најмањих садржалаца броја 23;

б) два највећа чиниоца броја 36.

РЕШЕЊЕ

а) То су бројеви: 23, 46, 69, 92 и 115.

б) Делиоци броја 36 су: $1|36$, $2|36$, $3|36$, $4|36$, $9|36$, $12|36$, $18|36$, $36|36$.
Највећи чиниоци су бројеви 18 и 36: $18 \cdot 2 = 36$, $36 \cdot 1 = 36$.

ПРИМЕР 3. Број 112 можемо записати у облику:

$112 = 100 + 12 = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot (25 + 3) = 4 \cdot 28$

Сабирци 100 и 12 су дељиви са 4, па је и њихов збир 112 дељив са 4.

Ако је сваки од сабирака дељив неким бројем, онда је и њихов збир дељив тим бројем.

ПРИМЕР 4. Број 33 је дељив са 3, а број 23 није дељив са 3, па ни њихов збир 56 није дељив са 3.

$$\begin{array}{ccccc} 33 & + & 23 & = & 56 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 3\mid 33 & & 3\nmid 23 & & 3\nmid 56 \end{array}$$

Ако је један сабирак дељив бројем n, а други сабирак није дељив са n, тада збир није дељив бројем n.

ПРИМЕР 5. Иако је збир бројева 7 и 5, број 12, дељив са 3, бројеви 7 и 5 нису дељиви са 3.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & = & 7 & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3\mid 12 & & 3\nmid 7 & & 3\nmid 5 \end{array}$$

$12 = 7 + 5$, па иако $3\nmid 7$ и $3\nmid 5$, ипак $3 \mid 12$.

$12 = 6 + \mathbf{1} + 3 + \mathbf{2} = 9 + \mathbf{3}$

Иако је збир два или више природних бројева дељив неким бројем, његови сабирци не морају бити дељиви тим бројем.

ПРИМЕР 6. а) Бројеви 26, 39, 52 су дељиви са 13, па је и њихов збир 117 дељив са 13.

$26 = 2 \cdot 13, \quad 39 = 3 \cdot 13, \quad 52 = 4 \cdot 13$

$26 + 39 + 52 = 2 \cdot 13 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 13 = 13 \cdot (2 + 3 + 4) = 13 \cdot 9 = 117$

б) Збир $198 = 33 + 42 + 66 + 57$ је дељив са 11, али сабирци 42 и 57 то нису.

$$\begin{array}{ccc} 198 = 33 + & 42 + 66 + & 57 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 11\mid 198 & 11\nmid 42 & 11\nmid 57 \end{array}$$

ПРИМЕР 7. а) Бројеви 333 и 54 су дељиви са 9, па је и њихова разлика 279 дељива са 9.

$333 - 54 = 9 \cdot 37 - 9 \cdot 6 = 9 \cdot (37 - 6) = 9 \cdot 31 = 279$

б) Слично, бројеви 68, 24, 76 и 38 су парни (дељиви са 2), па следи и да је резултат израза $68 - 24 + 76 - 38$ паран број.

$68 - 24 + 76 - 38 = 2 \cdot 34 - 2 \cdot 12 + 2 \cdot 38 - 2 \cdot 19 = 2 \cdot (34 - 12 + 38 - 19) = 82$

Ако су природни бројеви a и b $(a \geq b)$ дељиви неким природним бројем n, онда је и њихова разлика $a - b$ дељива бројем n.

ПРИМЕР 8. Број 46 је дељив са 23, па је и производ $46 \cdot 17 = 782$ дељив са 23.

За производ природних бројева a и b важи тврђење:
Ако је бар један од чинилаца у производу природних бројева a и b дељив неким природним бројем n, онда је и производ $a \cdot b$ дељив са n.

ПРИМЕР 9. Број 22 је дељив са 11, па је и израз $22 \cdot 13 - 11 + 11 \cdot 7$ дељив са 11.
$22 \cdot 13 - 11 + 11 \cdot 7 = 2 \cdot 11 \cdot 13 - 11 \cdot 1 + 11 \cdot 7 = 11 \cdot (2 \cdot 13 - 1 + 7) =$
$11 \cdot (26 - 1 + 7) = 11 \cdot 32 = 352$

ПРИМЕР 10. Израз $13m + 13n + 13p$ је дељив са 13, јер је сваки од сабирака дељив са 13.
Сваки сабирак је производ броја 13 и неког природног броја. Израз би се могао записати и као производ два броја: $13m + 13n + 13p = 13(m+n+p)$.
Видимо да је дељив са 13, јер је један његов чинилац и сам број 13.

ПРИМЕР 11. За израз $2x + 8y = 999$ не могу се наћи природни бројеви x и y да једнакост буде тачна.
$2x$ је паран број, као и $8y$, па је и њихов збир паран број, док је број 999 непаран.

Реши **тест број 10** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

28. Који од бројева 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 су делиоци броја 72?

29. Колико делилаца има број 0?

30. Да ли је број $a = 34 \cdot 31$ садржалац броја 17?

31. Одреди све чиниоце броја 54.

32. Колико чинилаца има број 12?

33. Одреди:
а) три најмања садржаоца броја 17; б) два највећа чиниоца броја 48.

34. Да ли је број $52 \cdot 15$ садржалац броја 20?

35. Да ли је број 16 делилац броја 184?

36.* Дата је једнакост $a+b+c=d$. Ако су бројеви a, c и d дељиви природним бројем n, доказати да је и број b дељив бројем n.

37.* Површина једног правоугаоника износи $18\,\text{cm}^2$, а дужине његових страница су природни бројеви. Одреди све правоугаонике који испуњавају ове услове.

1.4. Дељивост са 2, 5 и декадним јединицама

Број 50 712 се може помоћу декадних јединица представити у облику:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 50712 & = & 5\cdot 10000 & + & 0\cdot 1000 & + & 7\cdot 100 & + & 1\cdot 10 & + & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2\,|\,50712 & & 2\,|\,10000 & & 2\,|\,1000 & & 2\,|\,100 & & 2\,|\,10 & & 2\,|\,2 \end{array}$$

Све декадне јединице и последња цифра дељиве су са 2, па је број 50 712 дељив са 2. Непосредно се види да су са 2 дељиви и бројеви 50 710, 50 714, 50 716 и 51 718.

Са 2 нису дељиви, тј. непарни су бројеви: 50 711, 50 713, 50 715, 50 717 и 50 719. Дакле, парност броја (дељивост са 2) зависи само од последње цифре неког броја.

Природан број је **дељив са 2** ако је паран, тј. ако је његова цифра јединица 0, 2, 4, 6 или 8.

ПРИМЕР 1.

а) Збир 18 + 90 + 106 – 32 дељив је са 2, јер се сви бројеви 18, 90, 106 и 32 завршавају парном цифром, па су дељиви са 2.

б) Паран је и производ 18 · 17 · 3, јер је први чинилац 18 дељив са 2.

ПРИМЕР 2. Доказати да је збир два парна броја паран број.

РЕШЕЊЕ Нека су m и n парни бројеви, тј. бројеви дељиви са 2.
Тада је $m = 2 \cdot k$ и $n = 2 \cdot p$, где су k и p природни бројеви, па је
$m + n = 2 \cdot k + 2 \cdot p = 2 \cdot (k + p)$ број дељив са 2.

На сличан начин као правило дељивости са 2 изводи се и правило дељивости природног броја са 5. Пошто су све декадне јединице (10, 100, 1 000...) дељиве са 5, онда је дељив са 5 и сваки број чија је цифра јединица 0.

Број 5 670 је дељив са 5, јер је његова цифра јединица 0.

$$\begin{array}{ccccccccc} 5670 & = & 5\cdot 1000 & + & 6\cdot 100 & + & 7\cdot 10 & + & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\,|\,5670 & & 5\,|\,1000 & & 5\,|\,100 & & 5\,|\,10 & & 5\,|\,0 \end{array}$$

Број 3 765 је дељив са 5, јер је његова последња цифра дељива са 5.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3765 & = & 3\cdot 1000 & + & 7\cdot 100 & + & 6\cdot 10 & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\,|\,3765 & & 5\,|\,1000 & & 5\,|\,100 & & 5\,|\,10 & & 5\,|\,5 \end{array}$$

Број 437 није дељив са 5, јер његова последња цифра није дељива са 5.

$$\begin{array}{ccccccc} 437 & = & 4\cdot 100 & + & 3\cdot 10 & + & 7 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\nmid 437 & & 5\,|\,100 & & 5\,|\,10 & & 5\nmid 7 \end{array}$$

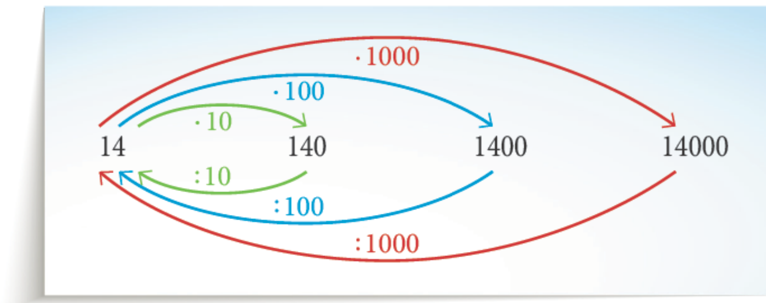
Природан број је **дељив бројем 5** ако је његова цифра јединица 0 или 5.

ПРИМЕР 3. Који од бројева 175, 1 098, 2 000, 31 005, 5 050 503 су дељиви са 5?

РЕШЕЊЕ $5 \mid 175$, $5 \mid 2\,000$, $5 \mid 31\,005$, $5 \nmid 1\,098$, $5 \nmid 5\,050\,503$

Ако користимо правило да ако су сви сабирци неког збира дељиви једним природним бројем, онда је и збир дељив тим бројем, једноставно закључујемо да важи следеће тврђење:

> Број је дељив са 10 ако се завршава бар једном нулом.
>
> Број је дељив са 100 ако се завршава бар двема нулама.
>
> Број је дељив са 1 000 ако се завршава бар трима нулама, итд.



> Природан број је дељив неком декадном јединицом, ако се завршава са истим или већим бројем нула него што та декадна јединица има нула.

ПРИМЕР 4. а) Број 1 680 је дељив са 10, јер су декадне јединице дељиве са 10.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\,680 & = & 1\cdot 1\,000 & + & 6\cdot 100 & + & 8\cdot 10 & + & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 10 \mid 1\,680 & & 10 \mid 1\,000 & & 10 \mid 100 & & 10 \mid 10 & & 10 \mid 0 \end{array}$$

Сви сабирци у збиру су дељиви са 10, па самим тим важи $10 \mid 1\,680$.

И иначе, број је дељив са 10, јер се његов запис завршава једном нулом, што је показано на примеру правила збира.

б) Број 1 688 није дељив са 10, јер последњи сабирак није дељив са 10.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\,688 & = & 1\cdot 1\,000 & + & 6\cdot 100 & + & 8\cdot 10 & + & 8 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 10 \nmid 1\,688 & & 10 \mid 1\,000 & & 10 \mid 100 & & 10 \mid 10 & & 10 \nmid 8 \end{array}$$

ПРИМЕР 5.

n	Дељив са 10
70	$10 \mid 70$
400	$10 \mid 400$
560	$10 \mid 560$
2 350	$10 \mid 2\,350$

n	Дељив са 100
400	$100 \mid 400$
3 200	$100 \mid 3\,200$
123 000	$100 \mid 123\,000$
1 800	$100 \mid 1\,800$

n	Дељив са 1 000
5 000	$1\,000 \mid 5\,000$
70 000	$1\,000 \mid 70\,000$
235 000	$1000 \mid 235\,000$
4 840 000	$1\,000 \mid 4\,840\,000$

ПРИМЕР 6. Међу бројевима 56, 873, 1 008, 4 901, 61 са 2 су дељиви 56 и 1 008, јер се завршавају цифром 6 односно 8.

Бројеви 873, 4 901 и 61 нису дељиви са 2, јер су им последње цифре редом: 3, 1 и 1.

ПРИМЕР 7. Који су од понуђених бројева 340, 9 095, 265, 786 дељиви са 5?

РЕШЕЊЕ Сви сем броја 786, јер је његова последња цифра 6. Бројеви 340, 265 и 9 095 завршавају се цифрама 0, односно 5.

Реши **тест број 11** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

38. Који од наведених бројева су дељиви са 100?

а) 2 100 б) 3 010 в) 5 005 г) 52 000

39. Да ли су бројеви $7827 \cdot 2$ и $398 \cdot 233$ дељиви са 2?

40. Напиши све двоцифрене бројеве од цифара 0, 1 и 2 који су дељиви са:

а) 2; б) 10.

41. Са којим од бројева 2, 5, 10 су дељиви бројеви:

а) 72; б) 855; в) 305; г) 1 200?

42. Напиши све троцифрене бројеве дељиве са 5 коришћењем цифара 3, 4 и 5.

43. Уместо * упиши цифру тако да је број 98 76* дељив са:

а) 2; б) 5; в) 10.

44.* Докажи да су збир и разлика два броја дељива са 5 такође дељиви са 5.

45. Који од понуђених бројева су дељиви и са 2 и са 5?

а) 24 325; б) 2 700; в) 81 652; г) 29 940.

46. Број n је дељив са 2, а број m је дељив са 5.

а) Да ли је број $m \cdot n$ увек дељив са 10?

а) Да ли је број $m + n$ увек дељив са 10?

47. Одреди највећи троцифрен број чије су све цифре различите, а дељив је са:

а) 2; б) 5; в) 10.

1.5. Дељивост са 4 и 25

Представимо неки број, на пример, 7 632 у облику збира производа његових цифара и декадних јединица:

$$7632 = 7 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + \underbrace{3 \cdot 10 + 2}$$

$$4\,|\,1\,000 \qquad 4\,|\,100 \qquad 4\,|\,32$$

Како су бројеви 1 000 и 100 дељиви са 4, то дељивост броја 7 632 са 4 зависи од последња два сабирка, $3 \cdot 10$ и 2, чији збир износи 32. Пошто $4|32$ можемо да закључимо да $4\,|\,7\,632$.

Природан број је **дељив са 4**, ако је његов двоцифрени завршетак дељив са 4.

ПРИМЕР 1. Који од бројева су дељиви са 4, а који нису: 3 132, 10 548, 3 982, 168, 578?

РЕШЕЊЕ Дељиви са 4 су: 3 132, 10 548 и 168. Нису дељиви са 4 : 3 982 и 578.

3 132	10 548	168	3 982	578
↓	↓	↓	↓	↓
$4\,\|\,32$	$4\,\|\,48$	$4\,\|\,68$	$4 \nmid 82$	$4 \nmid 78$

На сличан начин као за претходна правила дељивости долазимо и до правила дељивости са 25. На пример, посматрајмо сабирке броја 4 375. Сви сабирци су дељиви са 25 укључујући и 75, па је и број 4 375 дељив са 25.

$$4\,375 = 4 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 75$$

$$25|4\,375 \qquad 25|1\,000 \qquad 25|100 \qquad 25|75$$

Природан број је **дељив са 25**, ако је његов двоцифрени завршетак дељив са 25, или ако на месту десетица и јединица има неки од парова цифара: 00, 25, 50, 75.

ПРИМЕР 2. Бројеви дељиви са 25 су: 3 025, 750, 10 075 и 4 300.

3 025	750	10 075	4 300
↓	↓	↓	↓
$25\|3\,025$	$25\|750$	$25\|10\,075$	$25\|4\,300$

Нису дељиви са 25 бројеви: 4 055, 710 и 520.

4 055	710	520
↓	↓	↓
$25 \nmid 4\,055$	$25 \nmid 710$	$25 \nmid 520$

ПРИМЕР 3. Међу бројевима 118, 905, 476, 344, 932, 1 024 са 4 су дељиви бројеви 476, 344, 932 и 1 024 јер су им двоцифрени завршеци 76, 44, 32 и 24 дељиви са 4. Бројеви 118 и 905 нису дељиви са 4.

ПРИМЕР 4. Који двоцифрени завршетак треба да има број да би истовремено био дељив и са 4 и са 25?

РЕШЕЊЕ Ако посматрамо бројеве 350, 400, 275, 825 само је број 400 дељив и са 4 и са 25. Дакле, потребно је да број има двоцифрени завршетак 00 да би истовремено био дељив и са 4 и са 25.

Реши задатке 1, 2, 3, 5 и 6 у **тесту број 13** на електронској платформи **еЗбирка**:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

48. Број *n* је дељив са 4 и са 5. Која је његова последња цифра?

49. Да ли се дуж дужине 538 cm може поделити на четири једнаке дужи чија је дужина у центиметрима природан број?

50. Који од понуђених бројева су дељиви са 25?

а) 425; б) 730; в) 975; г) 1 000; д) 880.

51. Број *n* је дељив и са 4 и са 25. Које су две последње цифре броја *n*?

52. Да ли је збир бројева 576 + 1 026 дељив са 4?

53. Да ли је разлика бројева 950 и 335 дељива са 5?

54. Помоћу цифара 2, 4 и 8 напиши све троцифрене бројеве веће од 300, а мање од 500 који су дељиви са 4.

55.* Дужина странице квадрата изражена у центиметрима је природан број. Да ли обим тог квадрата може да буде: а) 121 cm; б) 144 cm; в) 196 cm; г) 198 cm?

56. Четири брата су добила на поклон 138 сличица фудбалера. Да ли могу све сличице да поделе, а да свако добије исти број сличица?

57. Коју цифру треба уписати уместо * тако да број 52 37* буде дељив са 25?

1.6. Дељивост са 3 и 9

При извођењу правила дељивости са 3 и са 9 искористићемо чињеницу да је свака декадна јединица за 1 већа од броја чије су све цифре деветке:

$$10 = 9 + 1, \quad 100 = 99 + 1, \quad 1\,000 = 999 + 1, \quad 10\,000 = 9\,999 + 1, \quad \text{итд.}$$

Бројеви 9, 99, 999, 9 999... су дељиви са 9 и са 3.

Посматрајмо, на пример, број 7 626 који се може написати у облику:

$$\begin{aligned} 7\,626 &= 7 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \\ &= 7 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 6 \\ &= \underset{3|999}{\underbrace{7 \cdot 999}} + \underset{3|99}{\underbrace{6 \cdot 99}} + \underset{3|9}{\underbrace{2 \cdot 9}} + \underset{3|21}{\underbrace{7 + 6 + 2 + 6}} \end{aligned}$$

Како су прва три сабирка у последњем збиру дељиви са 3, то је број 7 626 дељив са 3 ако је збир његових цифара 7 + 6 + 2 + 6 дељив са 3.

Међутим, овај број није дељив са 9, јер је израз $7 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 2 \cdot 9$ дељив са 9, али збир цифара броја 7 626, који је једнак 21, није дељив са 9.

Ако је збир цифара броја n **дељив са 3**, онда је и број n дељив са 3.
Ако је збир цифара броја n **дељив са 9**, онда је и број n дељив и са 3 и са 9.

ПРИМЕР 1. Да ли су бројеви 591, 20 304, 1 234 дељиви са 3 и са 9?

РЕШЕЊЕ Збир цифара броја 591 је $5 + 9 + 1 = 15$.
Пошто $3 \mid 15$, онда $3 \mid 591$. Пошто $9 \nmid 15$, онда $9 \nmid 591$.

Збир цифара броја 20 304 је $2 + 0 + 3 + 0 + 4 = 9$.
Пошто $3 \mid 9$ и $9 \mid 9$, онда $3 \mid 20\,304$ и $9 \mid 20\,304$.

Збир цифара броја 1 234 је $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
Пошто $3 \nmid 10$, онда $3 \nmid 1\,234$. Пошто $9 \nmid 10$, онда $9 \nmid 1\,234$.

ПРИМЕР 2. Одреди све бројеве n за које важи $780 < n < 800$ и који су дељиви са 9.

РЕШЕЊЕ Тражени бројеви су 783 и 792. Оба имају збир цифара 18 и због тога су дељиви са 9. Са 9 је дељив сваки девети број: 0, 9, 18, 27, 36, ... , 774, 783, 792, 801, ... Између 780 и 800 нема других бројева дељивих са 9, осим 783 и 792.

ПРИМЕР 3. Одреди најмањи природан број у чијем се запису користи само цифра 1 и који је дељив са: а) 3; б) 9.

РЕШЕЊЕ Искористићемо правила дељивости са 3 и са 9. Најмањи бројеви траженог облика су: а) 111; б) 111 111 111.

ПРИМЕР 4. Коју цифру треба ставити уместо * да би број 710 8*9 био дељив са 9?

РЕШЕЊЕ Збир цифара овог шестоцифреног броја је $7 + 1 + 0 + 8 + 9 + * = 25 + *$. Број ће бити дељив са 9 само ако $9 \mid (25 + *)$, односно како $9 \mid 27$, када је $* = 2$.

Реши **тест број 12** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

58. Који од бројева: 123, 124, 125, 126, 127, 128 су дељиви са 3?

59. Да ли је могуће све бомбоне из кутије поделити на 9 ученика тако да сви добију подједнак број бомбона, ако у кутији има: а) 126 бомбона; б) 127 бомбона?

60. Којом цифром треба заменити цифру * у петоцифреном броју 76 84* да би он био дељив и са 3 и са 5?

61. Напиши по два троцифрена и четвороцифрена броја дељива са 9.

62. Који је најмањи, а који највећи троцифрен број дељив са 9, а да су му све цифре различите?

63. Коју цифру треба написати уместо * па да број 41*71 буде дељив са 9?

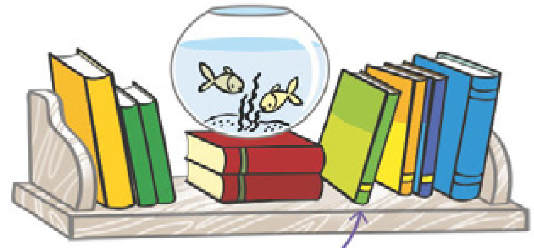
64. Који је највећи, а који најмањи четвороцифрени број дељив са 3?

65. Ако је број дељив са 9, дељив је и са 3. Објасни због чега.

66. Који од наведених бројева је дељив и са 9 и са 5:
а) 1 325; б) 8 172; в) 5 400; г) 5 815?

67. Који је највећи петоцифрен број дељив и са 2 и са 3?

1.7. Скупови



Скуп и његови елементи

Веома често се у математици, али и у свакодневном животу користи појам **скуп**. Најчешће уочимо неко заједничко својство одређених објеката и по том својству их групишемо. На пример, кажемо скуп ученика једног одељења, скуп природних бројева, скуп гледалаца једне фудбалске утакмице, скуп предмета у школској торби, скуп књига на полици, итд.

У првом примеру сваки од ученика једног одељења је **елемент (члан) скупа** ученика. Такође, каже се да је сваки природан број елемент скупа природних бројева N.

Да елемент **припада скупу** обележава се симболом **∈**.
Да елемент **није члан скупа** означава се симболом **∉**.

$3 \in A$
3 **припада** скупу A

$8 \notin A$
8 **не припада** скупу A

На пример, ако желимо да кажемо да је број 5 природан број, тј. да је елемент скупа N, пишемо $5 \in N$ и читамо: „5 је елемент скупа N" или „5 припада скупу N".

Скупови се обележавају **великим латиничним словима**. За набрајање елемената скупа користе се витичасте заграде **{ }**. Елементи се одвајају запетама.

Тако, на пример, ако желимо да запишемо скуп свих природних бројева мањих од 8, то ћемо учинити на следећи начин: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Скуп свих једноцифрених непарних бројева је $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Скуп свих ћириличних и латиничних слова која означавају исти глас и истог су облика је C = {A, E, J, K, M, O, T}.

Поједини скупови, као на пример скупови N и N_0 су **бесконачни**.

Када скуп има бесконачно много елемената, наводи се првих неколико, а затим три тачке.

$N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
бесконачно елемената

Празан скуп нема елемената и означава се симболом Ø или **{ }**.

Празан је, на пример, скуп свих људи високих 4 метра или скуп свих квадрата који имају пет страница.

ПРИМЕР 1. Попуни таблицу као што је започето:

	1	0	5	$\frac{1}{2}$
N	$1 \in N$	$0 \notin N$	$5 \in N$	$\frac{1}{2} \notin N$
N_0				
$\{1, 2, 3\}$				

РЕШЕЊЕ

	1	0	5	$\frac{1}{2}$
N	$1 \in N$	$0 \notin N$	$5 \in N$	$\frac{1}{2} \notin N$
N_0	$1 \in N_0$	$0 \in N_0$	$5 \in N_0$	$\frac{1}{2} \notin N_0$
$\{1, 2, 3\}$	$1 \in \{1,2,3\}$	$0 \notin \{1,2,3\}$	$5 \notin \{1,2,3\}$	$\frac{1}{2} \notin \{1,2,3\}$

За два скупа A и B каже се да су **једнаки**, ако имају исте елементе, тј. ако је сваки елемент скупа A истовремено и елемент скупа B и обрнуто. То се записује $A = B$.

ПРИМЕР 2. а) Ако је $A = \{1, 2, 3\}$, а B скуп природних бројева мањих од 4, тада је $A = B$.

б) Ако је $A = \{2, 7, 9\}$, а $B = \{7, 9, 2\}$, тада је $A = B$. ← Редослед навођења елемената у скупу није важан.

в) Скупови N и N_0 нису једнаки јер, $0 \notin N$, а $0 \in N_0$.

г) Скуп $A = \{1, 5, 7\}$, а скуп $B = \{1, 1, 5, 7, 7, 7\}$, тада је $A = B$.

Иако је набројан више пута, ради се о једном елементу.

Понекад скупове не записујемо набрајањем њихових елемената, него истицањем њиховог заједничког својства. Тако, на пример,

$\{n \mid n \in N, 3 \leq n < 9\}$ означава скуп свих бројева n који су већи или једнаки 3, а мањи од 9, па је $\{n \mid n \in N, 3 \leq n < 9\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

| – знак који се чита „таквих да је...”

На пример, $A = \{n \mid n \in N, 2 \leq n < 6\}$ је скуп природних бројева „таквих да је” сваки од њих већи или једнак од 2, а мањи од 6.

ПРИМЕР 3. Скуп $\{n \mid n \in N_0, n + 2 \leq 4\} = \{0, 1, 2\}$, јер је $0 + 2 = 2 \leq 4$, $1 + 2 = 3 \leq 4$, $2 + 2 = 4 \leq 4$.

Подскуп

Ако су сви елементи скупа B истовремено и елементи скупа A, тада се каже да је скуп B **подскуп скупа** A и пише се $\boldsymbol{B \subset A}$.

На пример, $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ако је скуп $A = \{1, 1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 4\}$, онда видимо да је скуп $A \subset B$ и скуп $B \subset A$. Тада кажемо да су скупови једнаки $A = B$.

Због тога је и **сваки скуп подскуп сам себи**:

$A = \{24, 56\}$ онда је $\{24, 56\} \subset \{24, 56\}$, па пишемо $A \subset A$.

Празан скуп је подскуп сваког непразног скупа A: $\boldsymbol{\emptyset \subset A}$.
Празан скуп је сам себи подскуп: $\boldsymbol{\emptyset \subset \emptyset}$.

Постоји и скуп свих скупова који називамо **универзални скуп** $\boldsymbol{U}$. Сваки скуп, па и празан, је његов подскуп: $\emptyset \subset A \subset U$.

Број елемената неког скупа A означава се са $\boldsymbol{k(A)}$.

$A = \{3, 5, a, 7, c\}$

$k(A) = 5$ ← A има 5 елемената

ПРИМЕР 4. Набројати све подскупове скупа $B = \{3, 6, 7\}$.

РЕШЕЊЕ $\emptyset$

Једночлани подскупови су: $\{3\}, \{6\}, \{7\}$ и има их три.

Двочлани подскупови су: $\{3, 6\}, \{3, 7\}, \{6, 7\}$ и има их такође три.

Трочлани подскуп је сам скуп $B = \{3, 6, 7\}$.

Скуп B има 3 елемента тј. $k(B) = 3$ али има 8 подскупова – празан, три једночлана, три двочлана и један трочлани, односно сам тај скуп.

ПРИМЕР 5. Одредити скуп K слова која се користе у речи МАМА и скуп L слова у речи МАЈА. Да ли важи $K = L$, $K \subset L$ или $L \subset K$?

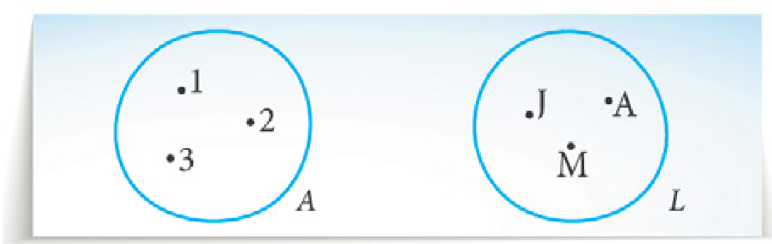
РЕШЕЊЕ Видимо да је $K = \{М, А\}$, а $L = \{М, А, Ј\}$, па је $K \subset L$.

Приметимо, да смо при записивању елемената скупа K слова М и А записали само по једном. Наиме, у скупу се сваки члан наводи тачно по једанпут, па је $\{М, А\} = \{М, А, М , А\}$.

Венови дијаграми

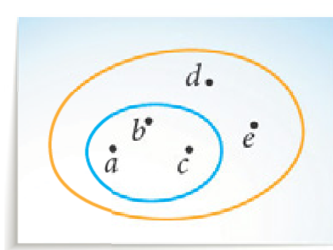
Да би рад са скуповима био једноставнији, често се користе такозвани **Венови дијаграми**, названи по познатом енглеском математичару Вену.
На пример, скупове $A = \{1, 2, 3\}$ и $L = \{М, А, Ј\}$ приказали смо Веновим дијаграмима.

Џон Вен (1834–1923) је био енглески математичар и филозоф. Познат је по дијаграмима, који се користе у многим областима, укључујући и рачунарство.

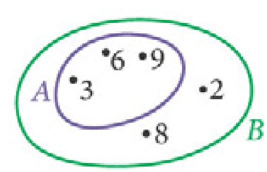


На Веновим дијаграмима прегледно се види да је неки скуп подскуп неког другог скупа.

На пример $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d, e\}$.



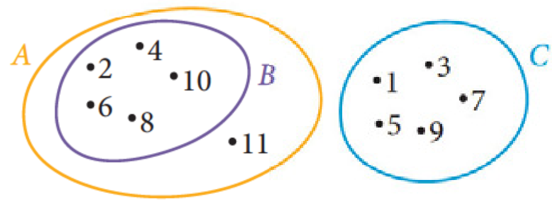
ПРИМЕР 6. Да ли је скуп A, скуп једноцифрених природних бројева дељивих са 3, подскуп скупа $B = \{2, 3, 6, 8, 9\}$?



РЕШЕЊЕ Како је $A = \{3, 6, 9\}$, то је $A \subset B$.

ПРИМЕР 7. Нацртај Венов дијаграм за следеће скупове:
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 11\}$, $B = \{n \mid n \in N, n$ је паран број прве десетице$\}$,
$C = \{n \mid n \in N, n$ је непаран број прве десетице$\}$

РЕШЕЊЕ Скупови B и C су: $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.



Са слике видимо да је скуп $B \subset A$, али да оба скупа и A и B немају ниједан заједнички елемент са скупом C.

Реши задатке 1, 2, 3, 5 и 6 у **тесту број 1** на електронској платформи **еЗбирка**:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

68. Напиши скупове набрајањем њихових елемената:
а) скуп свих природних бројева дељивих са 5 који су већи од 8, а мањи од 23;
б) скуп самогласника нашег језика;
в) скуп свих декадних јединица мањих од милион.

69. Колико елемената има скуп дана у недељи?

70. Колико елемената има скуп ученика твог одељења?

71. Нека је A скуп свих бројева мањих од 20, а $B = \{n \mid n \in N, 13 \leq n \leq 17\}$. Да ли је $A = B$, $A \subset B$ или $B \subset A$?

72. Попуни празна места симболом $\in$ или $\notin$ тако да се добију тачни искази:
а) a ____ $\{a, b, c\}$; б) 1 ____ $\{2, 3, 4, 5\}$;
в) С ____ {Л, А, С, Т, Е}; г) М ____ {Л, А, С, Т, Е};
д) 5 ____ $\{n \mid n \in N, n \geq 3\}$.

73. Да ли су скупови {Т, А, Т, А} и {А, Т} једнаки?

74. Да ли је скуп свих зрна песка на једној плажи коначан или бесконачан?

75. Из скупа {5 228, 3 045, 29, 531, 7 405} издвој бројеве дељиве са:
а) 2; б) 3; в) 5; г) 9.

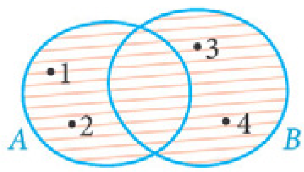
76. Који скуп $A = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$ или $B = \{1, 2, 3\}$ има више елемената?

77. Колико елемената има скуп дана у месецу фебруару преступне године?

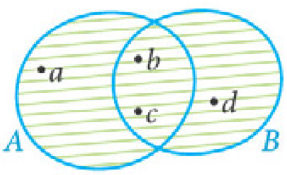
1.8. Скуповне операције: унија, пресек и разлика

Ако од скупова A и B формирамо нови скуп C, који садржи све елемента скупова A и B, тада се скуп C назива **унија скупова** A и B, што се записује $C = A \cup B$.

ПРИМЕР 1.



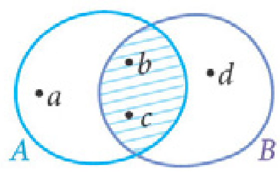
$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$



$\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

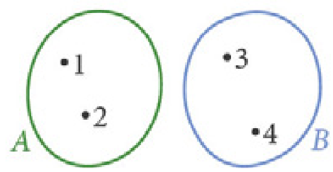
Пресек скупова A и B је скуп C који садржи све оне елементе који припадају и скупу A и скупу B. То се записује $C = A \cap B$.

ПРИМЕР 2.



$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$

Елементи b и c припадају и скупу A и скупу B.



$\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing$

Не постоји елемент који припада и скупу A и скупу B, па кажемо да је њихов пресек празан скуп.

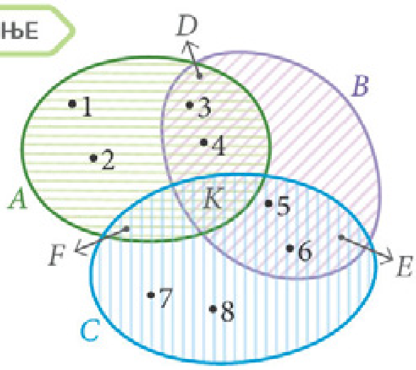
Скупови чији је пресек празан скуп зову се **дисјунктни скупови**.

» **Дисјунктан** је реч латинског порекла и значи **раздвојен**.

ПРИМЕР 3. Дати су скупови $A = \{n \mid 1 \leq n \leq 4\}$, $B = \{n \mid 3 \leq n \leq 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$.

Формирај скупове: $D = A \cap B$, $E = B \cap C$, $F = A \cap C$, $G = A \cup B$, $H = B \cup C$, $I = A \cup C$, $J = A \cup B \cup C$, $K = A \cap B \cap C$.

РЕШЕЊЕ



$D = \{3, 4\}$,
$E = \{5, 6\}$,
$F = \varnothing$,
$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$H = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$K = \varnothing$.

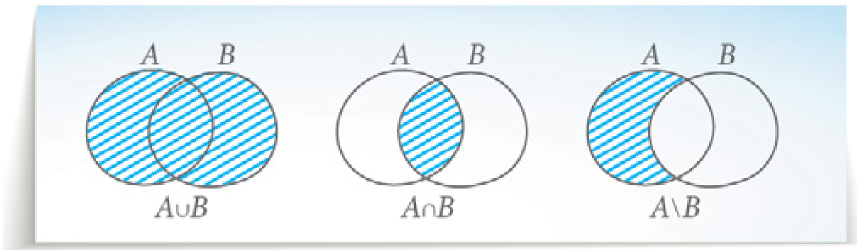
Разлика скупова A и B је скуп C који садржи оне елементе скупа A који не припадају скупу B. То се записује $\boldsymbol{C = A \setminus B}$.

ПРИМЕР 4. а) $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\}$;

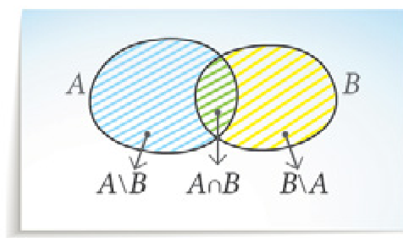
б) $N_0 \setminus N = \{0\}$;

в) $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Коришћењем Венових дијаграма могу се прегледно означити унија, пресек и разлика два скупа.



Разлика скупова није комутативна операција и самим тим $A \setminus B$ није исто што и $B \setminus A$.



ПРИМЕР 5. На Веновом дијаграму на слици приказани су скупови A и B. Одреди те скупове, а затим и скупове: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

РЕШЕЊЕ

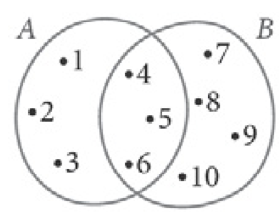
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cap B = \{4, 5, 6\}$

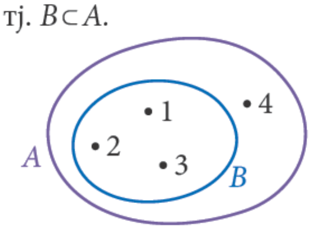
$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$

$B \setminus A = \{7, 8, 9, 10\}$



ПРИМЕР 6. Нека је скуп $A = \{1, 2, 3, 4\}$ а скуп $B = \{1, 2, 3\}$, тј. $B \subset A$.

Тада је $A \cap B = B$ и $A \cup B = A$.



За свака два скупа A и B таква да је $A \subset B$ важиће: $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$.

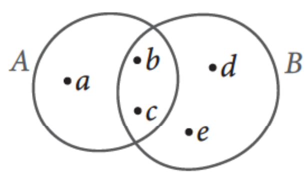
Реши **тест број 4** на електронској платформи **еЗбирка**:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

78. Нека је $A = \{n \mid n \in N, 1 \leq n < 5\}$, а B скуп једноцифрених непарних бројева. Одреди: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

79. На Веновом дијаграму на слици приказани су скупови A и B. Одреди те скупове, а затим и скупове $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.



80. Нека је A скуп свих природних бројева дељивих са 3, а B скуп свих природних бројева дељивих са 9. Одреди скуп $B \setminus A$.

81. Нека је A скуп свих парних природних бројева не већих од 20, а B скуп свих природних бројева дељивих са 3 и не већих од 20. Одреди скуп $A \cap B$.

82. Који од исказа су тачни за све скупове A? (Заокружи слово испред тачног исказа.)

а) $A \cup \varnothing = A$; б) $A \cap \varnothing = A$; в) $A \cap \varnothing = \varnothing$; г) $A \cup \varnothing = \varnothing$.

83. Нека је A скуп свих двоцифрених бројева већих од 70 и дељивих са 2, а B скуп свих природних бројева мањих од 90 и дељивих са 3. Одреди $A \cap B$.

84. Ако је $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ и $C = \{2, 3, 4\}$, одреди скупове:

а) $(A \cup B) \cap C$; б) $(A \cap B) \cup C$.

85. Нека је $A = \{n \mid n \in N \text{ и } 3 + n \leq 12\}$ и $B = \{m \mid m \in N \text{ и } m + 8 \leq 17\}$. Да ли важи $A \cup B = A$?

86. Нека је A скуп свих једноцифрених бројева дељивих са 2, а B скуп свих једноцифрених бројева дељивих са 3. Одреди:

а) $A \cap B$; б) $A \setminus B$; в) $B \setminus A$.

87.* Објасни зашто за све скупове важи:

а) $A \cap B \subset A$; б) $A \subset A \cup B$; в) $A \setminus B \subset A$.

РАЗНИ ЗАДАЦИ

88. Напиши цифрама број:

а) сто дванаест хиљада осам;
б) три милона три хиљаде тридесет.

89. Напиши речима бројеве:

а) 2 020 202; б) 10 100 010.

90. Дужина базена је 25 m, ширина је 16 m, а дубина 2 m. Колико кубних метара воде има у базену, ако је напуњен до врха?

91. Израчунај површину правоугаоника ако је једна његова страница 12 cm, а обим 36 cm.

92. Израчунај вредност израза:

а) $60 + 80 : 5 + 21$; б) $90 - 60 : 3 + 35$;
в) $(180 - 44 : 4) : 13 + 7$; г) $420 - (168 : 7 + 5 \cdot 8)$.

93. Реши једначине:

а) $(x + 23) : 3 = 24$;
б) $(x - 51) \cdot 2 = 8 : 2 + 10$;
в) $8 \cdot x - 24 = 72$;
г) $18 : x + 13 = 14 + 8$;
д) $x : 3 - 7 = 5$.

94. Реши неједначине:

а) $x + 16 \leq 18$; б) $15 - x \geq 3$;
в) $x + 24 > 31$; г) $x - 7 \leq 10$;
д) $x \cdot 2 \leq 28$; ђ) $x : 2 < 46$;
е) $3 \cdot x < 21$; ж) $24 : x < 8$.

95. Када се четвртина непознатог броја помножи са 9 и том производу дода 1 486, добија се најмањи петоцифрени број. Одреди тај непознати број.

96. Запиши израз и израчунај његову вредност:

а) Количнику бројева 56 и 8 додај разлику бројева 32 и 7.
б) Од производа бројева 23 и 7 одузети количник бројева 72 и 9.
в) Од производа бројева 32 и 8 одузми њихов количник.
г) Количнику бројева 128 и 32 додај производ бројева 3 и 9.

97. Израчунај на најједноставнији начин, применом комутативног, асоцијативног или дистрибутивног закона:

а) $7 \cdot 59 + 3 \cdot 59 - 6 \cdot 59$;
б) $526 + 614 + 386 - 126$;
в) $23 \cdot 5 - 17 \cdot 5 + 290 - 185$.

98. Израчунај на што једноставнији начин:

а) $(96 : 6) : (12 : 6)$; б) $(96 \cdot 3) : (12 \cdot 3)$.

99. Одговори:

а) Како ће се променити збир два броја, ако се један сабирак смањи за 3, а други повећа за 7?
б) Како ће се променити разлика два броја, ако се умањеник смањи за 34, а умањилац за 41?
в) Како ће се променити разлика два броја, ако се умањеник повећа за 72, а умањилац за 23?

100.* Ако неком броју допишемо с десна 0, па добијени број поделимо са 7, а затим добијеном количнику с десна допишемо цифру 6 и добијени број поделимо са 11, добије се 46. Од ког броја смо почели?

101.* Кристина је замислила два броја. Њихов количник је 4, а разлика 27. Који су то бројеви?

102. Који од следећих исказа су тачни, а који нетачни?

а) $3|18$; б) $4|120$; в) $7|36$;
г) $8|42$; д) $13|156$; ђ) $17|316$.

103. Који је остатак при дељењу следећих бројева са 7?

а) 23; б) 540; в) 7 780; г) 707.

104. Напиши у облику $a = b \cdot q + r$, $(0 \leq r < b)$ бројеве који при дељењу са:

а) 7 дају остатак 3;
б) 11 дају остатак 2;
в) 5 дају остатак 0.

105. Одреди бројеве b и r, $(b \geq 0, 0 \leq r < b)$ тако да је $a = b \cdot q + r$, ако је:

а) $a = 5, q = 2$; б) $a = 11, q = 3$;
в) $a = 707, q = 3$; г) $a = 301, q = 8$.

106. Нађи остатак при дељењу броја $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 55 \cdot 56 \cdot 57 + 63$ са:
а) 55; б) 11.

107. Шест дечака треба да поделе износ од 1 000 динара. Колико ће сваки дечак да добије и колики је остатак?

108. Којим бројем треба поделити бројеве 127 и 153 да би остаци редом били 7 и 3?

109. На годишњој прослави удружења „Љубитељи математике” било је 170 гостију. Колико је најмање било потребно округлих столова за 8 особа да би се сви гости сместили?

110. Који је највећи, а који најмањи четвороцифрени број дељив са: а) 9; б) 7?

111. Дати су бројеви: $a = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 11$ и $c = 3 \cdot 7$. Без претходног израчунавања бројева a, b и c, одреди:
а) $a : b$; б) $(7 \cdot b) : a$; в) $(22 \cdot c) : b$.

112. Одреди све делиоце броја: а) 24; б) 54.

113. Одреди све двоцифрене садржаоце броја 18.

114. Напиши све садржаоце s броја:
а) 2; б) 3; в) 4;
г) 5 који задовољавају услов $289 \le s < 300$.

115. Напиши по три троцифрена и четвороцифрена садржаоца броја: а) 4; б) 9; в) 25.

116. Када се број a подели једноцифреним бројем добија се да су делилац и количник једнаки, а остатак је 8. Одреди број a.

117.* Збир два броја је 25, а када се већи подели мањим, добија се количник 5 и остатак 1. Који су то бројеви?

118. Заокружи слово испред тачне реченице.
а) Збир 5 427 + 16 988 је дељив са 2.
б) Збир 702 + 12 348 је дељив са 9.
в) Израз 13 705 – 938 + 2 995 није дељив са 5.
г) Производ $46 \cdot 37 \cdot 1\,243$ је дељив са 4.

119. Без израчунавања вредности израза докажи да $4 \mid a$ и $5 \mid b$, ако је $a = 4 \cdot 31 + 4 \cdot 117 - 8 \cdot 53$ и $b = 5 + 25 \cdot 17 - 8 \cdot 5 + 14 \cdot 5 \cdot 3$.

120. Не рачунајући производ, објасни зашто је:
а) број $6 \cdot 3\,725$ дељив са 3;
б) број $8 \cdot 7\,994$ дељив са 4;
в) број $5 \cdot 12 \cdot 399$ дељив са 2, 3, 4, 5, 6 и 30.

121. Дати су бројеви $a = 3\,636$, $b = 1\,485$ и $c = 4\,620$. Који од њих су дељиви са:
а) 2; б) 3; в) 5; г) 9; д) 10?

122. Напиши све двоцифрене бројеве чије су цифре из скупа {0, 2, 3, 5}, а који су дељиви са:
а) 2; б) 10.

123. Израчунај збир цифара бројева
$a = 306$, $b = 420$, $c = 993$, $d = 5\,043$,
$e = 20\,754$, $f = 512\,007$, $g = 1\,008\,352$.
Који од њих су дељиви са 3, а који са 9?

124. Један природан број се завршава са четири нуле. Којом: а) највећом; б) најмањом декадном јединицом је дељив тај број?

125. Коју цифру можемо ставити уместо * да би дати израз био дељив са 10?
а) 437 + 27*; б) 520 + 215 + 3*;
в) 1 242 – 311 + 5*.

126. Замени * одговарајућом цифром тако да број:
а) 2 34* + 519 буде дељив са 3;
б) 918 + 32* буде дељив са 9;
в) 4 0*5 + 2 450 буде дељив са 25.

127.* Нека је a нека од декадних јединица. Доказати да је број $a + 2$ дељив са 3.

128. Одреди цифру * у броју:
а) 4 *07; б) 3 0*6 да би он био дељив са 9.

129. Колико има троцифрених бројева, чије су цифре 1, 2, 3, 5 и све су различите, дељивих са 9?

130. Одреди непознату цифру * тако да дати број буде дељив са 25:
а) 75*; б) 3 77*; в) 247 30*;
г) 5*5; д) 24 3*0

131. Број 5 3** дељив је са 90. Које две цифре су замењене звездицама?

132. Површина правоугаоника је 20 cm^2. Израчунај дужине страница тог правоугаоника, ако су изражене природним бројем?

133. Који од следећих бројева не може да буде збир три узастопна природна броја?

а) 33; б) 36; в) 18; г) 28; д) 42.

134.* Нађи најмањи троцифрен број који при дељењу са 12 има количник једнак остатку.

135.* Збир два броја је 1 451. Ако већи поделимо мањим, добићемо количник 4 и остатак 1. Који су то бројеви?

136. Скупове запиши набрајањем елемената:

а) слова у речи СРБИЈА;
б) слова у речи МАМА;
в) непарних једноцифрених бројева;
г) двоцифрених бројева дељивих са 11;
д) троцифрених бројева дељивих са 300.

137. Одреди елементе скупова:

а) $A = \{n| \; 30 < n \leq 65$ и $9|n\}$;
б) $B = \{n| \; n$ је делилац броја 12$\}$;
в) $C = \{n| \; n|120$ и $24 \leq n \leq 60\}$.

138. Који од скупова садржи елемент 3?

а) $A = \{n \mid n$ је природан број и $n \leq 6\}$;
б) $B = \{n \mid n$ је природан број и $n \geq 6\}$;
в) $C = \{n \mid n$ је паран природан број$\}$;
г) $D = \{n \mid n$ је природан број и $3 \cdot n - 1 > 12\}$.
(Заокружи слово испред тачног одговора.)

139. Одреди све елементе x за које важи $x \in A$, где је:

а) $A = \{0, 1\}$;
б) $A = \{0, 1, 2\}$;
в) $A = \{1, 2, 3\}$;
г) $A = \{n \mid 3 < n \leq 6\}$;
д) $A = \{n \mid n \leq 10$ и $3 \mid n\}$.

140. Који од скупова $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, c, d\}$, $C = \{b, c, d\}$, $D = \{c, d, e, f\}$ није подскуп скупа $E = \{a, b, c, d\}$?

141. Дат је скуп $E = \{a, b, c, d\}$. Скуп E није подскуп једног од следећих скупова: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, d, e\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $D = \{0, a, b, c, d, e\}$. Који је то скуп?

142. Дат је скуп $A = \{225, 3\,330, 72, 1\,100, 7\,070, 2\,250\}$. Одреди подскупове скупа A бројева дељивих са: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 9; ђ) 10; е) 25.

143. Колико елемената имају скупови?

а) $A = \{a, b, c\}$; б) $B = \{a, b, b\}$;
в) $C = \{a, b, c, a, b, c\}$; г) $D = \{a, a, a\}$.

144. Међу датим скуповима пронађи једнаке:

$A = \{а, б\}$, $B = \{а, а, б, в\}$, $C = \{а, б, в\}$,
$D = \{б, а, б, а\}$, $E = \{а, а\}$, $F = \{а\}$.

145. Попуни празна места симболом $\in$ или $\subset$ тако да се добију тачне реченице:

а) a ____ $\{a, b, c\}$; б) $\{a\}$ ____ $\{a, b, c\}$;
в) $\{a, b, b\}$ ____ $\{a, b, c\}$; г) c ____ $\{c, c, c\}$.

146. Дат је скуп $M = \{n \mid n$ је природан број и $3 < n \leq 10\}$.

а) Одреди елементе скупа M.
б) Утврди да ли су скупови $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{9, 10, 11, 12\}$ подскупови скупа M.
в) Да ли су тачни искази:
а) $\{3\} \subset M$; б) $4 \in M$; в) $\emptyset \in M$;
г) $\emptyset \subset M$; д) $8 \notin M$; ђ) $M \subset A \cup B \cup C$;
е) $\{8, 9, 10\} \subset M$?

147. Израчунај:

а) $\{1\} \cup \{2, 3\}$; б) $\{1\} \cap \{2, 3\}$;
в) $\{1, 2\} \cup \{2, 3\}$; г) $\{1, 2\} \cap \{2, 3\}$.

148.* Ако је $A = \{n \mid n$ је природан број и $n \leq 10\}$ и $B = \{n \mid n$ је природан број и $n \mid 12\}$, одреди скупове:

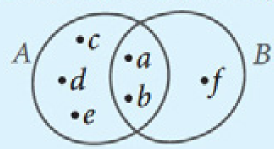
а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

149. Дати су скупови: $A = \{1, 2, 3, 4, x\}$ и $B = \{1, 3, 4, 5, y\}$. Одреди бројеве x и y тако да буде:

а) $A = B$;
б) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
в) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.

150. На основу Веновог дијаграма на слици одреди елементе скупова A и B, а затим и скупова:

а) $A \cup B$;
б) $A \cap B$;
в) $A \setminus B$;
г) $B \setminus A$.



151. Дати су скупови $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{n \mid n$ је природан број и $3 \leq n \leq 6\}$ и $C = \{n \mid n$ је природан број и $n < 4\}$. Одреди елементе скупова:

а) $A \setminus C$; б) $C \setminus B$;
в) $A \cup B$; г) $A \cap B$;
д) $C \setminus (A \cup B)$; ђ) $(A \cap B) \setminus C$.

152. Дати су скупови: $A = \{n \mid n \in N$ и $5 \mid 27 - n\}$, $B = \{n \mid 10 < n \leq 18\}$, $C = \{n \mid n \in N$ и $9 \mid 27 - n\}$. Одреди скупове A, B и C, а затим скупове:

а) $A \cap B$; б) $A \cap C$; в) $B \cup C$;
г) $A \cap (B \cup C)$; д) $A \setminus C$; ђ) $(A \setminus C) \cap B$;
е) $C \setminus A$; ж) $(C \setminus A) \cap B$.

153. Одреди скупове A и B ако је $A \cap B = \{c, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ и $A \setminus B = \{a, e, f\}$.

154. Ако је $A \cap B \cap C = \{1, 4\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \setminus C = \{2, 5\}$ и $A \setminus C = \emptyset$, одреди елементе скупа C.

155. Одреди елементе скупова A и B ако је $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 5\}$ и $B \setminus A = \emptyset$.

156. Одреди елементе скупова A и B ако је $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2 ,3 ,4\}$ и $A \setminus B = \{1\}$.

157. Нека је $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Одреди елементе скупова A и B ако важи $1 \in A$, $1 \notin B$, $2 \notin B$, $3 \notin A$, $4 \in A \cap B$, $5 \in A \cap B$.

158. Дати су скупови: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d, f\}$, $C = \{a, f, g, h\}$ и $D = \{b, e, f, g\}$. Одреди скуп M за који важи $M \subset A$, $(B \cup C) \cap M = \emptyset$, $(A \cap D) \setminus M = \emptyset$ и $\{c\} \setminus M = \{c\}$.

159. У једном одељењу 15 ученика тренира неки од спортова: тенис и кошарку. Осморо ученика тренира кошарку, а петоро и кошарку и тенис.

а) Колико ученика тренира тенис?
б) Колико ученика тренира само тенис?

160. У једној школи ради 57 наставника. Међу њима 39 пије кафу, а 35 чај. Ако са A и B означимо скупове наставника који пију кафу, односно чај, одреди следеће скупове и израчунај број елемената сваког од тих скупова:

а) наставника који пију само кафу;
б) наставника који пију само чај;
в) наставника који пију и кафу и чај;
г) наставника који пију кафу или чај.

161. Сви ученици једног одељења, укупно 28 њих, учлањени су у две секције; 24 су чланови шаховске а 19 чланови музичке секције. Неки ученици су истовремено чланови обе секције. Колико је таквих ученика, а колико оних који су чланови само шаховске и само музичке секције?

162. Од 100 учесника конгреса новинара, њих 10 није знало ни енглески ни француски језик, 75 је знало енглески, 83 су знали француски. Колико њих је знало оба језика, колико само енглески а колико само француски?

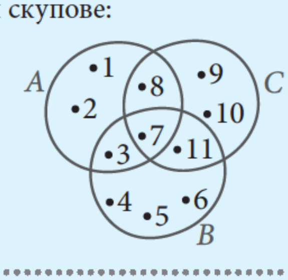
163.* Унија два скупа има 25 елемената. Један од тих скупова има 15 елемената, а њихов пресек има 6 елемената. Колико елемената има други од тих скупова?

164. Нацртај Венов дијаграм у своју свеску, па означи скупове:

а) $A \cup B \cup C$;
б) $A \cap B \cap C$;
в) $(A \cup B) \setminus C$;
г) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$;
д) $A \setminus (B \cup C)$.

165. На Веновом дијаграму приказани су скупови A, B и C. Одреди скупове:

а) $A \cup C$;
б) $A \cap C$;
в) $B \setminus C$;
г) $(A \cap B) \setminus C$;
д) $(B \cup C) \setminus A$;
ђ) $A \cap B \cap C$;
е) $(A \cap B) \cup C$.



166.* Нека је A скуп свих двоцифрених природних бројева дељивих са 3, а B скуп свих двоцифрених природних бројева дељивих са 5.

а) Колико елемената има скуп A?
б) Колико елемената има скуп B?
в) Колико елемената има скуп $A \cap B$?
г) Колико елемената има скуп $A \cup B$?

2 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

2.1. Тачке и праве, односи припадања и распореда

Основни геометријски појмови су: **тачка, права** и **раван**. Већ смо се упознали са геометријским појмовима, као што су: тачка, права, дуж, полуправа.

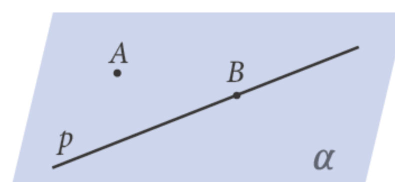
» **геометрија** – реч која потиче од грчких речи (*геа* – земља и *метрес* – мерење) и значи **мерење земље**

На сликама су, како је то уобичајено, **тачке** означене великим словима латинице *A, B, C, D, E, F, G*. За означавање се користе и велика слова са индексима (број записан доле десно поред великог слова): A_1 (читамо „а један”), A_1, B_1, B_2 итд.

Праве означавамо малим словима латинице, на пример: *a, b, c, d... p, q, r, s...* За означавање се користе и мала слова са индексима: p_1 (читамо „*p* један”), p_2, q_1 итд. Праву замишљамо као затегнути конац који можемо бесконачно продужавати на обе стране

Раван замишљамо као равну површину која се бесконачно шири у свим правцима, на пример као зид, лист папира и слично. Равни се обележавају грчким словима α (алфа), β (бета), γ (гама), δ (делта) итд.

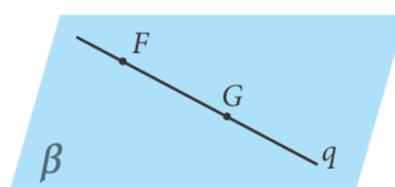
Тачка може да припада или да не припада правој.



Кажемо да тачка *B* **припада** правој *p* и записујемо $B \in p$.

Тачка *A* **не припада** правој *p*, па записујемо $A \notin p$.

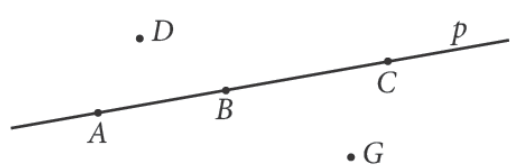
Две разне тачке равни одређују тачно једну **праву**, тј. свака права је јединствено одређена двема различитим тачкама.



На пример, тачке *F* и *G* одређују тачно једну праву. То значи да је права *q* јединствена права која садржи тачке *F* и *G*.

Пошто се за сваке две тачке подразумева да припадају истој правој, за три или више тачака које припадају истој правој кажемо да су **колинеарне**.

Ако три или више тачака не припадају истој правој, онда су **неколинеарне**.

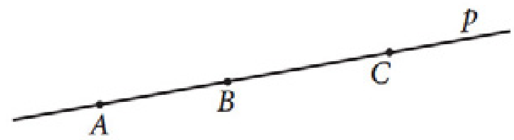


На слици су тачке *A*, *B* и *C* колинеарне.

Тачке *A*, *B*, *D* и *G* су неколинеарне.

На свакој правој постоји бесконачно много тачака, па има смисла говорити о распореду тачака на једној правој.

Тако се за тачку B каже да се налази **између** тачака A и C на правој p.



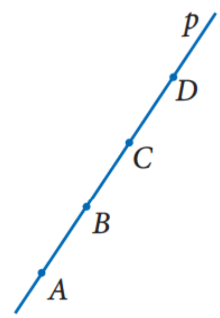
Тачке B и C су **са исте стране** тачке A на правој p.

Тачке A и C су **са разних страна** тачке B на правој p.

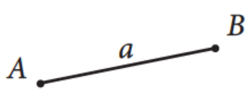
Распоред тачака на правој обележавамо са: $\boldsymbol{A - B - C}$ или $\boldsymbol{C - B - A}$, што значи да се тачка B налази између тачака A и C.

ПРИМЕР 1.

На слици су приказане четири тачке A, B, C, D праве p.
Тачка B је између тачака A и C ($A - B - C$).
Тачка B је између тачака A и D ($A - B - D$) праве p.
Тачке B, C и D су са исте стране тачке A.
Тачке B и A су са исте стране тачке C на правој p.
Тачке B и D су са разних страна тачке C.
За тачке праве p ће важити: $A - B - C - D$.



Нека су A и B две разне тачке.



Скуп тачака који чине A и B и све тачке између њих назива се **дуж** и означава се са $\boldsymbol{AB}$ (или $\boldsymbol{BA}$). Тачке A и B су **крајеви** или **крајње тачке** те дужи.

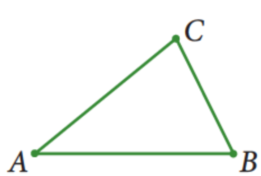
Понекад дуж означавамо и само једним малим латиничним словом, на пример $\boldsymbol{a}$, као што је на слици. Код именовања дужи није важно која се тачка прво наводи. Дуж се може означити са AB или BA.

ПРИМЕР 2. Колико различитих дужи одређују:

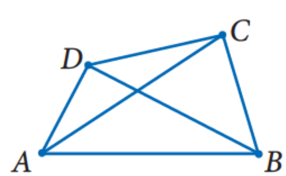
а) три различите тачке;
б) четири различите тачке?

РЕШЕЊЕ

а) Три различите тачке одређују три дужи: AB, BC и CA.



б) Четири различите тачке одређују шест дужи: AB, BC, CD, DA, AC и DB.

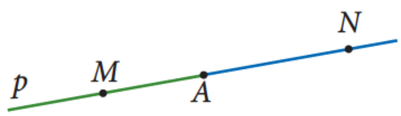


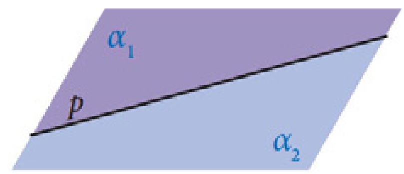
Нека су A и B две разне тачке извесне праве p.

Скуп, који садржи тачку A и све тачке праве p које су са исте стране тачке A са које је и тачка B, назива се **полуправа** са почетном тачком A. Означићемо је са $\overline{\dot{A}B}$ или Ap.

ПРИМЕР 3.

Нека су тачке M и N са разних страна тачке A на правој p. Тада постоје две полуправе које су подскупови праве p, а почетна тачка им је тачка A. То су полуправе $\overline{\dot{A}M}$ и $\overline{\dot{A}N}$.





Раван замишљамо као равну плочу и ако у њој уочимо неку праву p, видећемо да та права дели раван на две области. Тако на слици права p дели раван α на две полуравни α_1 и α_2 (горњу и доњу).

Унија скупова тачака праве p и свих тачака равни које су са исте стране те праве образују **полураван**. Свака права у равни одређује по две полуравни.

ЗАДАЦИ

1. Нека су A, B, C три тачке које не припадају једној правој. Колико разних правих одређују ове тачке?

2. Нека су а) A, B, C; б) A, B, C, D, E разне тачке једне праве. Колико ове тачке одређују дужи? Наброј те дужи.

3. Нека су M, A и N три разне тачке праве p, такве да је тачка A између тачака M и N. Одреди шта представља:

а) $\overline{\dot{A}M} \cup \overline{\dot{A}N}$; б) $\overline{\dot{M}A} \cap \overline{\dot{N}A}$; в) $\overline{\dot{A}M} \cap \overline{\dot{A}N}$.

4. Нека се праве a и b секу у тачки O. Која од следећих реченица је тачна?

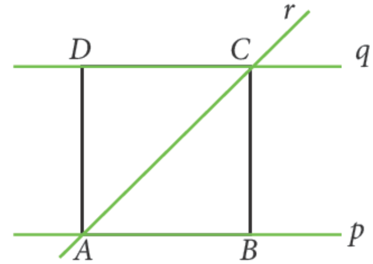
а) $a \cap b = O$; б) $a \cap b = \{O\}$; в) $a \cap b = \emptyset$.

5.* Нека су A, B, C три разне тачке праве p такве да се тачка B налази између тачака A и C. Посматрај дужи AB, BC и AC и одреди:

а) $AB \cap BC$; б) $AB \cup BC$; в) $AC \setminus BC$; г) $AC \setminus AB$.

6. Нека су A, B, C три разне тачке праве p. Колико ове тачке одређују полуправих на правој p?

2.2. Односи правих у равни



Посматрајмо квадрат $ABCD$ и означимо са p, q и r праве одређене редом тачкама AB, CD и AC. Права r има по једну заједничку тачку са правама p и q, то су тачке A и C.

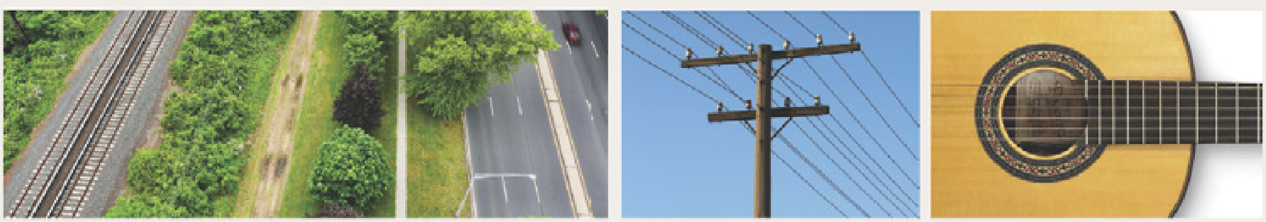
Кажемо да се праве p и r, односно q и r секу и пишемо: $p \cap r = \{A\}$, $q \cap r = \{C\}$. Дакле, пресек правих p и r је скуп чији је елемент тачка A. Скраћено, кажемо пресек правих p и r је тачка A, а пресек правих q и r је тачка C. Тачку A називамо **пресечном тачком** правих p и r, а тачку C **пресечном тачком** првих q и r.

Ако се две праве **секу**, онда у пресеку имају једну тачку.

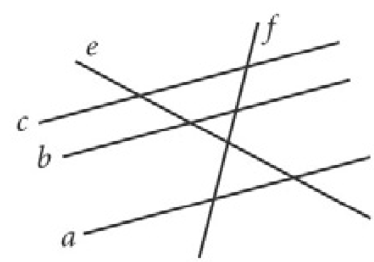
Ако су две праве **паралелне**, онда је њихов пресек празан скуп.

Праве p и q немају заједничких тачака и каже се да су оне паралелне. Да су праве p и q паралелне означавамо $\boldsymbol{p \| q}$.

Модел паралелних правих често срећемо у свакодневном животу.

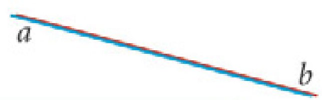


ПРИМЕР 1. На слици су приказане праве a, b, c, e и f. Које од њих су паралелене, а које се секу?



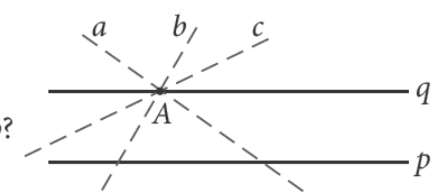
РЕШЕЊЕ Паралелне праве су: $a \| b$, $b \| c$, $c \| a$. Праве e и f секу праве a, b, c, али се секу и међу собом.

Праве a и b се поклапају, што записујемо: $\boldsymbol{a \equiv b}$.



Две праве које се **поклапају**, такође су паралелне.

ПРИМЕР 2. Дате су права p и тачка A која не припада правој p. Колико има правих q таквих да $A \in q$ и да је $q \| p$? Колико има правих које садрже тачку A и секу праву p?

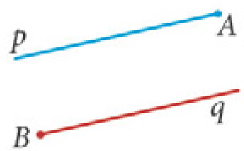


РЕШЕЊЕ Постоји само једна права q, таква да $A \in q$ и $q \| p$.
Све остале праве a, b, c садрже тачку A и секу праву p. Понекад се тај пресек не види на слици (као у случају правих p и c). Јасно је да оваквих правих има бесконачно много.

За сваку праву и тачку ван ње постоји тачно једна права која садржи ту тачку и паралелна је датој правој.

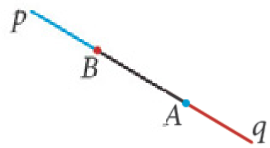
ПРИМЕР 3. За две разне праве важи да су или паралелене или да се секу. Какве могућности постоје за две разне полуправе?

РЕШЕЊЕ На сликама су приказани међусобни положаји за полуправе Ap и Bq.



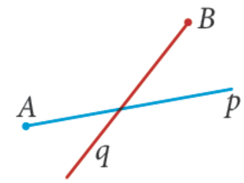
Полуправе Ap и Bq су паралелне.

$Ap||Bq$

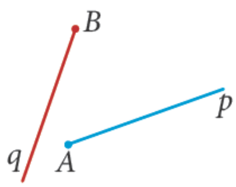


Полуправе Ap и Bq припадају једној правој. Пресек ове две полуправе је дуж AB.

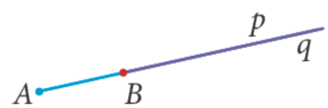
$Ap \cap Bq = AB$



Полуправе Ap и Bq се секу.



Полуправе Ap и Bq нису паралелене и немају заједничких тачака.



Полуправа Bq је подскуп полуправе Ap, па је њихов пресек полуправа Bq а унија полуправа Ap.

$Bq \subset Ap$

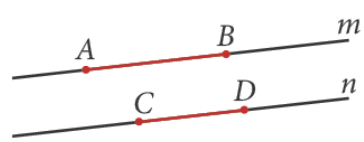
$Ap \cap Bq = Bq$

$Ap \cup Bq = Ap$

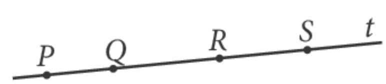
Две полуправе су паралелне, ако припадају истој или паралелним правама.

ПРИМЕР 4.

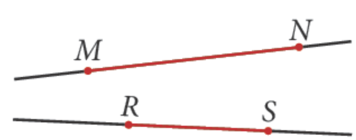
а) Дате су две паралелне праве m и n и тачке A, B на правој m и тачке C, D на правој n. У каквом су међусобном положају дужи AB и CD?



б) Дата је права t и на њој четири различите тачке P, Q, R, S. У каквом су међусобном положају дужи PQ и RS, PR и QS?



в) У каквом су међусобном положају дужи MN и RS на слици?



РЕШЕЊЕ

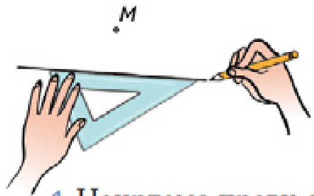
а) Дужи AB и CD су паралелне, јер припадају правама m и n које су паралелне. $AB||CD$, јер је $m||n$.

б) $PQ||RS$ и $PR||QS$, јер се налазе на истој правој t.

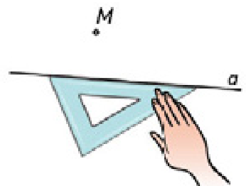
в) Дужи MN и RS нису паралелне иако немају заједничких тачака, јер се праве на којима се налазе секу.

Две дужи су паралелне, ако се налазе на истој правој или на паралелним правама.

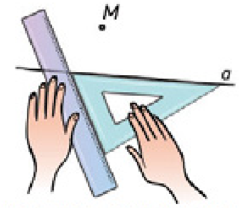
ПРИМЕР 5. Прикажимо како се уз помоћ лењира и троугаоног лењира (или два троугаона лењира) цртају паралелене праве.



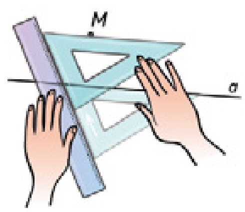
1. Нацртамо праву a и тачку M ван праве a.



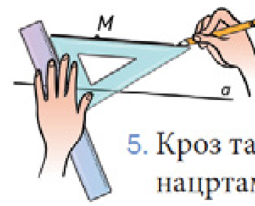
2. Поставимо најдужу страницу троугаоног лењира уз праву a.



3. Поставимо лењир уз другу страницу троугаоног лењира и чврсто га држимо.



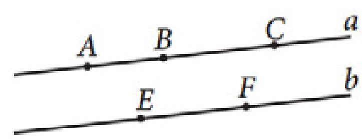
4. Померамо троугаони лењир дуж обичног лењира док најдужа страница троугаоног лењира не дође до тачке M.



5. Кроз тачку M нацртамо праву b.

ЗАДАЦИ

7. Нека су a и b две паралелне праве и $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, $E \in b$, $F \in b$ тачке тих правих. Колико укупно правих одређују ове тачке?



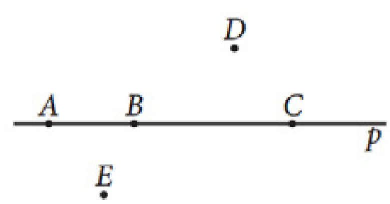
8. Нацртај три праве a, b и c тако да је $a||b$ и да права c сече праву a. Да ли права c сече и праву b?

9. Дате су тачке A, B, C, D и E. Нацртај:

а) праву која садржи тачку D и паралелна је правој p;

б) праву која садржи тачку A и паралелна је правој $p(ED)$.

в) Да ли су праве $p(BE)$ и $p(CD)$ паралелне или се секу?



10. Дате су праве a, b и c.

а) Ако је $a||b$ да ли је $b||a$? б) Ако је $a||b$ и $b||c$, да ли је $a||c$?

11. Нацртај праву p и полуправу Oq. Шта све може да буде њихов пресек? Нацртај све случајеве.

12. Нацртај две дужи AB и CD које:

а) су паралелне; б) се секу.

13. Нацртај дуж AB и полуправу Op тако да су:

а) паралелне; б) да се секу.

14. Праве a и b су паралелне и пресечене су правом c. Колико ове три праве одређују полуправих?

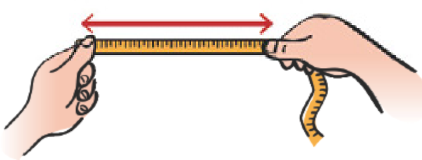
15. Права a сече две странице AC и BC троугла ABC у тачкама E, односно F. Наброј све дужи које уочаваш на слици.

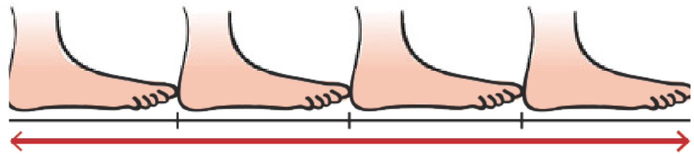
16. Нацртај пет разних тачака тако да све оне припадају:

а) једној правој; б) двема правама.

2.3. Мерење дужине и једнакост дужи

У свакодневном животу веома често меримо одређене дужине: дужину клупе, дужину ограде, дужину пута између два града итд. Погодно је користити такозване мање, односно веће јединице за мерење дужине: милиметри, центиметри, метри, километри... Осим стандардних јединица користе се и друге. Тако, на пример, ширину учионице можемо измерити метром, али и стопама и корацима.





У неким земљама се осим метарских јединица користе и друге: миље, стопе, инчи, јарди. Међутим, због једноставности коришћења постоји тежња ка уједначености мерних јединица, па је формиран Међународни систем јединица (SI). У том систему је прихваћено да основна јединица за мерење дужине буде **метар (m)**.

Подсетимо се јединица изведених од метра које користимо при мерењу:

Дециметар (dm) је десети део метра: 1m = 10 dm

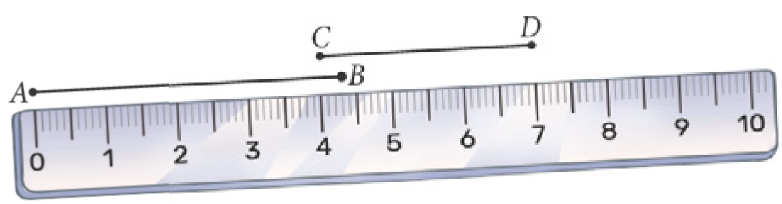
Центиметар (cm) је десети део дециметра и стоти део метра: 1 dm = 10 cm, 1 m = 100 cm

Милиметар (mm) је десети део центиметра, стоти део дециметра и хиљадити део метра: 1 cm = 10 mm, 1 dm = 100 mm, 1 m = 1 000 mm

Километар (km) има хиљаду метара:
1 km = 1 000 m = 10 000 dm = 100 000 cm = 1 000 000 mm

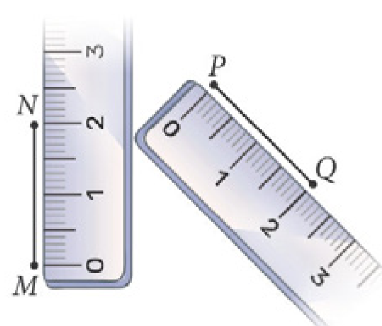
ПРИМЕР 1. Дуж AB на слици има дужину 43 mm, а дуж CD 3 cm.

Дужина дужи представља растојање између две тачке.



Једнакост дужи и средиште дужи

ПРИМЕР 2. Дужи MN и PQ су једнаке, јер имају исте дужине.
$MN = PQ = 2$ cm



За две дужи кажемо да су **једнаке** ако имају исте дужине.

Приметимо да се појам једнакости дужи разликује од појма једнакости скупа тачака тих дужи.

ПРИМЕР 3. Дате су дужи AB дужине 2 m 4 dm, CD дужине 1 m 7 dm, EF дужине 2 m 40 cm, GH дужине 170 cm. Које међу овим дужима су једнаке?

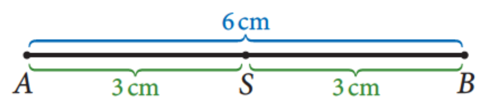
РЕШЕЊЕ $AB = EF$ и $CD = GH$.

> Тачка S је **средиште дужи** AB ако је дужина дужи AS једнака дужини дужи SB.

$AS = SB$

ПРИМЕР 4. Нека је дата дуж AB. Одредити њену дужину, ако је дато њено средиште S и ако је $AS = SB = 3$ cm.

РЕШЕЊЕ $AB = AS + SB = 3\text{ cm} + 3\text{ cm} = 6\text{ cm}$



ЗАДАЦИ

17. Нацртај правоугаоник $ABCD$ чије су странице $AB = 3$ cm и $BC = 4$ cm, а затим измери дужину дужи AC и BD.

18. Изрази дужину датих дужи у центиметрима: $AB = 1$ m 3 dm 5 cm, $BC = 1$ m 63 cm, $CD = 7$ dm 2 cm.

19. На сајту NBA лиге објављен је податак да је висина коша 10 стопа. Колико то износи у метрима и центиметрима ако је једна стопа 305 mm?

20. Изрази дужину у другим јединицама:

а) 30 mm = ______cm; б) 300 mm = ______dm; в) 20 cm = ______dm;

г) 200 cm = ______m; д) $\frac{1}{2}$ m = ______cm; ђ) $\frac{1}{5}$ m = ______cm.

21. Помоћу лењира нацртај две дужи дужине 3 cm и једну дуж дужине 5 cm.

22. Нацртај три произвољне дужи и лењиром измери њихове дужине.

23. Дужине две дужи су: $AB = 245$ mm и $CD = 25$ cm. Да ли су ове две дужи једнаке?

24. Дуж $MN = 3$ m 1 dm 4 cm и дуж PQ чија је дужина изражена у милиметрима су једнаке. Колика је дужина дужи PQ?

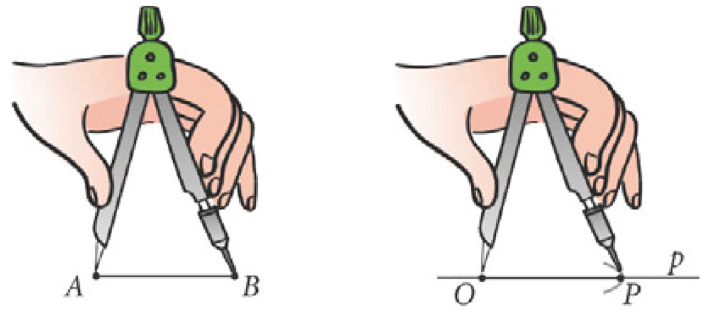
25. Које две од дужи $MN = 2$ dm 3 cm, $PQ = 23$ cm и $RS = 203$ cm су једнаке?

26.* Комад платна има дужину 1 632 cm. Од њега се одсецају комади једнаке дужине докле год је то могуће. Остататак платна ће бити најкраћи када се одсецају комади дужине:

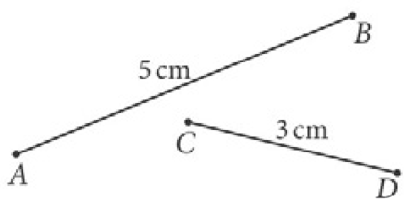
а) 7 cm; б) 4 cm; в) 5 cm ; г) 9 cm. (Заокружи слово испред тачног одговора.)

2.4. Преношење и надовезивање дужи

Преношење дужи у геометријском смислу значи да дужину дате дужи AB узмемо у отвор шестара и ту дужину нанесемо на датој правој p почев од неке унапред задате тачке O. Тиме добијамо тачку P на правој p такву да је дужина дужи AB једнака дужини дужи OP.

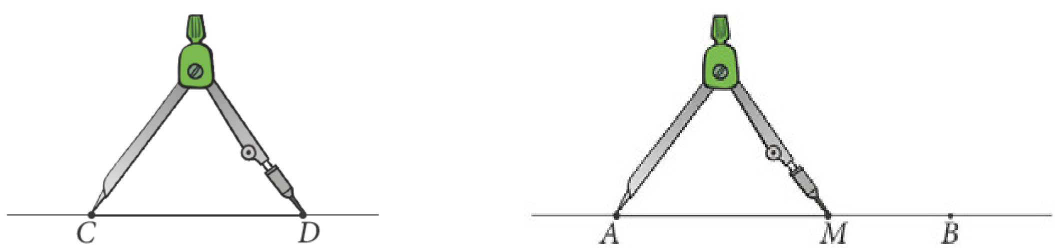


Дужи се могу поредити по дужини. Дуж AB дужине 5 cm већа је, тј. дужа од дужи CD дужине 3 cm.



Дуж MN је дужа од дужи PQ, ако је дужина дужи MN већа од дужине дужи PQ.

Дужи се могу **упоређивати по дужини** и помоћу шестара. Ако **пренесемо** дуж CD подешавањем отвора шестара на дуж AB, тако да дужи CD и AM буду једнаке и тачка M се налази на дужи AB између тачака A и B, тада је дуж AB већа од дужи CD.

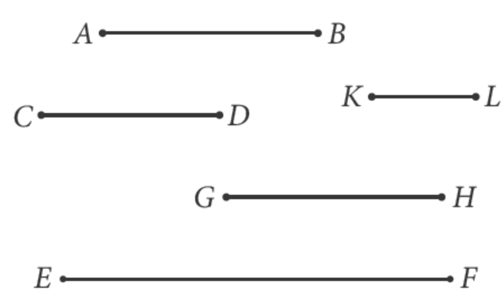


ПРИМЕР 1. Дате су дужи на слици. Користећи шестар утврди:

а) Да ли међу свим дужима има једнаких?

б) Која је дуж најдужа?

в) Која је дуж најкраћа?



РЕШЕЊЕ

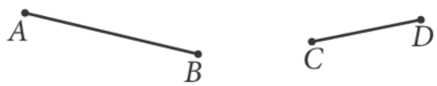
а) $AB = GH$;

б) Најдужа је дуж EF;

в) Најкраћа је дуж KL.

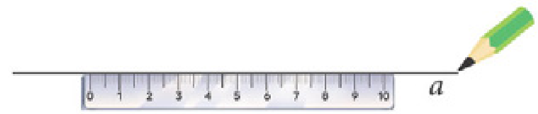
Дужи се помоћу шестара могу надовезивати (конструктивно сабирати).

Претпоставимо да су нам дате дужи AB и CD, при чему је $AB > CD$. На правој a конструиши дуж AD чија је дужина једнака збиру дужина дужи AB и CD.



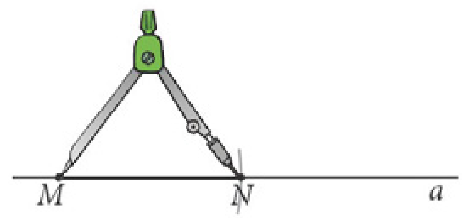
Када кажемо да нешто **конструишемо** или **конструктивно одредимо** значи да поред **лењира** којим можемо одређивати бројевне вредности дужина, користимо и **шестар** којим упоређујемо те дужине или њиме прецизно цртамо геометријске фигуре.

1. Нацртамо праву a.

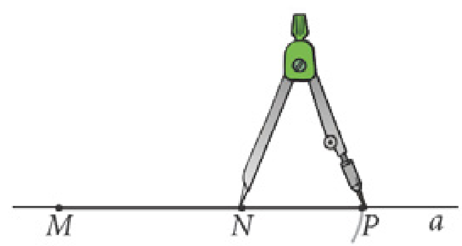


2. На правој a обележимо тачку M.

3. Отвором шестара „узмемо” дуж AB, поставимо иглу шестара у тачку M и одредимо тачку N.

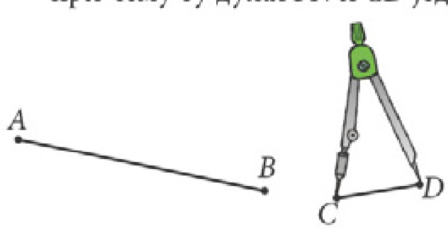


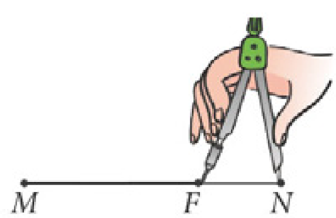
4. Узмемо шестар отвора дужине дужи CD, поставимо иглу шестара у тачку N и са оне стране са које није тачка M одредимо тачку P.



Кажемо да су дужи **надовезане** ако имају заједничку једну крајњу тачку.

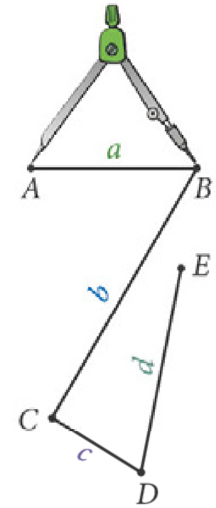
ПРИМЕР 2. На слици је приказана дуж MF која је једнака разлици дужи AB и CD, при чему су дужи FN и CD једнаке.





Конструктивно одузети дуж CD од дужи AB значи умањити дужину дужи AB за дужину дужи CD.

ПРИМЕР 3. Конструктивно одреди дуж чија је дужина једнака дужини дате изломљене линије $ABCDE$.



РЕШЕЊЕ

Изломљена линија $ABCDE$ дата је надовезаним дужима AB, BC, CD, DE чије су дужине редом a, b, c, d.

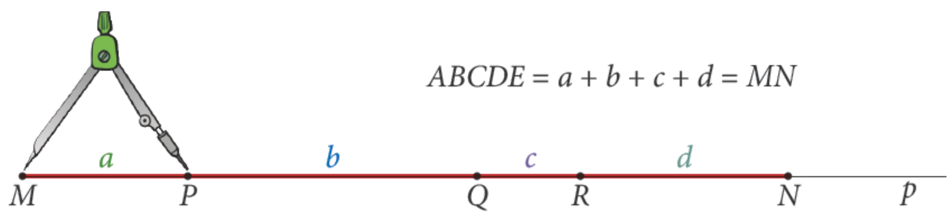
Дужину a дужи AB преносимо на посебну полуправу p са почетком у тачки M, тако да добијена дуж MP буде дужине a.

Затим, поступком надовезивања дужи, од тачке P пренесемо дужину b дужи BC тако да добијена дуж PQ буде дужине b.

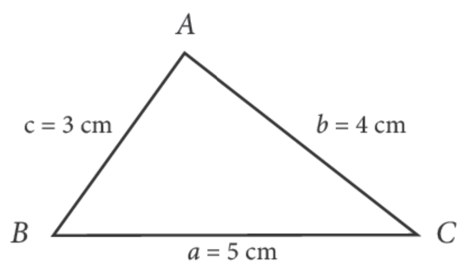
На исти начин преносимо дужину c дужи CD од тачке Q тако да дуж QR има дужину c. На крају, почев од тачке R преносимо дужину d дужи DE и добијамо тачку N тако да је $RN = d$.

Зато је дужина изломљене линије $ABCDE$ пренесене на полуправу једнака дужини дужи MN.

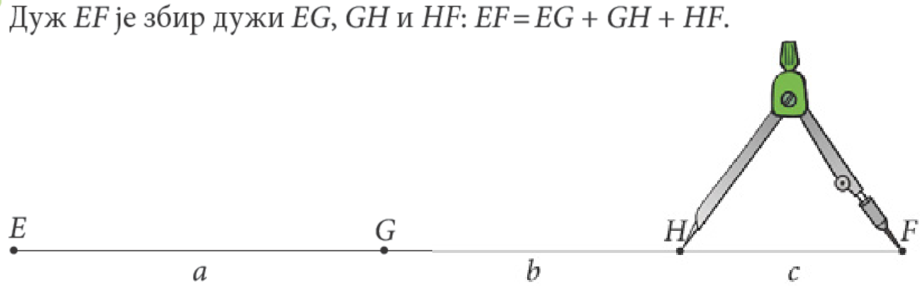
$$ABCDE = a + b + c + d = MN$$



ПРИМЕР 4. Странице троугла ABC су $a = 5$ cm, $b = 4$ cm и $c = 3$ cm. Израчунај обим овог троугла, а затим конструиши дуж чија је дужина једнака том обиму.



РЕШЕЊЕ Дуж EF је збир дужи EG, GH и HF: $EF = EG + GH + HF$.



Пошто је $EG = a$, $GH = b$ и $HF = c$, обим троугла ABC једнак је дужи EF:

$O = a + b + c = EG + GH + HF = EF$.

Обим троугла је $O = 5\text{ cm} + 4\text{ cm} + 3\text{ cm} = 12\text{ cm}$.

ЗАДАЦИ

27. Нацртај дужи $AB = 2$ cm, $CD = 4$ cm и $EF = 5$ cm и коришћењем шестара упореди њихове дужине.

28. Нацртај две једнаке дужи и надовежи их користећи шестар.

29. Нацртај две дужи AB и CD различитих дужина, затим их конструктивно сабери (надовежи) и одузми.

30. Нацртај квадрат странице $a = 3$ cm. Колики је обим овог квадрата? Коришћењем шестара и поступка надовезивања дужи конструиши дуж једнаку обиму нацртаног квадрата.

31. Нацртај правоугаоник страница 3 cm и 2 cm. Израчунај обим тог правоугаоника, а затим нацртај дуж чија је дужина једнака том обиму.

32. Нацртај једну изломљену линију која се састоји од: а) три; б) пет дужи и конструктивно одреди дуж чија је дужина једнака дужини те линије.

33. Нацртај правоугаоник $ABCD$ ($AB > AD$), а затим конструктивно одреди дуж која је једнака разлици страница AB и AD.

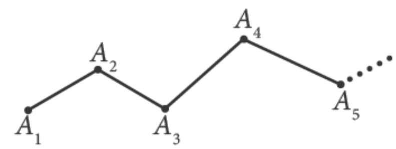
34. Дате су дужи $AB = 5$ cm 3 mm и $CD = 4$ cm 7 mm. Колико милиметара има збир, а колико разлика ових дужи?

Све примере у лекцији уради користећи алат на сајту:

www.geogebra.org

2.5. Многоугао

ПРИМЕР 1.



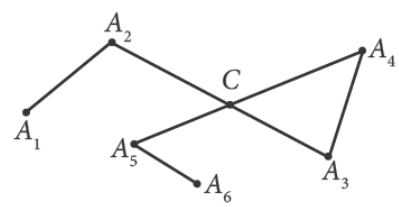
На слици су дате дужи A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 где је крајња тачка дужи A_1A_2 истовремено и почетна тачка дужи A_2A_3, затим крајња тачка дужи A_2A_3 је и почетна тачка дужи A_3A_4, крајња тачка дужи A_3A_4 је почетна тачка последње дужи A_4A_5.Такве дужи зовемо надовезаним и оне чине изломљену линију $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Надовезивањем дужи као на слици добија се **изломљена линија**.

Изломљену линију у равни чине две или више надовезаних дужи тако да две суседне дужи не припадају истој правој. Ако се почетна тачка прве дужи разликује од крајње тачке последње дужи, кажемо да је изломљена линија **отворена**.

ПРИМЕР 2.

На слици је дата изломљена линија $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Дуж A_2A_3 сече дуж A_4A_5 у тачки C: $A_2A_3 \cap A_4A_5 = \{C\}$. Зато за ту изломљену линију кажемо да има једну тачку самопресецања.



C – тачка самопресецања

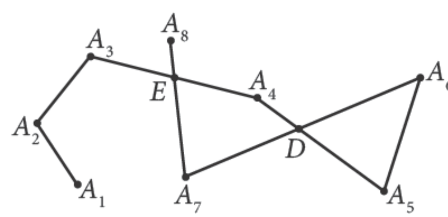
Свака изломљена линија може али и не мора имати једну или више **тачака самопресецања**.

ПРИМЕР 3.

На слици је дата изломљена линија $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Дужи A_3A_4 и A_7A_8 секу се у тачки E, а дужи A_4A_5 и A_6A_7 у тачки D.

$A_3A_4 \cap A_7A_8 = \{E\}$, $A_4A_5 \cap A_6A_7 = \{D\}$.

Ова изломљена линија има две тачке самопресецања E и D.

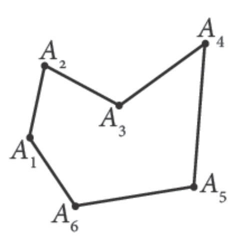


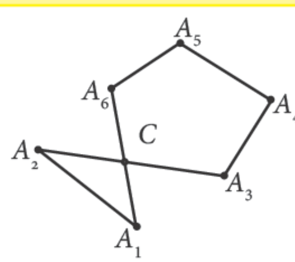
D, E – тачке самопресецања

Ако се почетна тачка прве дужи поклапа са крајњом тачком последње дужи, таква изломљена линија се зове **затворена**.

ПРИМЕР 4.

На слици су дате две затворене изломљене линије. Прва $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ нема тачака самопресецања а друга, такође $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ има једну тачку самопресецања C.





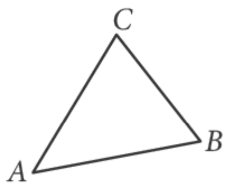
C – тачка самопресецања

Надаље ћемо разматрати само затворене изломљене линије без тачака самопресецања.

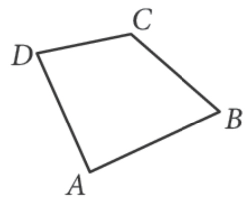
Затворена изломљена линија без тачака самопресецања назива се **многоугаона линија**.

Тако добијамо:

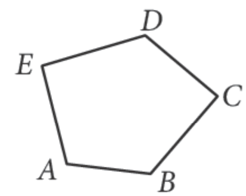
1) троугаону линију ABC



2) четвороугаону линију $ABCD$



3) петоугаону линију $ABCDE$, итд.

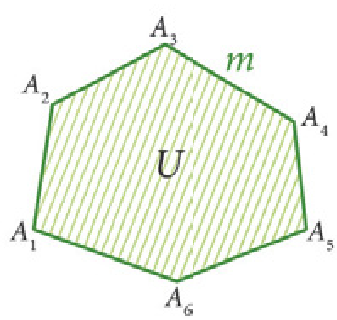


Многоугаона линија дели раван на **унутрашњу** (ограничену) област и **спољашњу** (неограничену) област.

Ако многоугаоној линији m додамо тачке унутрашње области U, добијамо геометријску фигуру у равни која се зове многоугао.

Унија скупова тачака многоугаоне линије m и унутрашње области U зове се **многоугао – *M***.

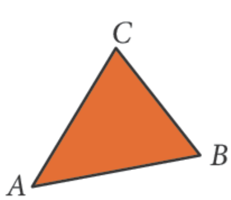
$$M = m \cup U$$

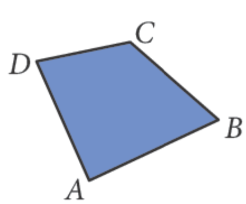


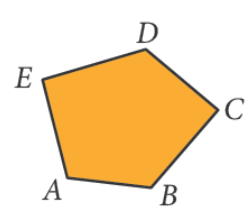
Многоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ настао је од многоугаоне линије $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ којој су додате тачке унутрашње области U. Тачке $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ су **темена** многоугла. Пошто их има шест, тај многоугао се зове шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Такође, дужи A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 и A_6A_1 чине **странице** шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ има и шест **углова**, али о томе ћемо учити у неком од наредних поглавља.

Тако од троугаоне линије добијамо троугао, од четвороугаоне линије четвороугао, од петоугаоне линије петоугао, итд.

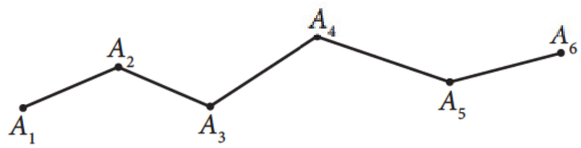






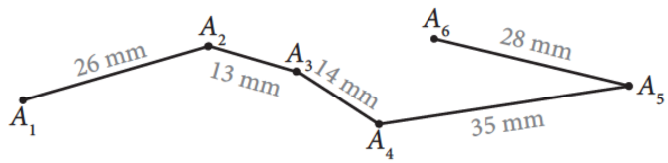
Дужина изломљене линије и обим многоугла

Изломљену линију смо већ одредили као линију која настаје надовезивањем дужи. Надовезивањем шест дужи A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 настала је изломљена линија $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



ПРИМЕР 5. Нађи дужину изломљене линије $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, ако је $A_1A_2 = 26$ mm, $A_2A_3 = 13$ mm, $A_3A_4 = 14$ mm, $A_4A_5 = 35$ mm, $A_5A_6 = 28$ mm.

РЕШЕЊЕ

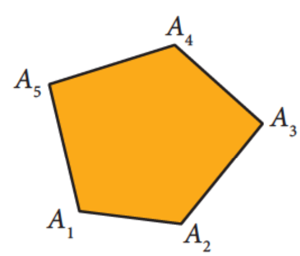


$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 =$$
$$26\,\text{mm} + 13\,\text{mm} + 14\,\text{mm} + 35\,\text{mm} + 28\,\text{mm} = 116\,\text{mm} = 1\,\text{dm}\ 1\,\text{cm}\ 6\,\text{mm}$$

> **Дужина изломљене линије** једнака је збиру дужина дужи које чине ту изломљену линију.

Ако бисмо рачунали дужину затворене изломљене линије без тачака самопресецања, тј. дужину многоугаоне линије, израчунали бисмо обим одговарајућег многоугла.

$$O_{A_1A_2A_3A_4A_5} = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1$$



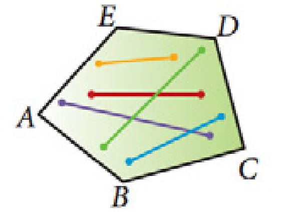
> **Обим многоугла** је збир дужина страница тог многоугла.

ПРИМЕР 6. Израчунај обим многоугла на слици ако је $A_1A_2 = 27$ mm, $A_2A_3 = 29$ mm, $A_3A_4 = 19$ mm, $A_4A_5 = 23$ mm, $A_5A_1 = 2$ cm.

РЕШЕЊЕ

$$O_{A_1A_2A_3A_4A_5} = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1 =$$
$$27\,\text{mm} + 29\,\text{mm} + 19\,\text{mm} + 23\,\text{mm} + 20\,\text{mm} = 118\,\text{mm} = 1\,\text{dm}\ 1\,\text{cm}\ 8\,\text{mm}.$$

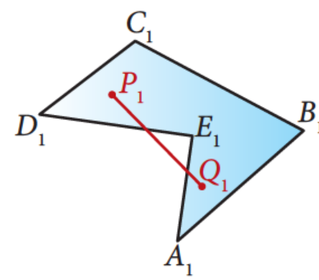
Конвексне и неконвексне фигуре



На слици је дат петоугао *ABCDE* и у његовој унутрашњости тачке које образују дужи. Видимо да дужи које су одређене тим тачкама целе припадају том петоуглу.

> Геометријска фигура је **конвексна** ако за сваке две тачке које јој припадају, фигура садржи и дуж одређену тим тачкама.

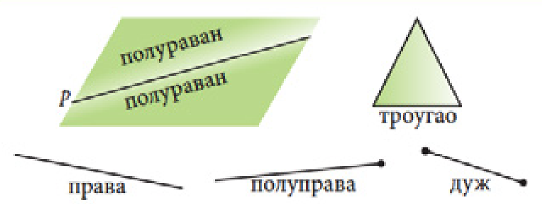
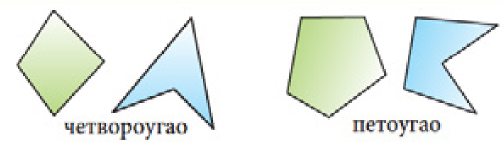
» **конвексан** – реч латинског порекла и значи испупчен



На слици је дат петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$ и у његовој унутрашњости две тачке P_1 и Q_1 које образују дуж P_1Q_1. Видимо да цела дуж P_1Q_1 не припада том петоуглу иако му њене крајње тачке припадају.

> Геометријска фигура је **неконвексна** ако постоје две тачке које јој припадају, за које фигура не садржи целу дуж одређену тим двема тачкама.

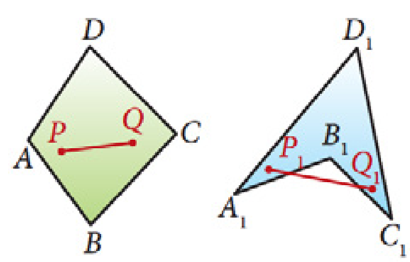
Полураван, права, полуправа и дуж су конвексне фигуре.
Троугао је многоугао који је конвексна фигура. Сви остали многоуглови могу бити и конвексне и неконвексне фигуре.

Конвексне фигуре	Многоуглови који могу бити конвексне и неконвексне фигуре
	 Шестоугао, седмоугао и остали многоуглови (осим троугла) могу бити и конвексни и неконвексни.

ПРИМЕР 7.

На сликама су дати примери конвексног и неконвексног четвороугла. Пошто за било које две тачке које припадају четвороуглу *ABCD* и цела дуж одређена тим тачкама припада *ABCD*, као што је то случај са тачкама *P* и *Q*, онда је тај четвороугао конвексан.

Четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ садржи тачке P_1 и Q_1, али не садржи целу дуж одређену овим тачкама, па је зато неконвексан.

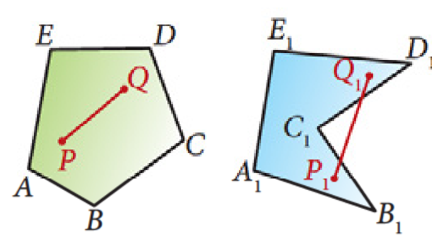


конвексан неконвексан

ПРИМЕР 8.

На сликама су дати примери конвексног и неконвексног петоугла. За било које две тачке које му припадају петоугао *ABCDE* садржи и целу дуж одређену тим тачкама, као што је случај са тачкама *P* и *Q*.

Петоугао $A_1B_1C_1D_1$ садржи тачке P_1 и Q_1, али не садржи целу дуж одређену овим тачкама, па је неконвексан.



конвексан неконвексан

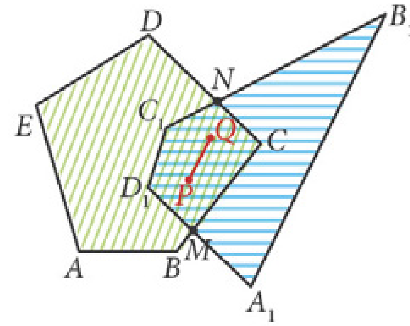
ПРИМЕР 9.

Нека су петоугао $ABCDE$ и четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ конвексни и нека се по две њихове странице секу:

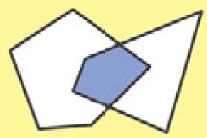
$BC \cap A_1D_1 = \{M\}$

$CD \cap B_1C_1 = \{N\}$

Пресек ова два многоугла $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1$ је петоугао $MCNC_1D_1$ који је такође конвексан, јер за сваке две тачке P и Q које припадају његовој унутрашњости, и цела дуж PQ јој такође припада.

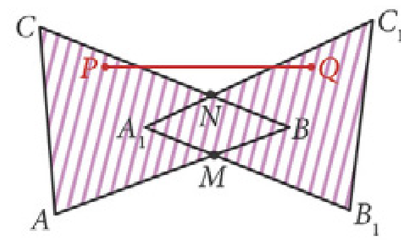


Пресек две конвексне фигуре увек је конвексна фигура.

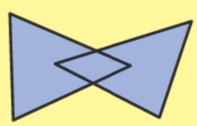


ПРИМЕР 10.

На слици имамо два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ који су наравно конвексни. Унија ова два троугла је шестоугао AMB_1C_1NC. Ако уочимо тачке P и Q у његовој унутрашњости, видећемо да му неће припадати цела дуж PQ. Зато овај добијени шестоугао неће бити конвексан.



Унија две конвексне фигуре не мора бити конвексна фигура.



Реши задатке 1, 3, 4, 5 и 6 у **тесту број 5** на електронској платформи еЗбирка: http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

35. Како 3 праве могу делити раван на: а) 4; б) 6 делова? Нацртај.

36. Нацртај затворену изломљену линију са 3 тачке самопресецања.

37. Нацртај један конвексан и један неконвексан осмоугао.

38. Нацртај четвороугао и петоугао тако да им пресек буде:

а) тачка; б) дуж; в) троугао.

39. Нацртај троугао и четвороугао тако да им унија буде:

а) конвексна фигура; б) неконвексна фигура.

40. Дат је квадрат $ABCD$. Нацртај праву a тако да пресек квадрата и праве буде:

а) празан; б) једна тачка; в) дуж.

41. Нацртај троугао и квадрат тако да њихов пресек буде:

а) празан скуп; б) троугао.

42. Нацртај два троугла тако да њихов пресек буде:

а) празан скуп; б) тачка; в) дуж; г) троугао.

2.6. Кружница и круг. Кружница и права

Подсетимо се појмова кружнице и круга.

Нека је дата тачка O и дуж дужине r.

Кружница или **кружна линија** је скуп свих тачака које се налазе на растојању r од тачке O.

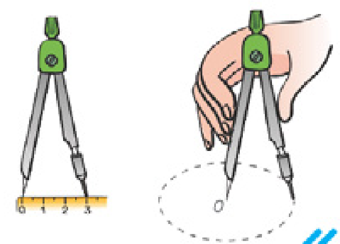
Тачка O је **центар** (средиште) кружнице, а дуж r је њен **полупречник**.

Кружницу са центром O и полупречником r означавамо $k(O, r)$ или $k(O, OM)$.

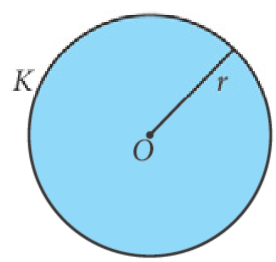
Дакле, $k(O, r) = \{M \mid OM = r\}$.

$k(O, r)$

За цртање кружнице користимо шестар.



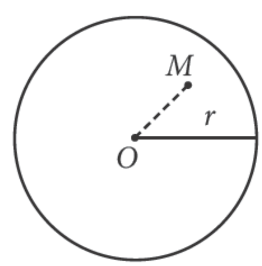
Круг (кружна површ) $K(O, r)$ са центром O и полупречником r је скуп свих тачака које припадају кружници $k(O, r)$ и свих тачака које се налазе унутар те кружнице, тј. свих тачака области ограничене кружницом $k(O, r)$.



$K(O, r) = k(O, r) \cup U$

На слици је приказана тачка M која припада унутрашњости кружнице $k(O, r)$. Тада је растојање центра кружнице и тачке M мање од r, па се за круг $K(O, r)$ може рећи:

$$K(O, r) = \{M | OM \leq r\}.$$

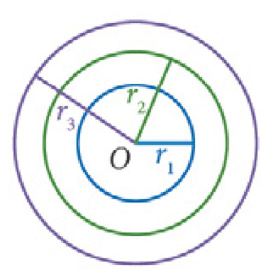


$OM < r$

Центар кружнице је истовремено и центар круга, као што је и полупречник кружнице полупречник круга.

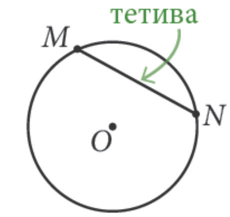
Кружнице и кругови који имају исти центар, а различите полупречнике, називају се **концентричне кружнице**, односно **концентрични кругови**.

Наведи примере настанка концентричних кругова у природи.



$r_1 < r_2 < r_3$

Нека су M и N две разне тачке кружнице $k(O,r)$. Дуж MN назива се **тетива** кружнице, али и одговарајућег круга.



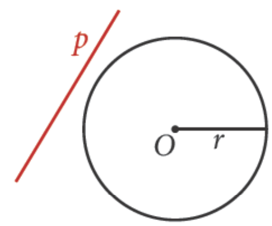
Најдужа од свих тетива једне кружнице зове се **пречник**. Пречник је два пута дужи од полупречника кружнице.

Ако је PQ пречник кружнице $k(O, r)$, тада $O \in PQ$ и $PO = OQ = r$, то је $PQ = r + r = 2r$. Дакле, пречник кружнице је два пута већи од њеног полупречника.

Однос праве и кружнице

Права са кружницом може да нема ниједну заједничку тачку и тада се кружница и права не секу.

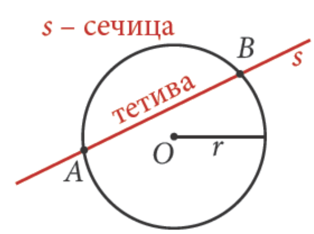
На слици видимо кружницу $k(O,r)$ и праву p ван ње. Пошто немају заједничких тачака, њихов пресек је празан скуп.



$k(O, r) \cap p = \emptyset$

Права са кружницом може да има две заједничке тачке. Права која сече кружницу зове се **сечица**, а дуж одређена тим двема тачкама назива се **тетива**.

На слици права s – сечица сече кружницу $k(O,r)$ у две тачке A и B, а дуж одређена тачкама A и B је тетива.

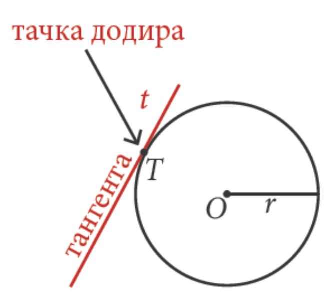


$k(O, r) \cap s = \{A, B\}$

Права са кружницом може да има једну заједничку тачку. Права која додирује кружницу у тој тачки зове се **тангента**.

тангента – реч латинског порекла и значи *додиривати*

На слици кружница $k(O,r)$ и права t – тангента се додирују, тј. пресек им је једна тачка T.

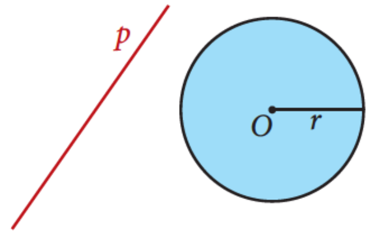


$k(O, r) \cap t = \{T\}$

Однос праве и круга

Права и круг имају исте узајамне положаје као права и кружница. Пресеци им се разликују само у случају сечице, тј. када пресек круга и сечице нису само две тачке кружнице, већ цела дуж одређена тим тачкама – тетива.

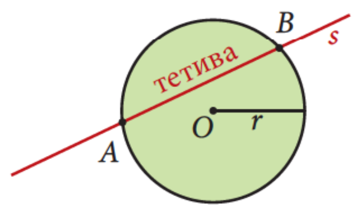
Права са кругом може да нема заједничких тачака. Тада се круг и права не секу.



$K(O, r) \cap p = \varnothing$

На слици видимо круг $K(O,r)$ и праву p ван ње. Пошто немају заједничких тачака, њихов пресек је празан скуп.

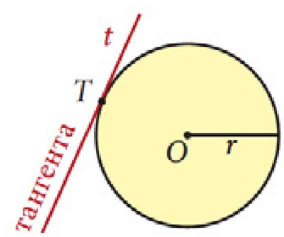
Права са кругом може да има бесконачно много заједничких тачака, тј. дуж која се зове тетива. Права која сече круг зове се **сечица**. Део сечице који припада кругу и одређен је двема тачкама A и B са кружнице, назива се **тетива**.



$K(O, r) \cap s = AB$

На слици права s – сечица сече круг $K(O,r)$ по дужи AB, а дуж одређена тачкама A и B је тетива.

Права са кругом може да има једну заједничку тачку. Права додирује круг у тој тачки и зове се **тангента**.



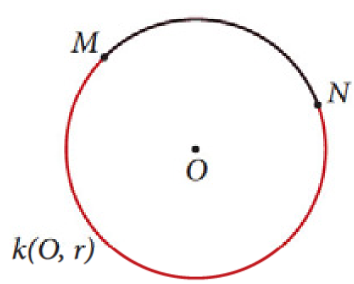
$K(O, r) \cap t = \{T\}$

На слици круг $K(O,r)$ и права t – тангента се додирују, тј. пресек им је једна тачка T.

Кружни лук и тетива

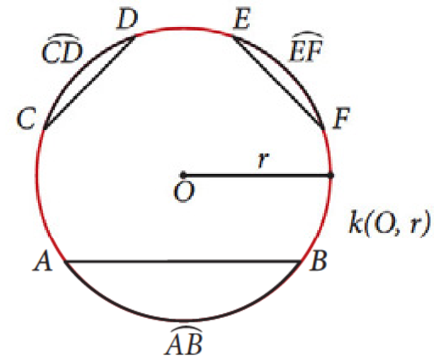
Кружни лук $\overset{\frown}{MN}$ је део кружнице који обухвата тачке M и N на кружници и све тачке кружнице између тачака M и N.

Уочимо да тачке M и N одређују два кружна лука на кружници $k(O, r)$.



ПРИМЕР 1.

На слици су дати кружни лукови $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{EF}$. Тачке A, B, C, D, E и F припадају истој кружници $k(O, r)$. Мерењем видимо да су обе тетиве CD и EF једнаке дужине, па ће и дужине њихових кружних лукова $\widehat{CD}$ и $\widehat{EF}$ бити једнаке. Међутим, тетива CD кружног лука $\widehat{CD}$ је мања по дужини од тетиве AB кружног лука $\widehat{AB}$. Тиме ће и дужина кружног лука $\widehat{CD}$ бити мања од дужине кружног лука $\widehat{AB}$.



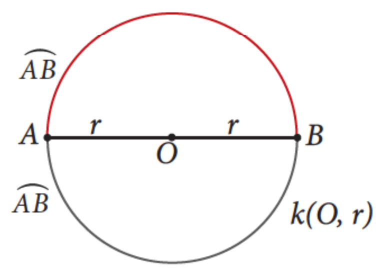
$CD < AB$ па је $\widehat{CD} < \widehat{AB}$

$CD = EF$ па је $\widehat{CD} = \widehat{EF}$

ПРИМЕР 2. Када су два кружна лука, које одређују тачке A и B, на кружници $k(O, r)$ међу собом једнака?

РЕШЕЊЕ

Ти лукови су једнаки, ако је AB пречник посматране кружнице.

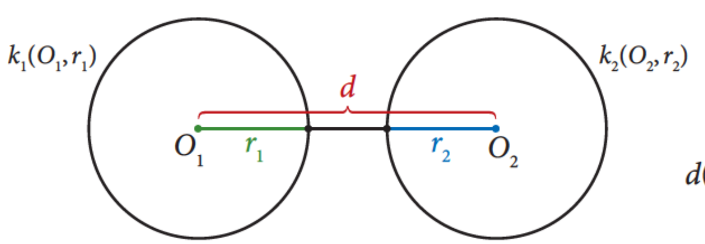


$\widehat{AB} = \widehat{AB}$

Кружни лукови над пречником су једнаки.

Однос две кружнице

Растојање између центара две кружнице или два круга назива се **централно растојање**. Централно растојање означавамо словом $\boldsymbol{d}$.

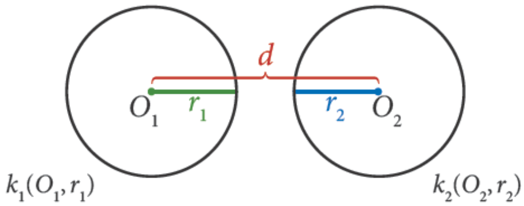


$d(O_1, O_2) = O_1O_2$

Помоћу централног растојања можемо да утврдимо у каквом све међусобном положају могу бити две кружнице или два круга.

Две кружнице могу да се:

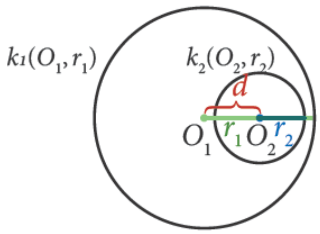
1) **не додирују споља**



Тада је централно растојање d веће од збира полупречника, а пресек кружница је празан скуп.

$d > r_1 + r_2$
$k_1(O_1, r_1) \cap k_2(O_2, r_2) = \emptyset$

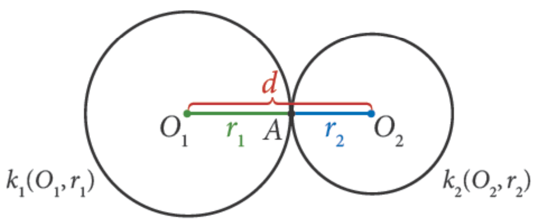
2) **не додирују изнутра**



Тада је централно растојање d мање од разлике полупречника, а пресек кружница је празан скуп.

$r_1 > r_2$
$d < r_1 - r_2$
$k_1(O_1, r_1) \cap k_2(O_2, r_2) = \emptyset$

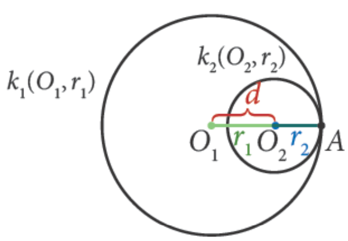
3) **додирују споља**



Тада је централно растојање d једнако збиру полупречника, а пресек кружница је тачка.

$d = r_1 + r_2$
$k_1(O_1, r_1) \cap k_2(O_2, r_2) = \{A\}$

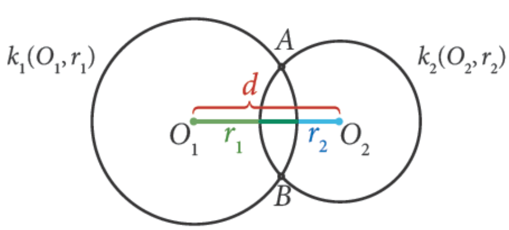
4) **додирују изнутра**



Тада је централно растојање d једнако разлици полупречника, а пресек кружница је такође тачка.

$r_1 > r_2$
$d = r_1 - r_2$
$k_1(O_1, r_1) \cap k_2(O_2, r_2) = \{A\}$

5) **секу**



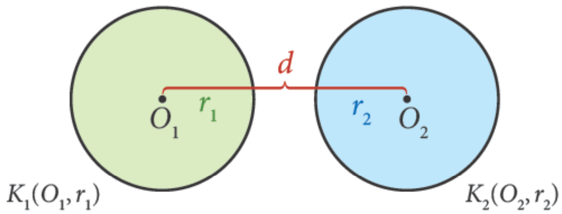
Централно растојање је мање од збира полупречника, а пресек кружница чине две тачке.

$r_1 < d < r_1 + r_2$
$r_2 < d < r_1 + r_2$
$k_1(O_1, r_1) \cap k_2(O_2, r_2) = \{A, B\}$

Однос два круга

Два круга могу да се:

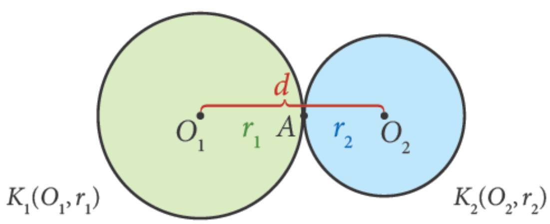
1) **не додирују споља**



Централно растојање d је веће од збира полупречника, а пресек је празан скуп.

$d > r_1 + r_2$
$K_1(O_1, r_1) \cap K_2(O_2, r_2) = \varnothing$

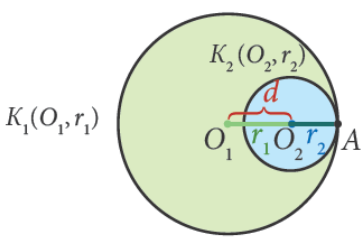
2) **додирују споља**



Централно растојање d је једнако збиру полупречника, а пресек је једна тачка.

$d = r_1 + r_2$
$K_1(O_1, r_1) \cap K_2(O_2, r_2) = \{A\}$

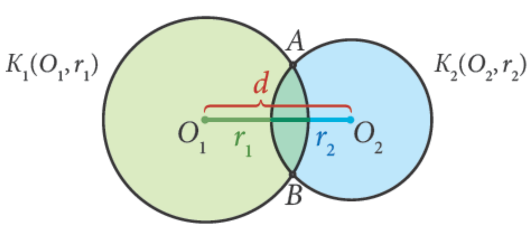
4) **додирују изнутра**



Централно растојање d једнако је разлици полупречника, а пресек је мањи круг (унија је онај већи).

$r_1 > r_2$
$d = r_1 - r_2$
$K_1(O_1, r_1) \cap K_2(O_2, r_2) = K_2(O_2, r_2)$

5) **секу**

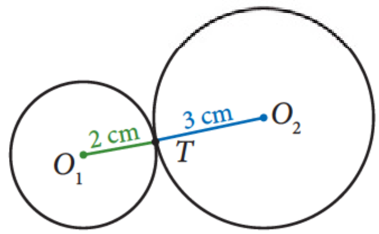


Централно растојање d је мање од збира полупречника, док је њихов пресек област између лукова ограничених тачкама A и B.

$r_1 < d < r_1 + r_2$
$r_2 < d < r_1 + r_2$
$K_1(O_1, r_1) \cap K_2(O_2, r_2) =$ 

ПРИМЕР 3. Одреди две тачке O_1 и O_2 такве да је $O_1O_2 = 5$ cm, а затим користећи шестар нацртај кружнице $k_1(O_1, 2\text{ cm})$ и $k_2(O_2, 3\text{ cm})$. Какав је међусобни однос кружница k_1 и k_2?

РЕШЕЊЕ



Кружнице k_1 и k_2 додирују се у тачки T.

Реши **тестове број 6, 7** (задаци 1, 2, 3, 5 и 6) и **8** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

43. Дате су тачке O и M. Нацртај кружницу чији је центар тачка O, а полупречник OM, а затим кружницу чији је центар тачка M, а полупречник MO.

44. Дат је круг $K(O, r)$ и права p која садржи тачку O. Шта је пресек $K \cap p$?

45. Колико једна кружница има пречника?

46. Две паралелене праве p и q налазе се на одстојању 6 cm. Колики је:
а) полупречник; б) пречник круга који додирује обе ове праве?

47. Нацртај кружнице $k_1(O, 2\text{ cm})$ и $k_2(O, 3\text{ cm})$. Шта је пресек:
а) $k_1 \cap k_2$; б) $K_1 \cap K_2$?

48. Нацртај једну кружницу и две њене тетиве AB и CD тако да:
а) се секу; б) буду паралелне;
в) нису паралелне, али немају заједничких тачака.

49. Нацртај кругове K_1 и K_2 тако да буде $K_1 \cup K_2 = K_2$.

50. Нацртај две кружнице тако да имају једну заједничку тетиву.

51.* Нацртај два круга који имају тачно једну заједничку тачку. Колико ова два круга имају заједничких тангенти?

52. На кружници означи три разне тачке. Колико ове тачке одређују лукова?

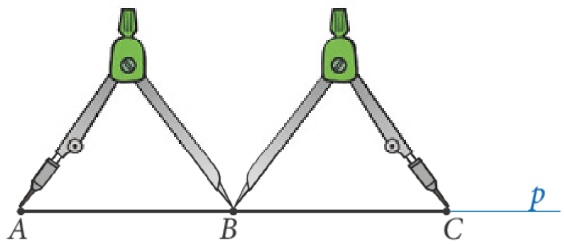
53. Нацртај две произвољне кружнице, па конструктивно одреди збир и разлику њихових полупречника.

54. Нацртај једну кружницу и две њене тетиве. Конструктивно одреди збир и разлику тих тетива.

2.7. Централна симетрија

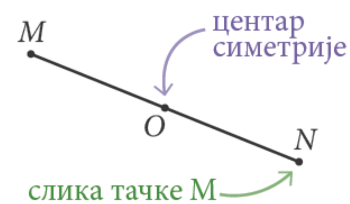
ПРИМЕР 1. Дата је дуж AB. На полуправој Ap (продужетак дужи AB), користећи шестар конструишемо тачку C, тако да је $AB = BC$.

» **симетрија** – реч грчког порекла и значи складност, слагање



Тачке A и C су **централносиметричне** у односу на тачку B, ако је тачка B средиште дужи AC.

Нека је дата тачка O у равни. **Централна симетрија** пресликава произвољну тачку M у тачку N тако да је $MO = ON$ и тачка O је средиште дужи MN. Тачка O се назива **центар симетрије**, а тачка N се назива **сликом** тачке M у овој централној симетрији.



Централна симетрија је геометријско пресликавање којим се свака тачка пресликава у себи симетричну у односу на неку унапред задату тачку – **центар симетрије**.

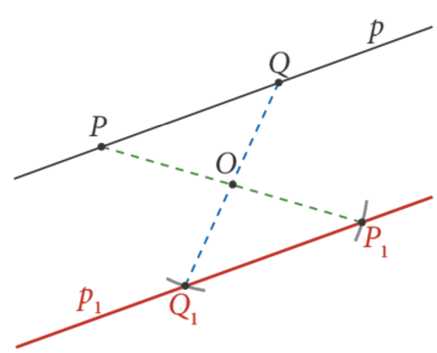
ПРИМЕР 2. Пресликати централном симетријом праву p, ако центар симетрије O не припада правој p.

РЕШЕЊЕ

Да бисмо одредили слику праве p, потребно је да на правој уочимо две произвољне тачке, на пример P и Q, јер знамо да је свака права јединствено одређена двема различитим тачкама.

Те две тачке пресликавамо централном симетријом. Тачка P ће се пресликати у тачку P_1, а тачка Q у тачку Q_1 у односу на центар симетрије тачку O која не припада правој p.

Добијене тачке P_1 и Q_1 одређују нову праву p_1 која је централносиметрична правој p. Видимо да тачке P_1 и Q_1, које су слике тачака P и Q, одређују праву p_1 као слику праве p.



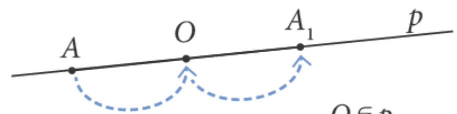
$P, Q \in p$
$O \notin p$
$PO = OP_1$
$QO = OQ_1$

Ако права не садржи центар симетрије, онда се она централном симетријом пресликава у паралелну праву.

ПРИМЕР 3. Пресликати централном симетријом праву p тако да центар симетрије O припада правој p.

РЕШЕЊЕ

Овде се права p пресликава у саму себе.

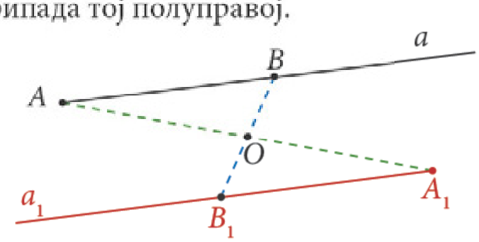


$O \in p$
$A, A_1 \in p$
$AO = OA_1$

Ако центар симетрије припада правој, онда се она пресликава у саму себе, тј. у праву која се поклапа са њом.

ПРИМЕР 4. Пресликати централном симетријом полуправу Aa, ако центар симетрије O не припада тој полуправој.

РЕШЕЊЕ



$O \notin Aa$
$B \in Aa$
$AO = OA_1$
$BO = OB_1$
$B_1 \in p(A_1a_1)$

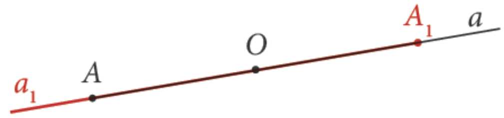
За пресликавање полуправе користимо њену почетну тачку A и још једну њену произвољну тачку B. Тачка A се пресликава у тачку A_1, а тачка B у тачку B_1. Ове две нове тачке одређују полуправу A_1a_1 са почетком у тачки A_1.

Ако полуправа не садржи центар симетрије, онда се она пресликава у себи паралелну полуправу.

ПРИМЕР 5. Пресликати централном симетријом полуправу Aa, ако центар симетрије O припада тој полуправој.

РЕШЕЊЕ

Када тачка O – центар симетрије, припада полуправој, тада се почетак полуправе A пресликава у тачку A_1 која такође припада почетној полуправој. Такође, и све тачке полуправе пресликавају се у тачке исте полуправе само са друге стране тачке O.

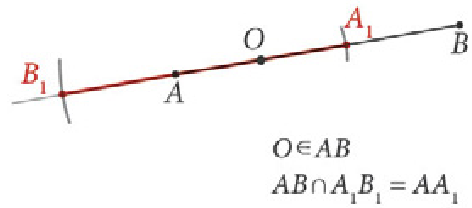


$O \in Aa$
$AO = OA_1$
$A_1 \in Aa$

ПРИМЕР 6. Пресликати централном симетријом дуж AB у односу на тачку O која припада дужи AB.

РЕШЕЊЕ

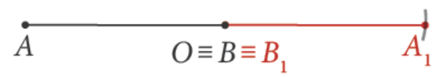
Централном симетријом тачка A пресликава се у тачку A_1, а тачка B у тачку B_1. Дуж одређена тачкама A_1 и B_1 поклапаће се са дужи AB у делу AA_1, где је центар симетрије O средиште дужи AA_1. Стога, обе дужи припадају истој правој.



ПРИМЕР 7. Пресликати дуж AB у односу на тачку O која се поклапа са једним њеним теменом.

РЕШЕЊЕ

Пошто се центар симетрије O поклапа са тачком B, онда је растојање тачке B од центра O једнако нули, тј. нема га, па ће и растојање слике тачке B – тачка B_1, од центра бити такође једнако нули.



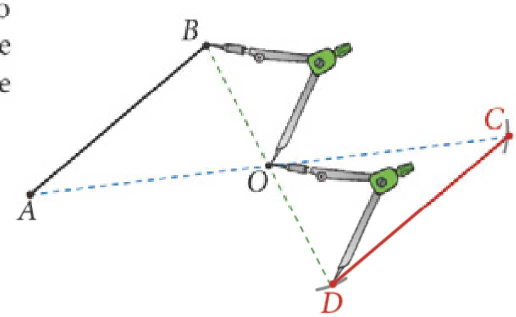
Тачка B се поклапа са центром O и својом сликом B_1.

Тачка A се пресликава у односу на центар O у тачку A_1, па ће бити: $AO = OA_1 = AB = B_1A_1$.

ПРИМЕР 8. Пресликати дуж AB централном симетријом у односу на тачку O која не припада тој дужи.

РЕШЕЊЕ

Одредимо тачке C и D централносиметричне тачкама A и B у односу на тачку O. Кажемо да су дужи AB и CD централносиметричне у односу на тачку O. Приметимо да су те две дужи једнаке.

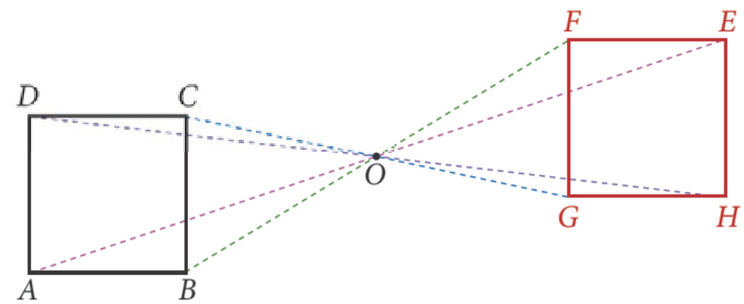


Дуж се централном симетријом пресликава у паралелну и једнаку дуж.

ПРИМЕР 9. Нацртај квадрат централносиметричан датом квадрату $ABCD$ у односу на дату тачку O која се налази изван квадрата.

РЕШЕЊЕ

Применом шестара и лењира конструишемо тачке E, F, G и H које су централносиметричне тачкама A, B, C и D редом у односу на тачку O.

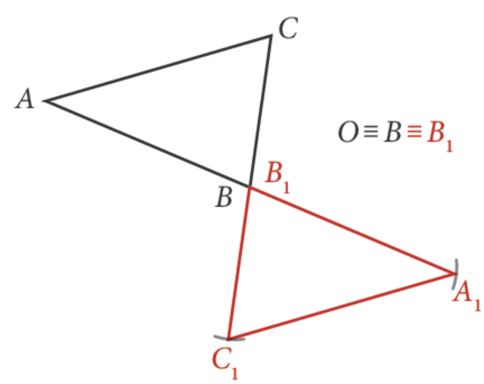


Квадрат $EFGH$ је централносиметричан квадрату $ABCD$.

ПРИМЕР 10. Пресликати троугао ABC у односу на тачку O која се поклапа са једним његовим теменом.

РЕШЕЊЕ

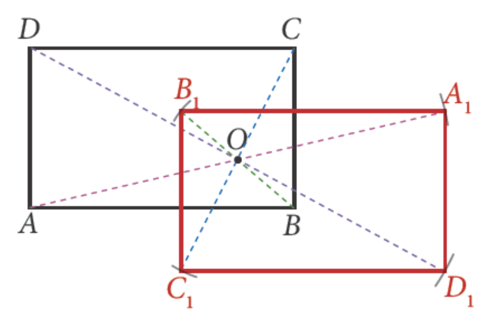
Нека се тачка B поклапа са центром симетрије O. Раније смо видели да се тада таква тачка пресликава у саму себе, тј. тачка B ће се поклапати са B_1 и са O. Међутим, остала темена се пресликавају сходно свом положају. Тачка A се пресликава у тачку A_1, а тачка C у тачку C_1. Ове три нове тачке A_1, B_1 и C_1 одређују нов троугао $A_1B_1C_1$ који је централносиметрична слика троугла ABC у односу на центар симетрије O.



ПРИМЕР 11. Пресликај правоугаоник $ABCD$ у односу на тачку O која припада његовој унутрашњости.

РЕШЕЊЕ

Тачке A, B, C, D пресликавају се централном симетријом у односу на тачку O у тачке A_1, B_1, C_1, D_1. Оне чине темена централносиметричног правоугаоника $A_1B_1C_1D_1$ датом правоугаонику $ABCD$.

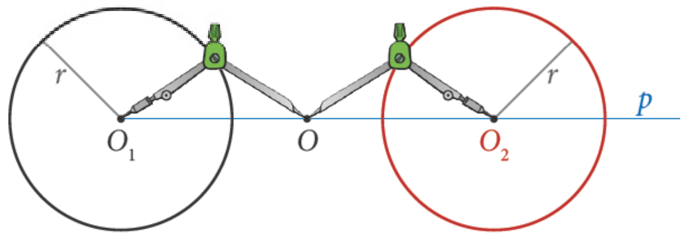


Централном симетријом фигура се пресликава у подударну фигуру – дуж у једнаку дуж, троугао у подударан троугао, квадрат у подударан квадрат, итд.

ПРИМЕР 12. Нацртај кружницу централносиметричну датој кружници $k(O_1, r)$ у односу на дату тачку O.

РЕШЕЊЕ

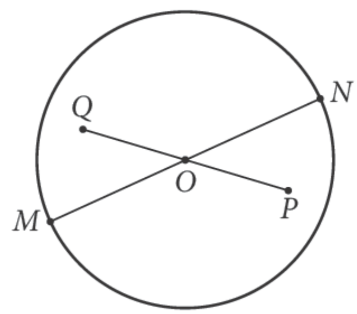
Најпре на полуправој O_1p (продужетак дужи O_1O) одредимо тачку O_2 централносиметричну тачки O_1 у односу на тачку O. Затим, конструишемо кружницу $k(O_2, r)$ истог полупречника као кружница k_1. Кружница k_2 је централносиметрична слика кружнице k_1 у односу на тачку O.



За једну фигуру се каже да је централносиметрична, ако се централном симетријом у односу на неку тачку O пресликава у саму себе. За тачку O тада кажемо да је центар симетрије те фигуре.

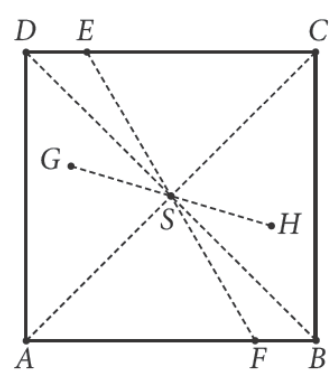
На пример, круг и квадрат су централносиметричне фигуре.

Центар симетрије круга на слици је тачка O – центар круга. Свака тачка круга има слику симетричну у односу на O која припада кругу.



Свака тачка кружнице се симетријом у односу на центар O пресликава у тачку на кружници са којом одређује пречник кружнице. На пример, тачка M и њена слика N, симетрична у односу на центар O, одређују пречник MN.

Центар симетрије квадрата $ABCD$ на слици је тачка S – пресек његових дијагонала AC и BD, тј. дужи које спајају његова наспрамна темена. Свака тачка квадрата има слику симетричну у односу на центар S која припада квадрату. Тачка G се симетријом у односу S слика у тачку H, теме A се пресликава у C, а C у A, итд.



Све примере у лекцији уради користећи алат на сајту:

www.geogebra.org

ЗАДАЦИ

55. Нацртај кружницу $k(O, 3\text{ cm})$ и:

а) на њој изабери тачку M, а затим одреди тачку N централносиметричну тачки M у односу на тачку O. Шта је за кружницу k дуж MN?

б) на кругу K нацртај произвољну тетиву AB и њој централносиметричну тетиву CD у односу на тачку O. Какав четвороугао је $ABCD$?

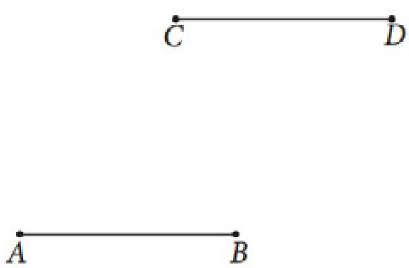
56. Нацртај задату фигуру и њој централносиметричну фигуру у односу на тачку B:

а) троугао ABC; б) правоугаоник $ABCD$.

57.* Нацртај произвољни паралелограм $ABCD$ и одреди тачку O – пресек дужи AC и BD. Затим на дужи AB изабери неку тачку E и конструиши њој централносиметричну тачку F у односу на тачку O. Којој дужи припада тачка F?

58. Да ли су приказане дужи AB и CD централносиметричне? Ако јесу, одреди центар те симетрије.

а)



б)

59. Нека су A, B и C три разне тачке. Пресликај тачку A централном симетријом у односу на тачку B, а затим добијену слику централносиметрично у односу на тачку C.

60. Нацртај два круга и пресликај један од њих централном симетријом у односу на центар другог и други централном симетријом у односу на центар првог.

61. Нацртај две дужи које се секу и сваку од њих пресликај централном симетријом у односу на ту пресечну тачку.

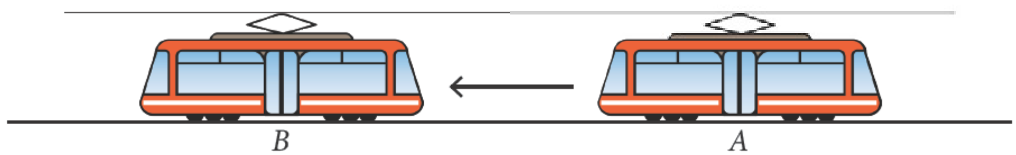
62. Да ли је правоугаоник $ABCD$ централносиметрична фигура? Ако јесте, која тачка је центар симетрије?

63. Нека тачка O припада правој p. Шта је централносиметрична слика праве p у односу на тачку O?

64. Колико центара симетрије има фигура која се састоји од две паралелне праве?

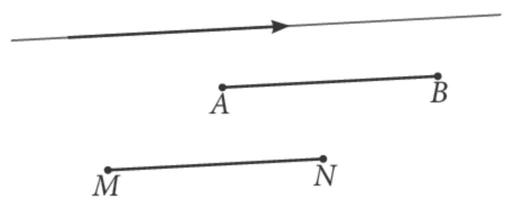
2.8. Вектор и транслација

У свакодневном животу честа су праволинијска кретања, такозвана паралелена померања. На пример, трамвај се креће по шинама и за извесно време помери се из положаја A у положај B. За ово кретање су значајни правац, смер (на правцу) и брзина (интензитет) кретања. Свака тачка на трамвају помериће се паралелно правој одређеној шинама у одређеном смеру и за дужину која зависи од брзине и времена кретања.



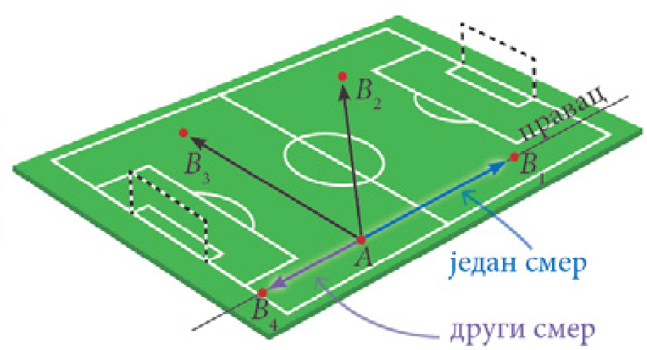
Замислимо да је дата тачка A, права p која одређује правац кретања и на којој је одређен један од два могућа смера кретања, као и дуж MN. Померање тачке A у правцу праве p и назначеном смеру на њој тако да се добије тачка B, при чему су дужи AB и MN једнаке, назива се **транслација** или **паралелно померање**.

» Транслација – реч латинског порекла и значи пренос



ПРИМЕР 1.

Нека је фудбалска лопта модел за тачку. Фудбалер из тачке А шутира по земљи у неком од праваца за одређену дужину и смер. Ово кретање је такође транслација.

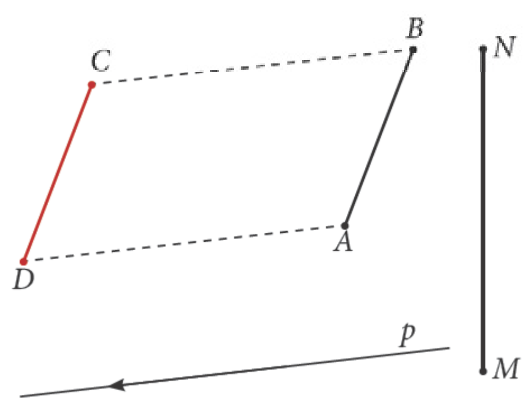


ПРИМЕР 2.

Транслирајмо дуж AB у правцу праве p у назначеном смеру и за дату дуж MN.

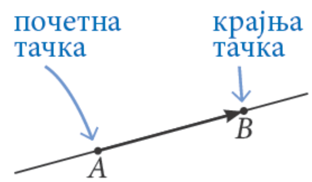
Видимо да се тачка B пресликава у тачку C, а тачка A у тачку D, тако да је $BC = AD = MN$, $BC \| p$ и $AD \| p$. При томе су дужи BC и AD усмерене у истом смеру, одређеном на правој p.

Због тога је четвороугао $ABCD$ паралелограм – фигура о којој ћемо говорити касније. Можемо да закључимо да се дуж AB пресликава у паралелну и једнаку дуж DC.



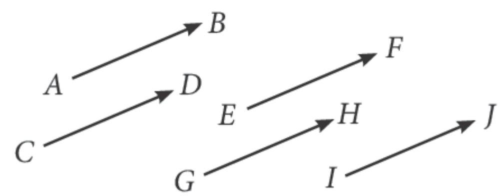
Да бисмо прецизније објаснили транслацију, увешћемо појам вектора (усмерене дужи).

Нека су дате две разне тачке A и B. На правој које оне одређују одаберемо један од два могућа смера, на пример, од тачке A ка тачки B. На овај начин добијамо **оријентисану** (**усмерену**) дуж AB. Њен правац је правац праве $p(AB)$, одређене тачкама A и B, смер је од A ка B, а дужина је једнака дужини дужи AB. На овај начин дефинисану дуж означавамо са $\overrightarrow{AB}$ и називамо вектор $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$.



Вектор $\overrightarrow{AB}$ одређен је правцем, смером и интензитетом. Његов правац је правац праве одређене тачкама A и B, смер је од тачке A ка тачки B, а интезитет је дужина дужи AB. Тачку A називамо почетном, а тачку B крајњом тачком вектора $\overrightarrow{AB}$.

На слици је приказано неколико једнаких вектора. Праве којима они припадају су паралелне, па се каже да имају исти правац.

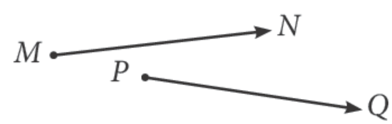


Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су **једнаки** и то пишемо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако имају исти правац, исти смер и исту дужину (интензитет).

ПРИМЕР 3.

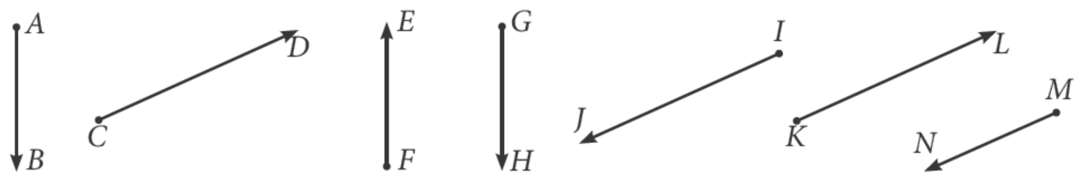
Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ нису једнаки. Они имају исти правац и исту дужину, али супротне смерове.

Вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ имају исте дужине, али различите правце, па су и они различити.



Најзад, вектори $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ имају исти правац и смер али различите дужине, због чега нису једнаки.

ПРИМЕР 4. На слици је приказано неколико вектора. Који од њих су једнаки?



РЕШЕЊЕ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KL}$.

Сада прецизније можемо да кажемо да је транслација за дати вектор $\overrightarrow{MN}$ пресликавање које сваку тачку A пресликава у тачку B тако да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

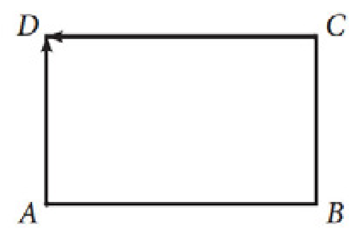
Транслација је геометријско пресликавање којим се свака тачка пресликава у одговарајућу тачку паралелним померањем за неки унапред задати вектор.

ПРИМЕР 5.

Дат је правоугаоник $ABCD$. У коју дуж се пресликава:

а) дуж AB транслацијом за $\overrightarrow{AD}$?

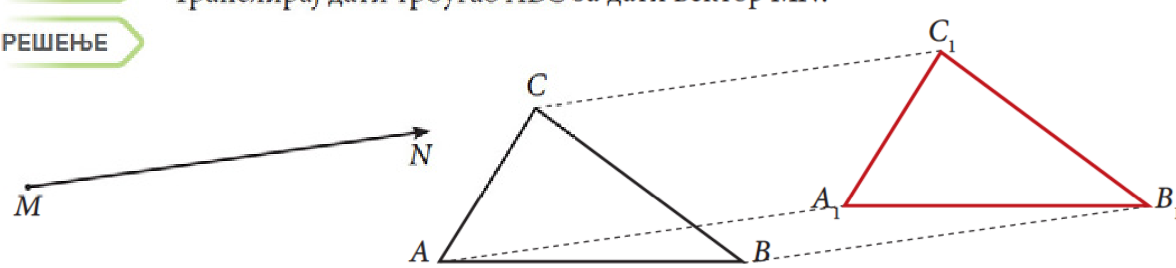
б) дуж BC транслацијом за $\overrightarrow{CD}$?



РЕШЕЊЕ а) DC; б) AD.

ПРИМЕР 6. Транслирај дати троугао ABC за дати вектор $\overrightarrow{MN}$.

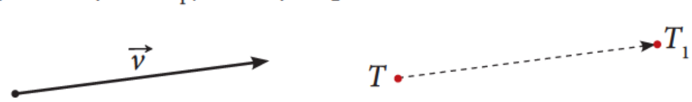
РЕШЕЊЕ



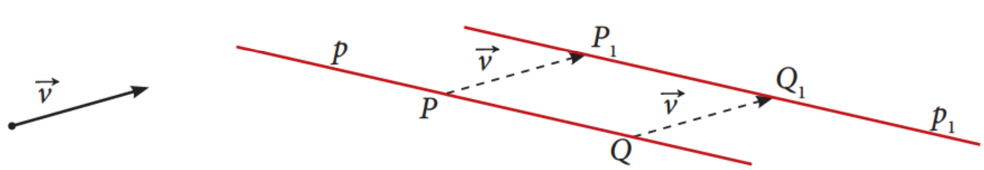
На слици се види да је: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{MN}$.

Особине транслације

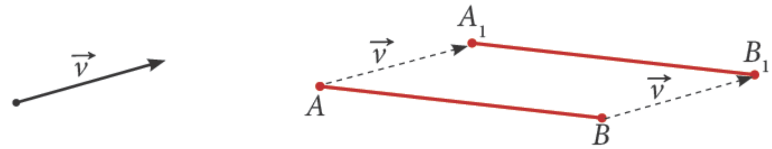
Пошто се тачка T пресликава транслацијом у тачку T_1, онда је дужина дужи TT_1 једнака дужини вектора $\vec{v}$ и дуж TT_1 је њему паралелна.



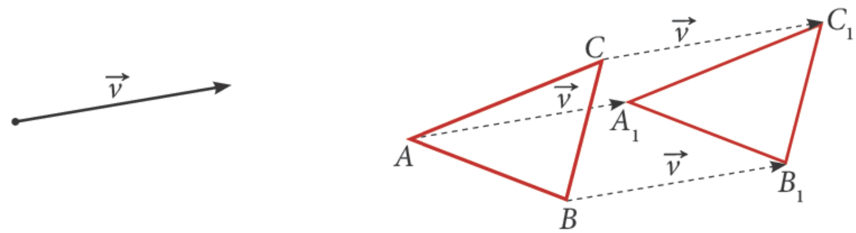
Када неку праву транслацијом пресликавамо за неки вектор, заправо транслирамо две њене произвољне тачке, јер знамо да је свака права јединствено њима одређена. На правој p тачке P и Q транслирамо за вектор $\vec{v}$. Транслацијом ћемо тачку P пресликати у P_1 а тачку Q у Q_1 и тада ће бити $\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{QQ_1} = \vec{v}$. Тачке P_1 и Q_1 одређују нову праву p_1 насталу транслацијом праве p за вектор $\vec{v}$. Обе праве су међусобно паралелне.



Дуж се транслацијом пресликава у дуж, паралелну и исте дужине. Наиме, транслирамо њене крајње тачке A и B које се за вектор $\vec{v}$ пресликавају редом у тачке A_1 и B_1 и оне одређују дуж A_1B_1 – слику дужи AB.



Троугао ABC транслирамо за неки вектор тако што пресликавамо његова темена A, B и C. Тачка A се пресликава у тачку A_1, тачка B у тачку B_1, а тачка C у C_1. Ове три нове тачке су темена троугла $A_1B_1C_1$ који је слика троугла ABC при транслацији за дати вектор. Дужи AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 су међусобно паралелне, а дужине AA_1, BB_1 и CC_1 су једнаке интензитету вектора $\vec{v}$.



Паралелограм

Четири праве $a \parallel b$, $c \parallel d$ ограничавају област у равни – четвороугао који се зове паралелограм**.**

Тачке A, B, C, D су **темена паралелограма**.
Дужи AB, BC, CD, DA су странице паралелограма.

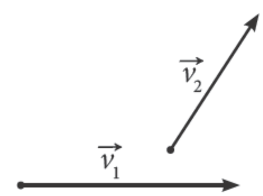
Две странице које имају заједничко теме су **суседне странице**: AB и BC, AB и AD, BC и CD, AD и DC.

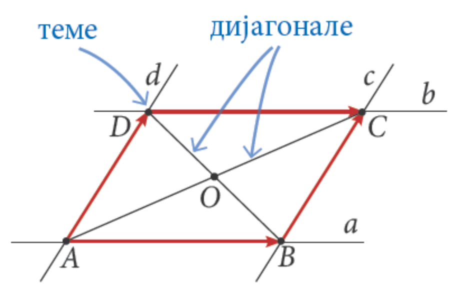
Две странице које се налазе на паралелним правама су **наспрамне**: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Темена која припадају истој страници су **суседна**: A и B, A и D, D и C, B и C.

Темена која не прпадају истој страници су **наспрамна темена**: A и C, B и D.

Дужи које спајају наспрамна темена зову се **дијагонале паралелограма**: AC и BD.





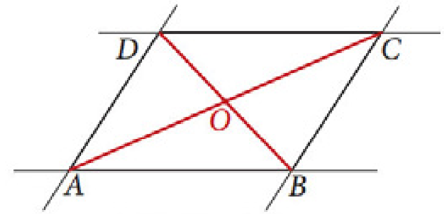
$a \parallel b$, $c \parallel d$,
$a \cap d = \{A\}$, $a \cap c = \{B\}$, $b \cap c = \{C\}$, $b \cap d = \{D\}$

Ако су наспрамне странице четвороугла паралелне и једнаке, онда је тај четвороугао **паралелограм**.

$AB \parallel CD$, $\vec{AB} = \vec{DC}$ $\quad$ $BC \parallel AD$, $\vec{BC} = \vec{AD}$

» **Паралелограм** – потиче од грчких речи и значи облик паралелних линија

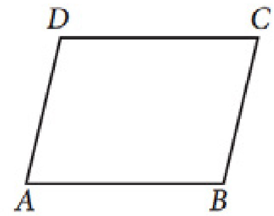
Дијагонале AC и BD секу се у тачки O. Дужине дужи AO и OC су једнаке међусобно као и дужине дужи BO и OD. Заправо, тачка O је средиште дужи AC и BD.



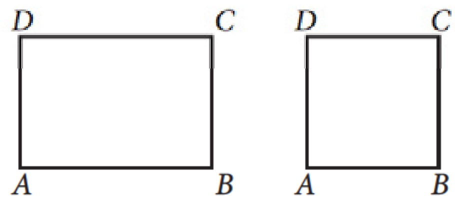
$AC \cap BD = \{O\}$
$AO = OC$
$BO = OD$

Дијагонале паралелограма се полове. Зато је паралелограм **централносиметрична** фигура.

Произвољни паралелограм $ABCD$ је централносиметрична фигура. Центар симетрије је тачка O, пресек дужи AC и BD. Одавде закључујемо да за паралелограм важи, не само да су наспрамне странице BC и AD паралелне, него да су и једнаке ($AB = CD$ и $BC = AD$).



Нека су дате паралелне дужи AB и CD, при чему су и дужи BC и AD такође паралелне. Паралелограм $ABCD$ је унија дужи AB, BC, CD и DA, као и свих тачака области која је ограничена овим дужима. Приметимо да су правоугаоник и квадрат паралелограми.



Све примере у лекцији уради користећи алат на сајту:
www.geogebra.org

ЗАДАЦИ

65. Дат је квадрат $ABCD$. Које од следећих реченица су тачне:
а) $\vec{AB} = \vec{DC}$; б) $\vec{BC} = \vec{DA}$; в) $\vec{AC} = \vec{BD}$; г) $\vec{DA} = \vec{CB}$.

66. Транслирај дати квадрат $ABCD$ за дати вектор $\vec{MN}$.

67. Транслирај дату кружницу $k(O,r)$ за вектор $\vec{MN}$ чија је дужина једнака полупречнику кружнице.

68. Пресликај дати правоугаоник $ABCD$ за вектор: а) $\vec{AB}$; б) $\vec{DA}$.

69. Нека су A и B две разне тачке. Да ли су вектори $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$ једнаки или различити?

70. Дата је дуж AB и тачка S која припада тој дужи и једнако је удаљена од њених крајева. Посматрај векторе: $\vec{AS}$, $\vec{BS}$, $\vec{SB}$ и $\vec{SA}$. Који од њих су међусобно једнаки?

71. Транслирај дати вектор $\vec{AB}$ за дати вектор $\vec{MN}$.

72. Пресликај произвољан троугао PRQ транслацијом за вектор $\vec{PQ}$.

73. Транслирај дати правоугаоник $ABCD$ најпре за вектор $\vec{AC}$, а затим за $\vec{BD}$.

74.* Дате су тачке M, N, A и S. Транслирај тачку A за вектор $\vec{MN}$, а затим добијену слику тачке A пресликај централносиметрично у односу на тачку S.

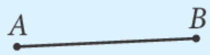
РАЗНИ ЗАДАЦИ

75. (1) На слици је приказана:

а) права AB;

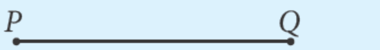
б) дуж AB;

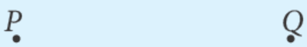
в) полуправа $\overline{AB}$.

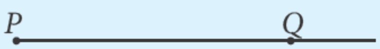


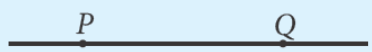
(Заокружи слово испред тачног одговора.)

(2) На којој слици је приказана полуправа $\overline{PQ}$?

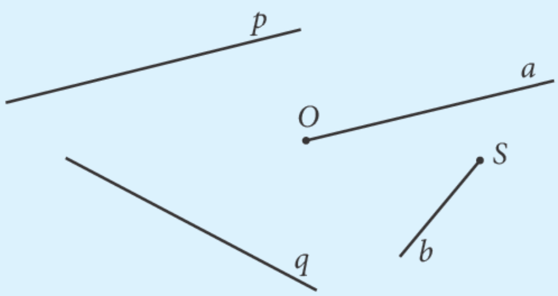
а) 

б) 

в) 

г) 

76. На слици су приказане праве p и q и полуправе Oa и Sb. Који од следећих исказа је тачан:



а) праве p и q се секу;

б) праве p и q немају заједничких тачака;

в) полуправа Sb сече праву q;

г) полуправа Oa сече праву q;

д) полуправе Oa и Sb се секу;

ђ) полуправа Sb сече праву p.

(Заокружи слова испред тачних исказа.)

77. Нацртај дуж MN и једну тачку A која припада тој дужи и једну тачку B која јој не припада.

78. Нацртај четири тачке: A, B, C и D, а затим праве $p(A, B)$ и $q(B, C)$ и дужи AD и CD.

79. Нацртај три полуправе са заједничком почетном тачком и означи их.

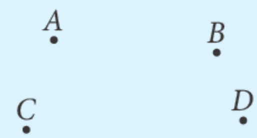
80. Нацртај две праве p и q које се секу у тачки A и још две полуправе чија је A почетна тачка.

81. Дате су тачке A, B, C и D као на слици. Прецртај слику у своју свеску и нацртај:

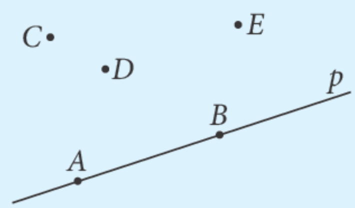
а) праву $p(A, B)$;

б) дуж BC;

в) полуправу $\overline{AD}$.



82. На правој p дате су тачке A и B, а ван те праве тачке C, D и E (в. слику). Колико је овим тачкама одређено: а) правих; б) дужи?



83. На правој p дате су четири тачке: A, B, C и D. Колико те тачке одређују:

а) правих;

б) дужи?

84. Дате су две паралелне праве a и b, на правој a тачке A и B, а на правој b тачке C, D и E. Колико:

а) правих;

б) дужи одређују тачке A, B, C, D и E?

85. Шта може да буде пресек две дужи? Све случајеве скицирај.

86. Нацртај два:

а) квадрата чија је унија правоугаоник;

б) троугла чија је унија квадрат.

87. Нацртај два:

а) правоугаоника чији је пресек квадрат;

б) квадрата чији је пресек троугао.

88. Нацртај два квадрата тако да њихов пресек буде:

а) квадрат;
б) правоугаоник са различитим страницама;
в) дуж;
г) тачка.

89. Дата је права a и тачке $A \in a$ и $B \notin a$. Нацртај праву b тако да $B \in b$ и:

а) $a \cap b = \varnothing$; б) $a \cap b = \{A\}$.

90. На правој p дате су редом тачке A, B, C и D. Одреди:

а) $AB \cup CD$;
б) $AB \cap CD$;
в) $AB \cup BC$;
г) $(BC \cup CD) \setminus AC$;
д) $(AB \cup BC) \setminus AD$.

91. Нацртај две дужи AB и CD тако да:

а) пресек $AB \cap CD$ буде дуж;
б) разлика $AB \setminus CD$ буде дуж.

92. Нацртај две полуправе Op и Sq тако да:

а) њихов пресек буде тачка;
б) њихов пресек буде дуж;
в) њихов пресек буде празан скуп;
г) њихова унија буде права.

93. Нацртај праве p и q које се секу у тачки A и праву r која не садржи тачку A, а затим праву s која садржи тачку A и паралелна је правој r.

94. Нацртај четири праве p, q, r и s тако да буде:

а) $p \parallel q$, $q \parallel r$ и права s сече праве p, q и r;
б) $p \parallel q$, $r \parallel s$ и права q сече праву r.

95. Нацртај правоугаоник $ABCD$, а затим измери дужине његових страница. Које од страница AB, BC, CD и DA су међу собом једнаке?

96. Дужине дужи AB, CD, EF и GH су: $AB = 275$ mm, $CD = 28$ cm, $EF = 280$ mm и $GH = 3$ dm. Која од ових дужи је:

а) најкраћа;
б) најдужа;
в) које две дужи су једнаке?

97. Изрази дужине следећих дужи у милиметрима:

$AB = 2$ m 5 dm 7 cm, $CD = 17$ dm 17 cm,
$EF = 342$ cm.

98. Изрази дужине следећих дужи у центиметрима:

$AB = 1$ m 3 dm 2 cm,
$CD = 1$ km 5 m,
$EF = 13$ dm 13 cm.

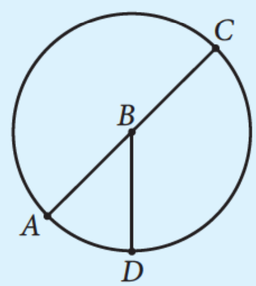
99. Нацртај произвољну дуж MN, а затим дуж AB тако да је:

а) $AB = 3 \cdot MN$;
б) $AB = 5 \cdot MN$.

100. Нацртај дуж $MN = 6\,\text{cm}$, а затим дуж AB која је два пута краћа од дужи MN и дуж CD која је за трећину краћа од дужи MN.

101. На слици је приказан један круг.

а) Којим словом је означен центар круга?
б) Шта дуж AC представља за круг?
в) Које дужи на слици су полупречници круга на слици?



102. Нацртај кружницу $k(S, 3\,\text{cm})$ и одреди тачку $M \in k$. Конструиши најдужу тетиву кружнице k која садржи тачку M.

103. Нацртај круг $K(O, 2\,\text{cm})$ и тачке M, N и P тако да је $OM = 1$ cm, $ON = 2$ cm и $OP = 3$ cm. Која од тачака M, N и P:

а) припада кружници $k(O, 2\,\text{cm})$;
б) припада кругу $K(O, 2\,\text{cm})$;
в) не припада кругу $K(O, 2\,\text{cm})$?

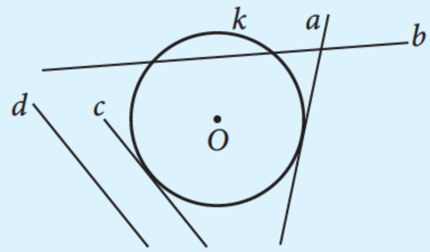
104. Нацртај једну кружницу и:

а) две њене једнаке тетиве AB и CD;
б) тетиву EF која је дужа од тетиве AB.

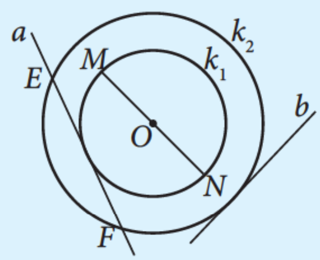
105. Нацртај круг $K(O, 3\,\text{cm})$ и једну његову тетиву дужине 2 cm, а другу дужине 4 cm.

106. На слици су приказане кружница $k(O, r)$ и праве a, b, c и d. Које од ових правих су:

а) тангенте кружнице k;
б) сечице кружнице k;
в) немају са кружницом k заједничких тачака?



107. На слици су приказане две кружнице $k_1(O, R)$ и $k_2(O, r)$. Које од следећих реченица су тачне?



а) Права a је тангента кружнице k_1 и сечица кружнице k_2.
б) Права b је тангента кружнице k_2.
в) Права b је тангента кружнице k_1.
г) Дуж MN је тетива кружнице k_2.
д) Дуж MN је пречник кружнице k_1.
ђ) Кружнице k_1 и k_2 су концентричне.
е) Дуж EF је тетива кружнице k_1.

108. Нацртај произвољну кружницу $k(O, r)$ и на њој уочи тачке P, Q и R. Нацртај затим сечицу која садржи тачке P и Q, полупречник OR, тетиву PR и тангенту кружнице у тачки P.

109. Нацртај квадрат $ABCD$ странице дужине 3 cm, а затим кружницу $k(A, 3\,\text{cm})$. Које странице квадрата припадају тангентама кружнице k?

110. Нацртај две кружнице које:

а) немају заједничких тачака;
б) секу се у двема тачкама;
в) додирују се споља;
г) додирују се изнутра.

111. Нацртај кружницу $k(O, 2\,\text{cm})$ и тачку A ван те кружнице. Одреди затим тачке M и N на кружници, тако да дуж AM буде најкраћа, а дуж AN најдужа од свих могућих дужи чији је један крај тачка A, а други припада кружници.

112. Конструиши две кружнице $k_1(O, 3\,\text{cm})$ и $k_2(S, 2\,\text{cm})$ тако да је њихово централно растојање (дуж OS) једнако:

а) 6 cm; б) 5 cm;
в) 4 cm; г) 1 cm;
д) 0 cm.

У сваком примеру запиши у ком међусобном положају су кружнице k_1 и k_2.

113. Дата је дуж:

а) $AB = 3$ cm; б) $AB = 1$ cm.

Нацртај кругове $K_1(A, 2\,\text{cm})$ и $K_2(B, 1\,\text{cm})$. У каквом су они међусобном положају? Шта је $K_1 \cap K_2$?

114. Кружнице $k_1(O_1, 15\,\text{mm})$ и $k_2(O_2, 20\,\text{mm})$ додирују се:

а) споља; б) изнутра.

Колико је растојање њихових центара (дужина дужи O_1O_2)?

115. Нацртај дуж $OS = 4\,\text{cm}$ и кружнице $k_1(O, 3\,\text{cm})$ и $k_2(S, 2\,\text{cm})$. Означи тачке у којима се ове кружнице секу.

116. Дате су тачке O и S такве да је $OS = 3\,\text{cm}$. Нацртај кругове $K_1(O, 2\,\text{cm})$ и $K_2(S, 2\,\text{cm})$ и осенчи скупове:

а) $K_1 \cap K_2$; б) $K_1 \cup K_2$;
в) $K_1 \setminus K_2$.

117. Нацртај три концентрична круга $K_1(O, 2\,\text{cm})$, $K_2(O, 3\,\text{cm})$ и $K_3(O, 4\,\text{cm})$, а онда осенчи скуп $(K_3 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1)$.

118. Кружница $k(O, r)$ сече круг $K(S, R)$. Која фигура се добија у пресеку $k \cap K$?

119.* Конструиши кружницу чији центар припада датој правој a и дату праву b додирује у датој тачки B. Када задатак нема решења?

120. Нацртај правоугаоник $ABCD$ чија је дужина 3 cm, а ширина 2 cm. Коришћењем шестара и лењира надовежи све странице правоугаоника на једну дуж. Колики је обим овог правоугаоника?

121. Нацртај дуж $MN = 2$ cm, а затим дуж PQ која је два пута дужа. Надовежи дуж MN на дуж PQ. Колика је дужина дужи $MN + PQ$?

122. Нацртај произвољну дуж AB и ван ње тачку O. Централном симетријом у односу на тачку O пресликај:

а) тачку A; б) тачку B; в) дуж AB.

123. Дата је кружница $k(O, r)$ и тачка S у њеној унутрашњости. Одреди кружницу k_1 која је централносиметрична слика кружнице k у односу на тачку S.

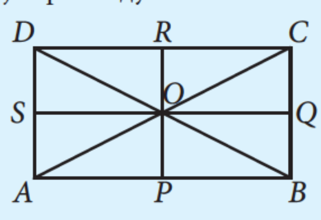
124. Нацртај произвољан квадрат $ABCD$ и његову централносиметричну слику у односу на тачку C.

125. Нацртај произвољан правоугаоник $ABCD$ и одреди тачку O у његовој унутрашњости. Нацртај затим правоугаоник централносиметричан правоугаонику $ABCD$ у односу на тачку O.

126. Колико центара симетрије има фигура која се састоји од:

а) две праве које се секу?
б) две паралелне праве?

127. У правоугаонику $ABCD$ тачке P, Q, R и S су редом средишта страница AB, BC, CD и DA, а тачка O је пресек дужи AC и BD.



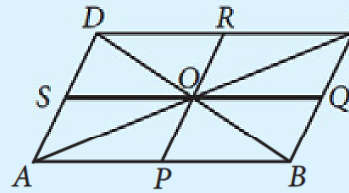
1) Које дужи су централносиметричне у односу на тачку O дужима:

а) AP; б) SO; в) BO; г) SD?

2) Одреди правоугаонике централносиметричне у односу на тачку O правоугаоницима:

а) $PBQO$; б) $SQCD$.

128. У паралелограму $ABCD$ тачке P, Q, R и S су редом средишта страница AB, BC, CD и DA (в. слику), а тачка O је пресек дужи AC и BD.



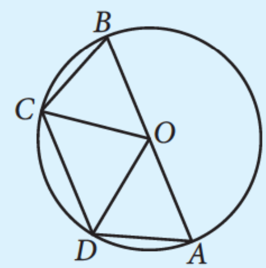
1) Које дужи су централносиметричне у односу на тачку O дужима:

а) AQ; б) BR; в) SR; г) PR?

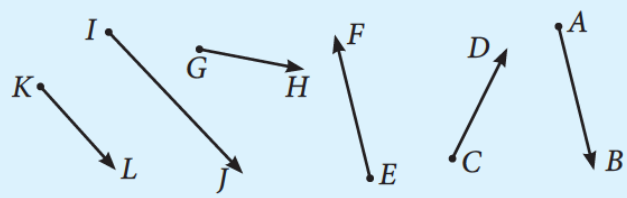
2) Који троуглови су централносиметрични у односу на тачку O троугловима:

а) AOD; б) PBO; в) BOR?

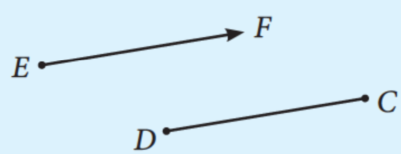
129. На слици је AB пречник кружнице са центром у тачки O. Прецртај ову слику у своју свеску, а затим нацртај троуглове централносиметричне троугловима DAO, CDO и BCO у односу на тачку O.



130. Дат је вектор $\overrightarrow{AB}$ на слици. Који од вектора $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ је једнак вектору $\overrightarrow{AB}$?



131. Означи на дужи DC смер вектора тако да $\overrightarrow{DC}$ буде једнак вектору $\overrightarrow{EF}$?

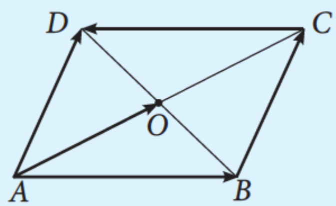


132. Нацртај три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{MN}$ тако да је:

а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$; в) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BO}$.

133. Који од следећих исказа су тачни (в. слику)?

а) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$;
б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$;
в) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
г) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$;
д) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$;
ђ) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$;
е) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.



(Заокружи слово испред тачног исказа.)

134. Дата је кружница $k(O, r)$ и три тачке A, B и C на кружници. Да ли важи $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$?

135. Транслирај:

а) тачку A; б) дуж BC;
в) троугао ABC за дати вектор $\overrightarrow{MN}$.

136. Дата је кружница $k(O, r)$, тачка A која припада кружници и тачка B ван кружнице. Транслирај кружницу k за вектор:

а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OB}$; в) $\overrightarrow{AB}$.

137. Транслирај квадрат $ABCD$ за:

а) дати вектор $\overrightarrow{MN}$; б) вектор $\overrightarrow{NM}$.

138. Дат је правоугаоник $ABCD$. Транслирај тај правоугаоник за:

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{BA}$;
г) $\overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{BD}$.

139. Нацртај произвољан троугао ABC, а затим га транслирај за:

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BA}$.

140. Нацртај квадрат $ABCD$ па га пресликај транслацијом за вектор $\overrightarrow{AB}$. Добијену фигуру пресликај транслацијом за вектор $\overrightarrow{BC}$. Добије се квадрат $PQRS$. За који вектор треба транслирати тај квадрат да би се он пресликао у квадрат $ABCD$?

141. Пресликај правоугаоник $ABCD$ двема узастопним транслацијама за дате векторе $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{EF}$.

142. Нацртај кружницу $k(O, r)$ и једну њену тетиву MN. Транслирај затим ту кружницу за вектор $\overrightarrow{MN}$.

143. Дат је троугао ABC. Транслирај тај троугао најпре за вектор $\overrightarrow{BC}$, а затим за $\overrightarrow{BA}$.

144. Нацртај квадрат $ABCD$ странице 2 cm, затим га пресликај централном симетријом са центром C, а затим добијени квадрат транслирај за $\overrightarrow{AB}$.

3 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ И ДЕЉИВОСТ – *Други део*

3.1. Прости и сложени бројеви Ератостеново сито

Осим броја 1 сви остали бројеви имају бар два делиоца. Неки природни бројеви имају само два делиоца, док неки имају више од два делиоца. Тако су, на пример, делиоци броја 12 бројеви 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Делиоци броја 13 су само 1 и 13. Дакле, број 12 се може написати у облику $12 = 12 \cdot 1$, али и $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, док се број 13 може написати у облику производа само као $1 \cdot 13$.

Природне бројеве, који имају тачно два делиоца, број 1 и сам тај број, називамо **прости бројеви**. Број је **сложен**, ако има више од два делиоца.
Број 1 није ни прост ни сложен.

Тако је број 13 прост, а број 12 је сложен, јер сем 1 и 12 за делиоце има и бројеве 2, 3, 4 и 6.

Сви делиоци сложеног броја *n*, осим 1 и *n*, зову се **прави делиоци** тог броја.

Сви делиоци броја 12 су: $1, \underbrace{2, 3, 4, 6}_{\text{прави делиоци}}$ и 12. Сви делиоци броја 20 су $1, \underbrace{2, 4, 5, 10}_{\text{прави делиоци}}$ и 20.

Сваки сложен број можемо представити као производ нека два његова права делиоца. На пример: $15 = 3 \cdot 5$; $20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$; $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$.

Сваки сложен број се може представити као производ своја два права делиоца.

Иако се чини да је све теже наћи прост број међу све већим бројевима ка бесконачности, ипак **простих бројева има бесконачно много**.

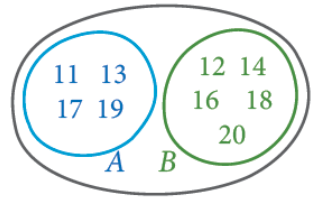
ПРИМЕР 1. Напиши све једноцифрене просте бројеве.

РЕШЕЊЕ То су бројеви 2, 3, 5 и 7.

ПРИМЕР 2. Напиши елементе скупа *A* простих бројева друге десетице и скупа *B* сложених бројева друге десетице.

РЕШЕЊЕ

Бројеви 2. десетице су: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.
$A = \{11,13,17,19\}$, $B = \{12,14,15,16,18,20\}$.

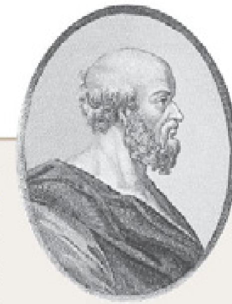


ПРИМЕР 3. Да ли су бројеви 34, 23 и 81 прости или сложени?

РЕШЕЊЕ Како је $34 = 2 \cdot 17$ и $81 = 9 \cdot 9$, бројеви 34 и 81 су сложени. Међутим, број 23 нема ниједан делилац различит од 1 и 23, па је он прост.

Поступак за проналажење свих простих бројева мањих од неког задатог природног броја *n* назива се **Ератостеново сито**. Поступак се састоји у следећем:

- Напишемо све природне бројеве од 2 до одабраног броја.
- Затим, редом проналазимо и заокружујемо просте бројеве, прецртамо све његове садржаоце који нису претходно прецртани.



Старогрчки математичар Ератостен осмислио је поступак за проналажење свих простих бројева мањих од неког задатог природног броја. Упоређен са ситом, алатком за просејавање брашна, поступак за издвајање („просејавање") простих бројева назван је Ератостеново сито.

Почевши од броја 2, првог простог броја одабраног са списка, прецртамо све бројеве дељиве са 2 и упишемо да је број 2 прост. Затим пређемо на следећи најмањи непрецртан број, прост број 3 и на списку прецртамо све до тада непрецртане бројеве дељиве са 3 и упишемо да је број 3 прост. Поступак се настави са првим следећим непрецртаним простим бројем 5 и прецртавањем његових садржалаца, итд.

ПРИМЕР 4. Применом Ератостеновог сита одреди све просте бројеве мање од 50.

РЕШЕЊЕ Напишемо списак свих бројева од 2 до 50.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

- Најпре прецртамо све парне бројеве (4, 6, 8, 10, ..., 50) и упишемо да је број 2 прост.
- Затим прецртамо све бројеве веће од 3, а дељиве са 3 који нису већ прецртани (9, 15, 21, 27, ..., 45) и упишемо да је број 3 прост број.
- Следи прецртавање бројева већих од 5 и дељивих са 5 који су до тада непрецртани (25 и 35) и уписивање броја 5 у списак простих бројева.
- Поступак настављамо са бројем 7 прецртавањем броја 49 и уписивање броја 7 на списак простих бројева.

Закључујемо да су преостали бројеви: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,41, 43 и 47.

То су сви прости бројеви мањи од 50.

~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

ПРИМЕР 5. За бројеве веће од 50 до 100 поступак је сличан. Сви прости бројеви мањи од 100 су:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97.

Криптографија – потиче од грчких речи и значи скривено писање, шифровање; преношење порука помоћу шифри чије значење разуме само познати прималац

Простих бројева, као и сложених има бесконачно много. Коришћењем рачунара могу се одредити и веома велики прости бројеви са стотинама и хиљадама цифара и они су веома значајни за математику и њене примене. Посебно је значајна примена простих бројева у криптографији (шифровању) која се користи за заштиту података.

ПРИМЕР 6. Да ли су бројеви из скупа {120, 121, 122, 123, 124, 125, 126} прости или сложени?

РЕШЕЊЕ Најпре уочимо да су сви парни бројеви (120, 122, 124, 126) из овог скупа сложени. Број 123 је дељив са 3, а број 125 са 5. На крају, $121 = 11 \cdot 11$. Дакле, сви бројеви из датог скупа су сложени.

ЗАДАЦИ

1. Колико има парних простих бројева?
2. Одреди све сложене бројеве у скупу $\{n \in N, n \mid 36 \leq n \leq 44\}$.
3. Производу бројева 10 и 16 дода се број 9. Да ли се добије прост или сложен број?
4. Одреди најмањи троцифрен:
   а) прост; б) сложен број.
5. Колико има простих бројева у
   а) трећој; б) четвртој; в) петој десетици прве стотине?
6. Израчунај збир највећег двоцифреног простог броја и најмањег троцифреног сложеног броја.
7. Да ли је број 391 прост или сложен?
8. Докажи да је број 1 001 сложен.
9. Израчунај збир свих сложених бројева прве десетице.

10.* Нека су p и q прости бројеви већи од 2. Докажи да је број $p+q$ сложен.

3.2. Растављање природних бројева на просте чиниоце

Сваки природан број већи од 1 или је прост или је производ простих бројева. Тако је, на пример, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $77 = 7 \cdot 11$ итд. Поступак налажења свих простих чинилаца неког природног броја веома је значајан.

Посматрајмо, на пример, број 150. Он је производ бројева 10 и 15. Али, број 10 је производ простих бројева 2 и 5, а број 15 производ простих бројева 3 и 5.
Дакле, $150 = 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Овде видимо да се неки прости чиниоци појављују у производу више пута. Такав запис се може скратити увођењем **степена броја**.

Ако имамо производ n чинилаца броја m у облику $\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ пута}}$
он се може записати краће у облику **степена** $\boldsymbol{m^n}$, при чему су n, m природни бројеви.

Записе у облику степена броја читамо:

n^2 – ен на други или ен на квадрат,
n^3 – ен на трећи или ен на куб,
n^4 – ен на четврти итд.

Претходни примери могу бити записани у облику степена простих чинилаца:
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$ $\quad 150 = 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Поступак растављања броја на просте чиниоце врло је једноставан. Посматрајмо, на пример, број 1 020. Направићемо табелу као на слици.

1 020	2
510	2
255	3
85	5
17	17
1	

- Број 1 020 је дељив са 2. Упишемо са десне стране број 2 и поделимо 1 020 са 2. Добија се количник 510.
- Упишимо број 510 испод броја 1 020. Број 510 такође је дељив са 2. Број 2 упишемо са десне стране и поделимо $510 : 2 = 255$. Број 255 упишемо испод броја 510.
- Број 255 није дељив са 2, па проверимо да ли је дељив првим следећим простим бројем. Број 255 је дељив са 3. Упишемо 3 са десне стране, а количник $255 : 3 = 85$ испод броја 255.
- Број 85 није дељив ни са 2, ни са 3, али је дељив са 5. Упишемо 5 са десне стране, а количник $85 : 5 = 17$ испод броја 85.
- Како је 17 прост број, упишемо га са десне стране, а на левој испод 17 упишемо количник $17 : 17 = 1$.

Овим је поступак налажења свих простих чинилаца броја 1 020 завршен.
То су бројеви написани са десне стране усправне линије:
$1\,020 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$.

Раставити природан број на просте чиниоце значи представити га у облику производа свих његових простих чинилаца.

ПРИМЕР 1. Растави бројеве 126 и 693 на просте чиниоце.

РЕШЕЊЕ

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ $\qquad$ $693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

ПРИМЕР 2. Одреди најмањи сложен број који се може представити као производ три различита проста броја.

РЕШЕЊЕ Да би број био најмањи могућ сложен број, значи да се састоји од три најмања различита проста броја, а ти бројеви су 2, 3 и 5. Дакле, њихов производ $2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$ даје нам најмањи такав сложен број, број 30.

ЗАДАЦИ

11. Растави бројеве 105, 999, 1 010, 2 020 на просте чиниоце.

12. Реши једначину $x - 3 = 117$, а затим добијени број x растави на просте чиниоце.

13. Све бројеве скупа $\{n \mid 47 < n < 51\}$ растави на просте чиниоце.

14. Странице једног правоугаоника имају дужине изражене целим бројем центиметара, а његова површина је 24 cm². Нађи све могућности за дужине страница.

15. Да ли постоји број чији је производ цифара једнак 231? Образложи одговор.

16. Производ бројева 24 и 34 растави на просте чиниоце.

17. Колико простих чинилаца има број 210?

18.* Снежана је сакупила деведесет једну салвету и поделила их својим другарицама, свакој по исти број салвета. Колико је свака од другарица добила салвета?

19. Сви прости чиниоци једног броја су 2, 5, 7, 11 и 13. Одреди најмањи такав број.

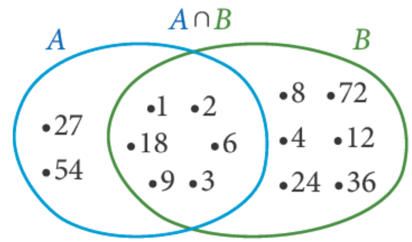
20. Који је најмањи, а који највећи прост чинилац броја 1 287?

3.3. Заједнички делилац и највећи заједнички делилац Еуклидов алгоритам за налажење НЗД

Посматрајмо бројеве 54 и 72.

Делиоци броја 54 су: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 и 54.
Делиоци броја 72 су: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 и 72.

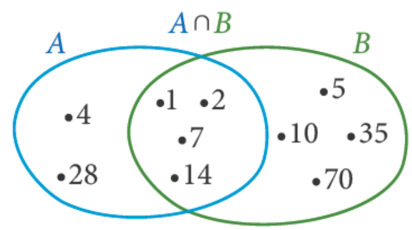
Приметимо да су бројеви 1, 2, 3, 6, 9 и 18 делиоци и броја 54 и 72.



Ако је A скуп делилаца броја a, а B скуп делилаца броја b, тада је $A \cap B$ скуп заједничких делилаца бројева a и b.

ПРИМЕР 1. Одреди скупове делилаца бројева 28 и 70 и скуп њихових заједничких делилаца.

РЕШЕЊЕ



Раставимо дате бројеве на просте чиниоце:
$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Скуп делилаца броја 28 је $A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

Скуп делилаца броја 70 је $B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$.

Скуп заједничких делилаца бројева 28 и 70 је $A \cap B = \{1, 2, 7, 14\}$.

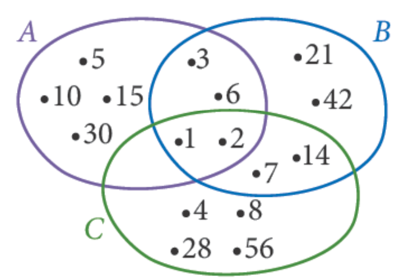
Слично се налазе и заједнички делиоци више бројева.

ПРИМЕР 2. Одреди скупове делилаца бројева 30, 42 и 56, а затим скуп њихових заједничких делилаца.

РЕШЕЊЕ

Како је $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ и $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, то су скупови делилаца бројева 30, 42 и 56 редом:
$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,
$B = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ и
$C = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$.

Скуп заједничких делилаца бројева 30, 42 и 56 је скуп $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$.



Највећи заједнички делилац неких бројева је највећи од свих заједничких делилаца тих бројева. Највећи заједнички делилац бројева a и b најчешће се обележава са **НЗД(*a, b*)**.

Пошто је сваки делилац неког броја мањи или једнак том броју, скуп делилаца тог броја увек је коначан. Стога је и скуп заједничких делилаца два или више бројева, такође коначан. Можемо закључити да је онда и највећи заједнички делилац, као највећи од свих заједничких делилаца датог броја, могуће одредити, тј. биће коначан број.

ПРИМЕР 3. Одреди НЗД(28, 70) и НЗД(30, 42, 56).

РЕШЕЊЕ Имајући у виду резултате из примера 1 и 2, закључујемо да је НЗД(28, 70) = 14, а НЗД(30, 42, 56) = 2.

> Ако је НЗД двају или више бројева једнак 1, онда се за те бројеве каже да су **узајамно прости**. Узајамно прости бројеви немају заједничке просте делиоце.

Важно је приметити да узајамно прости бројеви могу али и не морају бити увек прости бројеви. Показаћемо то на три случаја за по два узајамно проста броја, што се може применити и на више њих.

1) Оба броја су проста и они су узајамно прости – на пример 3 и 13

$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $A = \{1, 3\}$

$\begin{array}{r|l} 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ $B = \{1, 13\}$

$A \cap B = \{1\}$, што значи да је НЗД(3, 13) = 1, тј. бројеви 3 и 13 су узајамно прости.

2) Један број је прост а други сложен и они су узајамно прости – на пример 5 и 9

$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $5 = 1 \cdot 5$
(5 је прост број)
$A = \{1, 5\}$

$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 = 3^2$
(9 је сложен број)
$B = \{1, 3, 9\}$

$A \cap B = \{1\}$, па је НЗД(5, 9) = 1, те су бројеви 5 и 9 узајамно прости.

3) Оба броја су сложена и они су узајамно прости – на пример 4 и 25

$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
$A = \{1, 2, 4\}$

$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $25 = 1 \cdot 25 = 5 \cdot 5 = 5^2$
$B = \{1, 5, 25\}$

$A \cap B = \{1\}$ па је НЗД(4, 25) = 1, те су бројеви 4 и 25 узајамно прости.

Овоме се може додати и једна важна последица – за два броја где један садржи другог, важно је приметити да је њихов НЗД заправо онај мањи број:

Ако 7 | 14, тада је $\begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $7 = 1 \cdot 7$
$A = \{1, 7\}$

$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$
$B = \{1, 2, 7, 14\}$

$A \cap B = \{1, 7\}$, па је НЗД(7, 14) = 7

Ако $a \mid b$ тада је НЗД$(a, b) = a$.

ПРИМЕР 4.

а) Бројеви 35 и 66 су узајамно прости.

Делиоци броја 35 су: 1, 5, 7 и 35, а делиоци броја 66 су: 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33 и 66. Видимо да је НЗД(35, 66) = 1.

б) Бројеви 14, 22 и 46 нису узајамно прости, јер је НЗД(14, 22, 46) = 2.

Постоји више поступака за одређивање НЗД датих бројева. Ми ћемо прво посматрати један једноставан начин који подсећа на поступак растављања природног броја на просте чиниоце.

ПРИМЕР 5. Одреди НЗД(44, 132, 330).

РЕШЕЊЕ Посматрајмо таблицу:

$$\begin{array}{rrr|l} 44, & 132, & 330 & 2 \\ 22, & 66, & 165 & 11 \\ 2, & 6, & 15 & \end{array}$$

НЗД(44, 132, 330) = $2 \cdot 11 = 22$

330 : НЗД(44, 132, 330) = 15

132 : НЗД(44, 132, 330) = 6

44 : НЗД(44, 132, 330) = 2

У првом реду смо написали дате бројеве. Тражимо њихове просте заједничке делиоце. Најмањи такав делилац је број 2. Њега напишемо са десне стране, а све дате бројеве поделимо са 2:

44 : 2 = 22 132 : 2 = 66 330 : 2 = 165

У другом реду, испод сваког од датих бројева, напишемо одговарајуће количнике: 22, 66 и 165. Примећујемо да су сви ти бројеви дељиви са 11. Број 11 напишемо са десне стране.

Испод бројева 22, 66 и 165 са леве стране усправне црте њихове количнике при дељењу са 11:

22 : 11 = 2 66 : 11 = 6 165 : 11 = 15

Непосредно се види да је НЗД(2, 6, 15) = 1, тј. да су та три броја узајамно проста. Закључујемо да је НЗД(44, 132, 330) = $2 \cdot 11 = 22$.

У овом примеру видимо да се сваки од бројева за које одређујемо НЗД може представити као производ НЗД и узајамно простог броја који остаје приликом дељења.

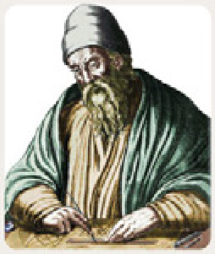
Како је 22 = НЗД(44, 132, 330), то је: $330 = 22 \cdot 15$

$132 = 22 \cdot 6$

$44 = 22 \cdot 2$

Еуклидов алгоритам

Постоји и други веома познат начин за проналажење навећег заједничког делиоца два броја. По славном старогрчком математичару Еуклиду назива се **Еуклидов алгоритам**.



Еуклид је живео у 4. веку п. н. е. и радио у чувеној Александријској библиотеци. Сматра се оцем геометрије, а његово најпознатије дело *Елементи* користило се у математичкој науци до 19. века. Његово име значи „славан”.

Алгоритам је опис за решавање неког проблема. То је низ корака који служи као упутство људима или машинама за успешно решавање проблема или обављање неког посла. У новије време, алгоритам је појам који се најчешће везује за информатику.

Показаћемо како се применом Еуклидовог алгоритма одређује НЗД за нека два броја, на пример за бројеве 594 и 180.

$a = qb + r$	При дељењу природних бројева a и b, q и r су количник и остатак.
$594 = 180 \cdot 3 + 54$	Поделимо најпре 594 са 180. Добијамо количник 3 и остатак 54. $a = 594$, $b = 180$, $r = 54$
$180 = 54 \cdot 3 + 18$	Затим број 180 поделимо са остатком из претходног дељења, бројем 54. Добија се количник 3 и остатак 18. $a = 180$, $b = 54$, $r = 18$
$54 = 18 \cdot 3 + 0$	Поступак настављамо и делимо број 54 са последњим остатком, тј. бројем 18. Добијамо $54 = 18 \cdot 3$, тј. остатак је једнак нули. $a = 54$, $b = 18$, $r = 0$

Последњи остатак различит од нуле је НЗД(594, 180). У овом случају то је број 18.
НЗД(594, 180) = НЗД(180, 54) = НЗД(54, 18) = 18

Еуклидов алгоритам се примењује за природне бројеве a, b, q и r код којих важи да ако је $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$, тада је НЗД(a, b) = НЗД(b, r).

ПРИМЕР 6. Применом Еуклидовог алгоритма одреди НЗД(144, 264).

РЕШЕЊЕ

$264 = 144 \cdot 1 + 120$

$144 = 120 \cdot 1 + 24$

$120 = 24 \cdot 5 + 0$

Добијамо НЗД(144, 264) = НЗД(144, 120) = НЗД(120, 24) = 24.

ПРИМЕР 7. Којим највећим бројем можемо поделити бројеве 64 и 88 без остатка?

РЕШЕЊЕ Највећи заједнички број којим се могу поделити дати бројеви истовремено без остатка је њихов НЗД. Зато рачунамо НЗД(64, 88).

$$\begin{array}{rr|l} 64, & 88 & 2 \\ 32, & 44 & 2 \\ 16, & 22 & 2 \\ 8, & 11 & \end{array}$$

Дошли смо до резултата при дељењу 8 и 11, а то су узајамно прости бројеви, па се ту дељење завршава, а НЗД$(64, 88) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Реши **тест број 14** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

21. Нађи заједничке делиоце бројева:
а) 24 и 36; б) 70 и 130.

22. Да ли су следећи бројеви узајамно прости:
а) 65 и 154; б) 14, 15 и 99; в) 70 и 91.

23. Столар Пеђа поседује комад дрвета у облику квадра чије су димензије 15 cm, 21 cm и 33 cm. Он жели да цео комад исече на једнаке коцке целобројних што већих дужина ивица, без отпада при сечењу. Колике ће бити дужине ивица тих коцки?

24. Одреди НЗД за бројеве:
а) 15 и 21; б) 198 и 77; в) 156, 198 и 612.

25. Нека је НЗД$(a, b, c) = 1$, $a, b, c \in N$.
Да ли то значи да је НЗД(a, b) = НЗД(b, c) = НЗД$(c, a) = 1$?

26. Применом Еуклидовог алгоритма одреди:
а) НЗД(62, 217); б) НЗД(80, 176).

27. Нека је A скуп заједничких делилаца бројева 18 и 30 и B скуп заједничких делилаца бројева 48 и 60. Одреди:
а) A; б) B; в) $A \cap B$; г) $A \setminus B$.

28. Применом Еуклидовог алгоритма докажи да су бројеви 104 и 165 узајамно прости.

29. Докажи да су највећи двоцифрен и најмањи троцифрен број узајамно прости.

30. Нека је a = НЗД(120, 168) и b = НЗД(144, 264). Упореди бројеве a и b.

31.* Којим највећим бројем можемо поделити бројеве 178 и 199 тако да остатак при оба дељења буде 3?

32.* Којим највећим бројем можемо поделити бројеве 229, 158 и 135 тако да остаци при дељењу редом буду 1, 2 и 3?

33.* У једном одељењу првог разреда учитељица је својим ученицима поделила 40 свезака и 60 оловака и то тако да сваки од њих добије једнак број свезака и једнак број оловака. Колико у том одељењу има ученика?

3.4. Заједнички садржалац и најмањи заједнички садржалац Веза између НЗД и НЗС

Посматрајмо, на пример, бројеве 24 и 32. Они имају неколико заједничких делилаца: 1, 2, 4 и 8, а НЗД(24, 32) = 8.

Посматрајмо сада и заједничке садржаоце бројева 24 и 32. То су бројеви у којима се оба броја 24 и 32 садрже (без остатка).

Како је $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, а $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ видимо да се у броју $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ садрже и 24 и 32 ($96 = 24 \cdot 4$, $96 = 32 \cdot 3$).

Број 96 се назива **заједнички садржалац** бројева 24 и 32. Међутим, и бројеви 192, 288, 384, 480 и још бесконачно много њих, такође су заједнички садржаоци бројева 24 и 32.

Видимо да је за разлику од скупа делилаца неког броја који је увек коначан, скуп садржалаца сваког броја бесконачан. Пресек два или више скупова садржалаца који су бесконачни биће, такође, бесконачан скуп. Међутим, можемо одредити његов најмањи члан, који се назива најмањи заједнички садржалац два или више бројева.

Нека су a и b природни бројеви. Заједничким садржаоцем ових бројева назива се сваки број који је дељив и са a и са b.

Најмањи међу заједничким садржаоцима бројева a и b назива се **најмањи заједнички садржалац** тих бројева. Обележавамо га са **НЗС**.

У наведеном примеру НЗС(24, 32) = 96.
Скуп садржалаца броја 24 је $A = \{24, 48, 72, 96, ...\}$,
а скуп садржалаца броја 32 је $B = \{32, 64, 96, 128...\}$.
Скуп заједничких садржалаца бројева 24 и 32 је
скуп $A \cap B = \{96, 192, 288, 384, 480...\}$.
НЗС(24, 32) је најмањи елемент скупа $A \cap B$, а то је 96.

На сличан начин одређује се и НЗС за више бројева.

ПРИМЕР 1. Одреди НЗС(60, 72, 90).

РЕШЕЊЕ Раставимо дате бројеве на просте чиниоце:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Како је НЗС(60, 72, 90) дељив бројевима 60, 72 и 90, неопходно је да он садржи све њихове чиниоце.

Биће НЗС(60, 72, 90) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Најмањи заједнички садржалац за два или више бројева може се једноставно одредити поступком сличним оном који смо упознали у претходним одељцима.

ПРИМЕР 2. Одреди НЗС(20, 30, 35).

РЕШЕЊЕ

Потражимо најмањи прост број којим је дељив бар један од датих бројева. То је број 2 који пишемо са десне стране усправне линије.

20,	30,	35	2
10,	15,	35	2
5,	15,	35	3
5,	5,	35	5
1,	1,	7	7
1,	1,	1	

- Затим, испод сваког од датих бројева који су дељиви са 2 напишемо количник тог броја и броја 2, а препишемо број 35 који није дељив са 2.
- Поновимо овај поступак. Број 10 је дељив са 2.

  Напишемо 2 са десне стране, а испод броја 10, у новом реду, напишемо количник при дељењу са 2, тј. број 5.

  Бројеве 15 и 35 који су непарни препишемо.
- Сада проналазимо следећи најмањи прост број којим је дељив неки од бројева у другом реду. То је број 3 који дели 15. Напишимо га са десне стране.

  Испод бројева 5, 15 и 35 испишемо бројеве 5, 5, 35. Наиме, број 15 смо поделили са 3, а бројеве 5 и 35 који нису дељиви са 3 само препишемо.
- Поступак сада понављамо са следећим простим бројем – бројем 5, а на крају бројем 7.

Поступак се завршава када у последњем реду на левој страни добијамо све јединице.

НЗС(20, 30, 35) је производ добијених простих бројева из колоне са десне стране вертикалне црте: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

ПРИМЕР 3. Одреди НЗС(6, 8).

РЕШЕЊЕ

6,	8	2
3,	4	3
1,	4	2
1,	2	2
1,	1	

НЗД(6, 8) = 2 јер су бројеви 3 и 4 узајамно прости па њих делимо засебно

НЗС(6, 8) = 2 · 3 · 4 = НЗД(6, 8) · 3 · 4 = 24

$\underbrace{\text{НЗД}(6, 8)}_{2} \cdot \underbrace{\text{НЗС}(6, 8)}_{24} = 6 \cdot 8 = 48$

ПРИМЕР 4. Одреди НЗС(7, 11).

РЕШЕЊЕ

7,	11	7
1,	11	11
1,	1	

Пошто су бројеви 7 и 11 прости, они су и узајамно прости, па је њихов НЗД(7, 11) = 1, а НЗС(7, 11) = 7 · 11 = 77.

Зато је овде НЗС(7, 11) · НЗД(7, 11) = 77 · 1 = 77 = 7 · 11

ПРИМЕР 5. Посматрај сада бројеве 180 и 462. Одреди њихов НЗС.

РЕШЕЊЕ

180,	462	2
90,	231	2
45,	231	3
15,	77	3
5,	77	5
1,	77	7
1,	11	11
1,	1	

То је производ бројева $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 13\,860$.
Видимо и да је $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, а $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$,
па је НЗД(180, 462) $= 2 \cdot 3 = 6$.

Приметимо да је $180 \cdot 462 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 =$
$(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) =$
НЗС(180, 462) · НЗД(180, 462).

Уопште, за било која два природна броја a и b је НЗД(a, b) · НЗС$(a, b) = a \cdot b$.

Одавде видимо да, ако су бројеви a и b **узајамно прости**, тј. када је НЗД$(a, b) = 1$ важи **НЗС$(a, b) = a \cdot b$**. Ако су бројеви узајамно прости, тада је њихов НЗС једнак њиховом производу.

ПРИМЕР 6. Одреди НЗС(6, 18)

РЕШЕЊЕ

6,	18	2
3,	9	3
1,	3	3
1,	1	

НЗС(6, 18) $= 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$

Овде видимо да број 6 дели број 18, па можемо закључити да број 18 садржи и 6 и самога себе, тј. да је број 18 њихов заједнички садржалац. То значи да ако је неки број садржан у другом, онда је њихов најмањи заједнички садржалац онај већи број.

Ако $a|b$ тада је НЗС$(a, b) = b$

ПРИМЕР 7. Одреди најмањи природан број који је дељив бројевима 24 и 32.

РЕШЕЊЕ Најмањи природан број који садржи и 24 и 32 без остатка је заправо њихов НЗС.

24,	32	2
12,	16	2
6,	8	2
3,	4	3
1,	4	2
1,	2	2
1,	1	

НЗС(24, 32) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 =$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 96$

ПРИМЕР 8. Одреди најмањи природан број који је дељив бројевима 15, 25 и 30.

РЕШЕЊЕ Најмањи природан број који садржи бројеве 15, 25 и 30 без остатка је заправо њихов НЗС.

$$\begin{array}{ccc|c} 15, & 25, & 30 & 5 \\ 3, & 5, & 6 & 3 \\ 1, & 5, & 2 & 5 \\ 1, & 1, & 2 & 2 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array} \qquad \text{НЗС}(15, 25, 30) = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 15 \cdot 10 = 150$$

Реши **тест број 15** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

34. Одреди НЗС за бројеве: а) 9 и 12; б) 10 и 14; в) 24 и 36.

35. Одреди НЗС за бројеве: а) 14, 21 и 35; б) 22, 55 и 77.

36. Докажи да су дати бројеви узајамно прости, а затим одреди њихов најмањи заједнички садржалац: а) 21 и 44; б) 26 и 51.

37. Који је најмањи број дељив бројевима 3, 4, 5 и 6?

38. На часу физичког наставник је поделио све ученике једног одељења најпре у групе по 6, а затим у групе по 8 ученика. Показало се да ни у једном ни у другом случају ниједан ученик није преостао. Ако се зна да у одељењу има мање од 30 ученика, колики је број ученика у том одељењу?

39. Одреди све двоцифрене заједничке садржаоце бројева 27 и 6.

40. Провери тачност једнакости НЗД$(a, b) \cdot$ НЗС$(a, b) = a \cdot b$ за бројеве $a = 72$ и $b = 132$.

41. Одреди НЗС највећег једноцифреног и најмањег двоцифреног броја.

42. Одреди НЗС за бројеве 2, 3, 5, 7, 11.

43. Израчунај: а) НЗС(24, НЗД(90, 126)); б) НЗД(НЗС(24, 90), НЗС(24, 126)).

44.* Одреди најмањи природан број који при дељењу са 16 и 24 даје остатак 3.

45.* Одреди најмањи природан број који при дељењу са 18, 27 и 42 даје остатак 1.

46.* Обим предњег точка инвалидских колица је 80 cm а задњег 200 cm. Колики најмањи пут треба да пређе корисник колица да би и предњи и задњи точак направили цео број обртаја?

Реши **тест број 16** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

РАЗНИ ЗАДАЦИ

47. Одреди подскупове, B – простих и C – сложених бројева, који су елементи скупа A, ако је:
а) $A = \{n \mid 30 \le n \le 50\}$;
б) $A = \{n \mid 100 \le n \le 120\}$.

48. Да ли су бројеви из скупа {63, 71, 121, 127, 439, 391} прости или сложени?

49. Покажи да су сви следећи бројеви сложени: 3 069, 5 703, 12 003, 777 777, 257 001.

50. Наведи пример три проста броја чији је збир:
а) сложен број; б) прост број.

51. Одреди бар три пара простих бројева p и q таквих да је збир $p + q$ прост број.

52.* Докажи да се број 27 не може написати као збир два проста броја.

53.* Одреди све просте бројеве p и q за које важи $3 \cdot p + 2 \cdot q = 52$.

54.* Ако је p прост број, доказати да је број $37 + p$ сложен.

55.* Одреди све просте бројеве p такве да су бројеви $7 \cdot p + 3$ и $13 \cdot p + 5$ прости.

56. Одреди све просте делиоце броја:
а) 264; б) 6 050; в) 40 320.

57. Бројеве: 50, 92, 175, 2 400 и 5 880 растави на просте чиниоце.

58. Растави на просте чиниоце бројеве:
а) 540; б) 875; в) 744.

59. Одреди број који има број 2 као чинилац три пута, број 3 два пута, а бројеве 5 и 7 по једном и нема других чинилаца осим ових.

60. Сви бројеви из скупа $A = \{n \mid 139 < n < 149\}$ су сложени. Растави их на просте чиниоце.

61. Запремина једног квадра, код кога су мерни бројеви дужина свих ивица изражени у центиметрима природни бројеви већи од 1, износи:
а) 231 cm^3; б) 455 cm^3.
Одреди дужине његових ивица.

62.* Колико има природних бројева код којих је производ цифара:
а) 12; б) 13?

63.* Производ три узастопна природна броја је 504. Који су то бројеви?

64.* Напиши све троцифрене бројеве чији је производ цифара једнак 30.

65.* Производ четири узастопна природна броја је 3 024. Који су то бројеви?

66. Одреди:
а) НЗД(3, 5, 7); б) НЗД(4, 8, 12);
в) НЗД(196, 280); г) НЗД(45, 60, 90).

67. Применом Еуклидовог алгоритма израчунај НЗД за бројеве:
а) 35 и 49; б) 12 и 22;
в) 222 и 102; г) 140 и 308.

68. Наведи примере пет бројева који су узајамно прости са бројем 8.

69. Да ли су дати бројеви узајамно прости?
а) 7 и 16; б) 12 и 65;
в) 9 и 39; г) 15 и 56.

70. Међу елементима скупа {6, 14, 15, 18, 21} може се пронаћи пар бројева који су узајамно прости. Који су то бројеви?

71. Три жице дужине 16 m, 24 m и 36 m треба исећи на што дуже једнаке делове. Колика је дужина сваког од тих делова?

72. Којом се највећом заједничком мером могу измерити:

а) масе од 21 g, 28 g и 35 g;
б) запремине од 16 l, 24 l и 40 l;
в) дужине од 24 cm, 60 cm и 90 cm?

73. Која је највећа заједничка могућа запремина посуде којом је у једно буре усуто 48 l, а у друго 72 l воде? (Запремина посуде је природан број литара. При сваком сипању претходно је напуњена до врха, а затим потпуно испражњена.)

74. Два кабла дужине 48 m и 56 m треба поделити на највеће једнаке делове. Колико укупно има тих делова?

75. На тренингу је група од 30 кошаркаша добила 24 лопте. Кошаркаши су подељени на једнаке групе и свака група је добила једнак број лопти. Колико је било група и колико је свака од њих добила лопти?

76. Комад дрвета облика квадра, чије су димензије 42 cm, 30 cm и 12 cm, треба разрезати на највеће могуће коцке једнаких запремина. Одреди дужину ивице сваке од тих коцки и њихов број након резања.

77. Правоугаону плочу, чије су димензије 1 386 mm и 420 mm, треба разрезати на највеће могуће квадрате једнаких површина. Одреди површину сваког од тих квадрата и колико их има након резања.

78. Напиши неколико садржалаца броја:

а) 5; б) 7.

79. Одреди све заједничке садржаоце бројева:

а) 8 и 12 који су мањи од 100;
б) 10 и 15 који су мањи од 120.

80. Одреди:

а) НЗС(3, 5, 7); б) НЗС(4, 8, 12);
в) НЗС(196, 280); г) НЗС(45, 60, 90).

81. Који најмањи природан број је дељив бројевима:

а) 2, 3 и 5; б) 2, 3 и 7; в) 2, 5 и 7;
г) 2, 4 и 6; д) 3, 7 и 9?

82. Одреди НЗС свих једноцифрених:

а) парних; б) непарних;
в) простих; г) сложених бројева.

83. Одреди најмањи природан број који је дељив свим једноцифреним природним бројевима.

84. а) Одреди највећи број који је делилац бројева 36 и 48.

б) Одреди најмањи број који је дељив бројевима 36 и 48.

85. Одреди НЗД и НЗС за бројеве:

а) 24, 36 и 60; б) 54, 36 и 24.

86. Одреди НЗД и НЗС за елементе скупа:

а) $A = \{18, 24, 36, 60, 72\}$;
б) $B = \{15, 25, 45, 105, 225\}$;
в) $C = \{9, 18, 24, 45, 120\}$.

87. Ученици једног одељења петог разреда сваких 15 радних дана имају контролну вежбу из Математике, сваких 18 радних дана из Српског језика и књижевности и свака 24 радна дана из Историје. Догодило се да су једног дана имали вежбе из сва три предмета. После колико дана ће се то поновити?

88.* Одреди најмањи број који и при дељењу са 12 и при дељењу са 28 даје остатак 5.

89.* Којим највећим природним бројем можемо да поделимо бројеве 79, 111 и 155, па да остаци редом буду 7, 3 и 11?

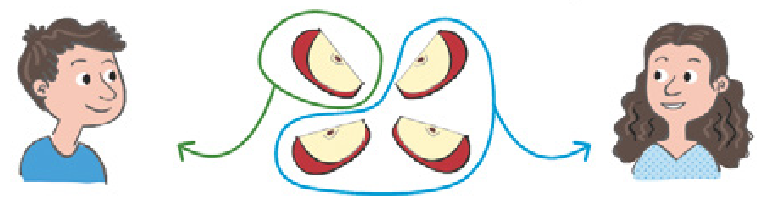
90.* Продавац лубеница рачуна колико има лубеница: „Ако их бројим по две, по три, по четири, по пет или по шест, увек ми једна остане. Али, ако их бројим по седам, не остане ми ниједна.” Који је најмањи могућ број лубеница који задовољава наведене услове?

4 РАЗЛОМЦИ – *Први део*

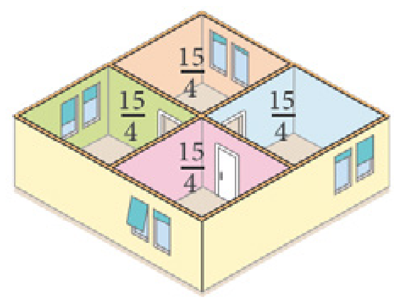
4.1. Појам разломака облика $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$

Када треба да опишемо део или више делова неке целине користимо разломке. То значи да ту целину треба да поделимо тј. разломимо на више делова. У зависности од тога на колико делова делимо целину и сам разломак добија име – ако делимо на 4 дела, добићемо четвртине, на 10 делова – десетине, итд.

ПРИМЕР 1. Јован је поделио јабуку на четири дела. Један део је задржао за себе, а три је дао својој сестри Јовани. Дакле, Јован је добио $\frac{1}{4}$ јабуке, а Јована $\frac{3}{4}$ јабуке.



ПРИМЕР 2. Мајстор Пера је окречио четири једнаке собе за укупно 15 часова. Колико времена му је било потребно да окречи једну собу?

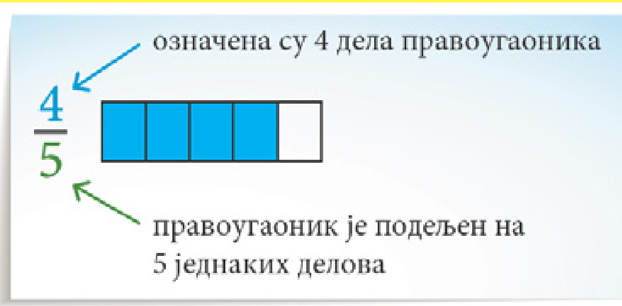


РЕШЕЊЕ За сваку собу је било потребно $15 : 4 = \frac{15}{4}$ часова.

У оба претходна примера појавили су се разломци. То су бројеви облика $\frac{m}{n}$, m, $n \in N$. Из примера 2 смо видели да се број $\frac{15}{4}$ може сматрати количником бројева 15 и 4.

Ако су m и n природни бројеви, разломак $\frac{m}{n}$ је количник бројева m и n.
То јест, $\frac{m}{n} = m : n$ за $m \in N_0$ и $n \in N$.
Број m се назива **бројилац**, а број n **именилац** разломка $\frac{m}{n}$. **Разломачка црта** је симбол за операцију дељења.

$\frac{m}{n}$ ← бројилац
← разломачка црта
← именилац



Именилац нашег разломка показује на колико делова смо поделили неку целину, док бројилац пребројава колико делова целине смо узели.

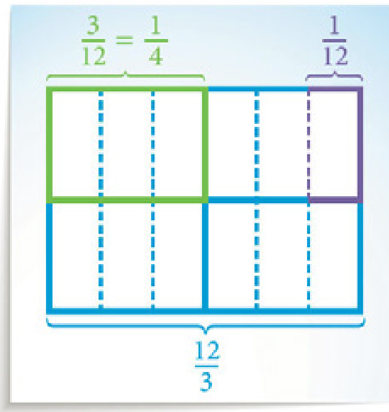
Ако је природан број m дељив природним бројем n, тада је разломак $\frac{m}{n}$ природан број. Дакле, ако за $m, n \in N$ важи $n|m$, онда $\frac{m}{n} \in N$. Специјално, за сваки природан број m важи $\frac{m}{m} = m:m = \mathbf{1}$.

ПРИМЕР 3. Неки разломци јесу природни бројеви.

На пример, $\frac{12}{3} = 12 : 3 = 4$ цела. Овај разломак је природан број, јер је 12 дељив са 3, тј. $3|12$.

Такође, $\frac{9}{9} = 9 : 9 = 1$ цело. Дакле, $\frac{9}{9}$ је природан број, тј. свака целина има 9 деветина.

Међутим, $\frac{12}{5} = 12 : 5$, па овај разломак неће бити природан број, број 12 није дељив са 5.



Видимо да се и сви природни бројеви могу представити у облику разломка, јер је $\frac{m}{1} = m$. За сваки природан број важи и $\frac{0}{m} = \mathbf{0}$. Зато је скуп N_0 подскуп скупа разломака.

ПРИМЕР 4. Сваки природан број се може представити као разломак са имениоцем 1, што значи да целину уопште не делимо на делове: седам једнина је заправо 7 целих, осам једнина је 8 целих, пет једнина је 5 целих.

$\frac{7}{1} = 7$, $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{5}{1} = 5$.

Сви разломци облика $\frac{m}{n}$, $(m, n \in N)$ се деле на три групе.

Ако је $m<n$, тј. бројилац разломка мањи од имениоца, тада је $\frac{m}{n} < 1$. Овакви разломци се обично називају **прави разломци**.

Ако је $m = n$, тада је $\frac{m}{n} = 1$.

Ако је пак, бројилац разломка већи од имениоца, тј. $m > n$, тада је $\frac{m}{n} > 1$, па се за такве разломке каже да су **неправи разломци**.

ПРИМЕР 5. Из скупа $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{6}{4}, \frac{11}{2}, \frac{2}{11}, \frac{5}{16}, \frac{17}{3}\}$ издвојити праве и неправе разломке.

РЕШЕЊЕ Прави разломци су: $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{11}$ и $\frac{5}{16}$, а неправи: $\frac{6}{4}, \frac{11}{2}$ и $\frac{17}{3}$.

Посматрајмо један неправи разломак $\frac{17}{3}=17:3$. Како је количник при дељењу 17 са 3 једнак 5 а остатак 2, тј. $17=3\cdot5+2$, разломак $\frac{17}{3}$ пишемо и у облику $5\frac{2}{3}$. Овакав облик разломка се назива мешовити број и има значење $5+\frac{2}{3}$ и чита се: *5 целих и 2 трећине.*

Неправи разломци имају вредност већу од 1. Пошто имају и целе и разломљене делове, неправи разломци се могу записати у облику **мешовитог броја**.
Ако је $\frac{m}{n}$ неправи разломак и $m=q\cdot n+r$, тада је његов мешовити број $q\frac{r}{n}$.

количник m и n — остатак

$$\frac{m}{n}=q\frac{r}{n}$$ — мешовити број

ПРИМЕР 6. Представи следеће неправе разломке $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{23}{4}$ и $\frac{117}{55}$ у облику мешовитих бројева.

РЕШЕЊЕ Пошто је разломак $\frac{7}{2}=7:2$ и како је $7=3\cdot2+1$, видимо да је $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$.
Слично, $\frac{9}{5}=9:5$ и $9=1\cdot5+4$, па је $\frac{9}{5}=1+\frac{4}{5}=1\frac{4}{5}$.
На исти начин добија се $\frac{23}{4}=5\frac{3}{4}$ и $\frac{117}{55}=2\frac{7}{55}$.

ПРИМЕР 7. Мешовите бројеве $5\frac{2}{3}$, $6\frac{2}{9}$, $11\frac{4}{7}$ претвори у неправи разломак.

$$5\frac{2}{3}=\frac{3\cdot5+2}{3}=\frac{15+2}{3}=\frac{17}{3}$$

$$6\frac{2}{9}=\frac{9\cdot6+2}{9}=\frac{54+2}{9}=\frac{56}{9}$$

$$11\frac{4}{7}=\frac{7\cdot11+4}{7}=\frac{77+4}{7}=\frac{81}{7}$$

Реши **тест број 26** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

Разломак чији је бројилац једнак 0, а именилац било који природан број $n\in N$ јесте $\frac{0}{n}=0$, због тога што је $0\cdot n=0$. Међутим, како дељење нулом није дефинисано, именилац ниједног разломка не може да буде 0.

ПРИМЕР 8. У табели су дати подаци о броју ученика одређеног успеха у једном одељењу. Прикажи податке на кружном дијаграму.

Успех	одлични	врлодобри	добри	довољни	недовољни
Број ученика	5	10	10	5	0

РЕШЕЊЕ У одељењу има укупно $5+10+10+5=30$ ученика.
Ако укупан број ученика у одељењу прикажемо кругом, потребно је одредити делове круга који одговарају броју ученика одређеног успеха.

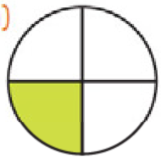
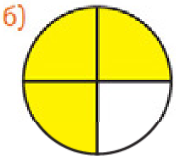
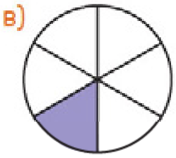
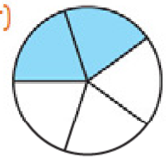
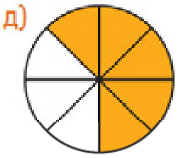
- Броју одличних ученика одговара $5:30=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ круга.
- Броју врлодобрих ученика одговара $10:30=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ круга.
- Броју добрих ученика одговара $10:30=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ круга.
- Броју довољних ученика одговара $5:30=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ круга.

Број ученика

• одличних • врлодобрих
• добрих • довољних

ЗАДАЦИ

1. Који разломци су приказани на свакој слици?

а)  б)  в)  г)  д) 

2. Одреди помоћу датог кружног дијаграма колико ученика једног одељења петог разреда похађа Грађанско васпитање, а колико Верску наставу, ако у одељењу има укупно 24 ученика.

Број ученика

3. Који од разломака из скупа $A = \{\frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \frac{14}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{8}, \frac{18}{9}, \frac{5}{11}, \frac{27}{13}\}$ су:

а) прави разломци; б) природни бројеви; в) неправи разломци?

4. Неправе разломке представи у облику мешовитих бројева:
$\frac{9}{2}, \frac{11}{4}, \frac{17}{16}, \frac{25}{3}, \frac{38}{7}, \frac{25}{12}, \frac{17}{5}, \frac{45}{13}, \frac{58}{19}, \frac{34}{21}, \frac{100}{20}, \frac{77}{11}$.

5. Број 3 напиши у облику $\frac{m}{n}$ на три различита начина.

6. Израчунај:
а) петину броја 250; б) седмину броја 56; в) трећину броја 60;
г) 3 четвртине броја 80; д) 2 петине броја 40; ђ) 7 осмина броја 32;
е) од ког броја су 3 четвртине једнаке броју 12;
ж) од ког броја је 1 половина једнака броју 23;
з) од ког броја су 4 седмине једнаке броју 24.

7. Мешовите бројеве представи у облику неправих разломака:
$3\frac{1}{2}, 2\frac{7}{9}, 5\frac{3}{11}, 4\frac{5}{8}, 9\frac{2}{3}, 11\frac{1}{11}, 2\frac{34}{45}, 1\frac{15}{16}, 15\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8}, 5\frac{7}{8}, 20\frac{4}{5}, 7\frac{2}{9}$.

8. Напиши све праве разломке са имениоцем 7.

9. Напиши три неправа разломка чији је именилац број 5.

10. а) Пет килограма чоколаде треба распоредити на 23 ученика једног одељења. Који део килограма ће добити сваки ученик под условом да су сви добили исту количину чоколаде?

б) Седам јабука треба поделити дечацима за ужину. Колико делова јабуке ће добити сваки од 9 дечака?

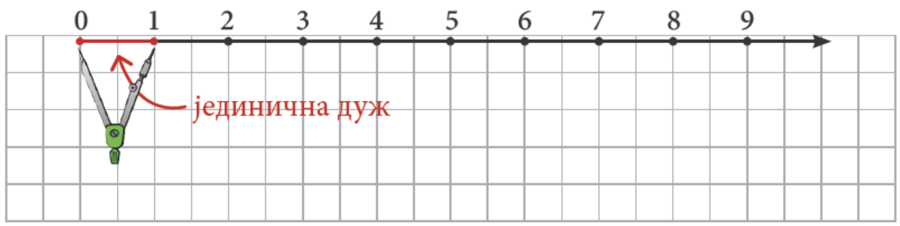
в) За Марков рођендан наручено је 12 пица, а њему је на прославу дошло 9 другова. Колико ће сваки од њих појести, рачунајући и Марка?

г) Да ли је могуће поделити 38 оловака на 18 ученика, тако да сваки од њих добије једнак број оловака?

11. Представи бројеве 6 и 9 у облику разломка чији именилац је једнак:
а) 2; б) 3; в) 5.

4.2. Придруживање тачака бројевне полуправе разломцима

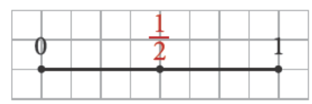
Подсетимо се како се бројеви из скупа $\mathbb{N}_0$ представљају на бројевној полуправој. Бројевна полуправа је одређена својим почетком и јединичном дужи. Тачке које представљају природне бројеве добијамо надовезивањем јединичне дужи удесно одређен број пута. Јединичну дуж бирамо произвољно, најчешће користећи квадратну мрежу у свесци.



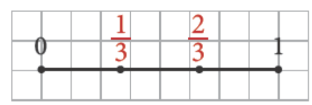
Разломци се могу представити на бројевној полуправој. Сваком разломку, правом и неправом, може се придружити једна тачка бројевне полуправе.

Посматрајмо најпре дуж чије крајње тачке одговарају бројевима 0 и 1. Приказаћемо поступак којим се представљају **прави разломци** на бројевној полуправој.

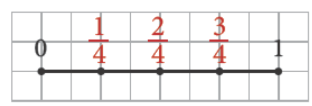
Ако ту дуж поделимо на два једнака дела, као на слици, тој деобној тачки придружимо разломак $\frac{1}{2}$.



Ако поделимо на три једнака дела, као на слици, деобним тачкама додељујемо разломке $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.



Ако сада исту дуж поделимо на четири једнака дела, добијамо три тачке којима придружујемо разломке $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$.



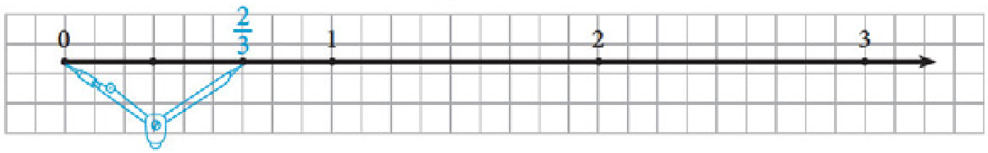
Овај поступак можемо да наставимо тако да за сваки природан број n ($n \geq 5$), при дељењу дужи чији крајеви одговарају бројевима 0 и 1 на n једнаких делова, добијамо деобне тачке које придружујемо разломцима $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{(n-1)}{n}$. На овај начин, сваком правом разломку $\frac{m}{n}$ ($m < n$) придружујемо једну тачку дужи чији су крајеви означени са 0 и 1.

Посматрајмо сада један **неправи разломак**, на пример $\frac{5}{3}$. Видели смо да се он може представити у облику мешовитог броја, $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

1. При представљању неправог разломка или мешовитог броја најпре треба одредити између која два природна броја се налази:

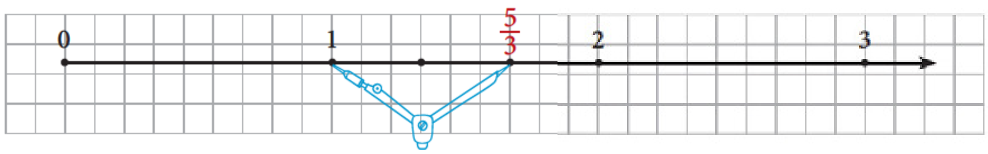
   Како је $1 < 1\frac{2}{3} < 2$, разломку $\frac{5}{3}$ ћемо придружити тачку дужи чији су крајеви означени са 1 и 2.

2. Одредимо дужину дужи која одговара разломљеном делу мешовитог броја: У овом примеру то је дуж дужине $\frac{2}{3}$ јединичне дужи.



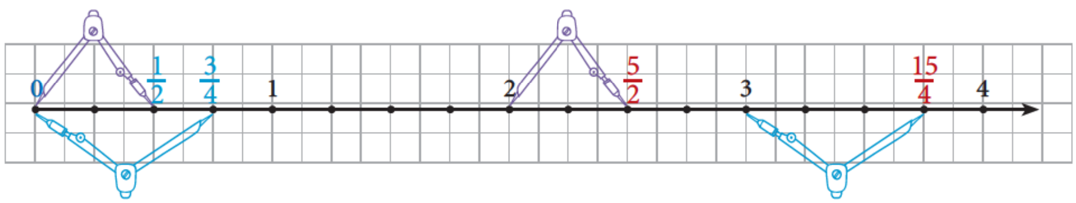
3. Тачка која одговара разломку добија се надовезивањем те дужи на дуж чији су крајеви бројеви између којих се разломак налази:

Надовезивањем дужи дужине $\frac{2}{3}$ на дуж чији су крајеви 0 и 1, добијамо тачку коју придружујемо разломку $\frac{5}{3}$.



ПРИМЕР 1. Одреди на бројевној полуправој тачке које одговарају разломцима $\frac{5}{2}$ и $\frac{15}{4}$.

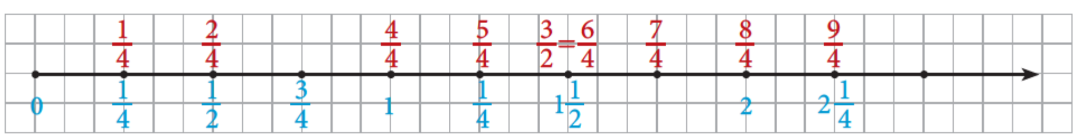
РЕШЕЊЕ Како је $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ и $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$, тачка која одговара разломку $\frac{5}{2}$ припада дужи чији су крајеви означени са 2 и 3, а тачка која одговара разломку $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ припада дужи чији крајеви су означени са 3 и 4.



ПРИМЕР 2. а) Одреди на бројевној полуправој тачке које одговарају разломцима:

$\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$.

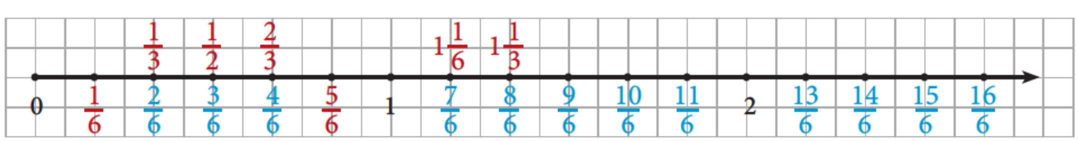
РЕШЕЊЕ Видимо да је $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, а такође и $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.



б) Одреди на бројевној полуправој тачке које одговарају разломцима:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{6}$.

РЕШЕЊЕ



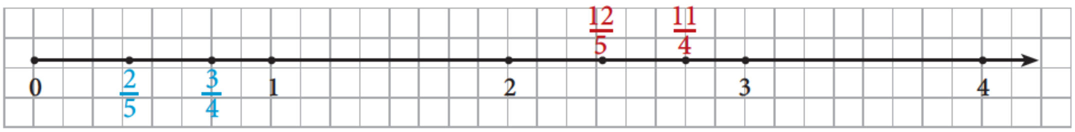
Поменули смо да се природни бројеви a и b на бројевној полуправој пореде тако да ако се тачка која одговара броју a налази лево од тачке која одговара броју b, тада је $a < b$. На исти начин се пореде и разломци.

ПРИМЕР 3. На бројевној полуправој одреди положај тачака придружених бројевима:

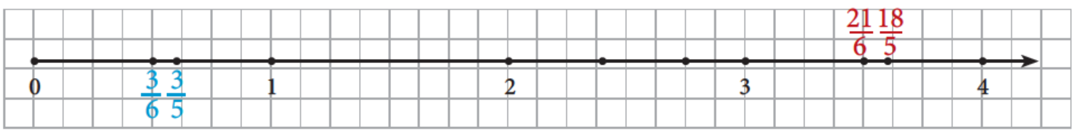
а) $\frac{11}{4}$ и $\frac{12}{5}$; б) $\frac{21}{6}$ и $\frac{18}{5}$

и упореди те разломке.

РЕШЕЊЕ а) Пошто је $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$ и $\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$, добијамо да је $\frac{12}{5}<\frac{11}{4}$.



б) Како је $\frac{21}{6}=3\frac{3}{6}$ и $\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$, видимо да је $\frac{21}{6}<\frac{18}{5}$.



ЗАДАЦИ

12. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају разломцима $\frac{1}{6}, \frac{2}{8}$ и $\frac{3}{10}$.

13. Напиши три разломка чије су вредности између 0 и $\frac{1}{2}$ и означи тачке бројевне полуправе које им одговарају.

14. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају разломцима $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ и $\frac{11}{3}$.

15. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају разломцима $\frac{7}{3}$ и $\frac{11}{3}$ и упореди те разломке.

16. Поређај по величини разломке $\frac{1}{3}, \frac{11}{5}, \frac{9}{7}, \frac{4}{5}$ и $\frac{7}{7}$.

17. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају разломцима:
а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{5}{2}$; г) $\frac{7}{2}$; д) $\frac{9}{2}$.

18. Означи на бројевној полуправој тачке које одговарају бројевима 0 и 2, а затим одреди три тачке које дуж, чији су крајеви 0 и 2, деле на четири једнака дела. Који разломци одговарају деобним тачкама?

19. Помоћу шестара одреди на бројевној полуправој тачке које одговарају бројевима $\frac{31}{2}$ и $\frac{23}{4}$.

20. Означи на бројевној полуправој тачке које одговарају бројевима $\frac{21}{3}$ и $\frac{12}{3}$. Да ли су ове две тачке једнако удаљене од тачке која одговара броју 2?

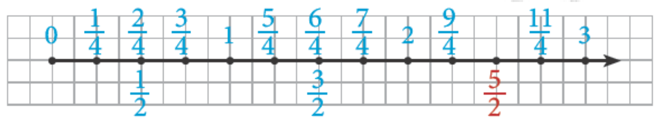
21.* На бројевној полуправој уочи тачке које одговарају бројевима 3 и 4, а затим одреди разломак ком одговара тачка једнако удаљена од уочених тачака.

4.3. Проширивање, скраћивање и упоређивање разломака

Проширивање разломака

ПРИМЕР 1. Прикажи на бројевној полуправој разломке $\frac{5}{2}$ и $\frac{10}{4}$.

РЕШЕЊЕ Приметимо на слици да разломцима $\frac{5}{2}$ и $\frac{10}{4}$ одговара једна иста тачка.



Можемо да кажемо да су разломци $\frac{5}{2}$ и $\frac{10}{4}$ једнаки, тј. $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$.

Приметимо да је $10 = 5 \cdot 2$ и $4 = 2 \cdot 2$, па је $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}$.

Ако је природан број $n > 1$, кажемо да се разломак $\frac{a}{b}$ може **проширити** бројем n, тако што се бројилац и именилац разломка помноже бројем n. При томе се добија разломак $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ чија је вредност једнака вредности разломка $\frac{a}{b}$.

Уопште, важи $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, за $a, b, n \in N$.

Проширити разломак бројем $n > 1$ значи **помножити** и бројилац и именилац тог разломка истим бројем, што значи да ће вредност разломка остати иста, али ће бити записан у другом облику.

ПРИМЕР 2. Прошири разломак $\frac{2}{5}$ са 2 и са 3.

$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$ $\qquad$ $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$

Видимо да оба добијена разломка имају исту вредност, јер су настали од разломка $\frac{2}{5}$, чији су и бројилац и именилац помножени истим бројем, па је $\frac{4}{10} = \frac{6}{15}$.

Количник се не мења ако и дељеник (бројилац) и делилац (именилац) помножимо истим бројем, тј. вредност разломка се не мења када га проширимо.

ПРИМЕР 3. Прошири разломак $\frac{3}{7}$ са 2, 3, 4 и 5.

РЕШЕЊЕ

$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ $\qquad$ $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{9}{21}$ $\qquad$ $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$ $\qquad$ $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$

Скраћивање разломака

Ако су бројилац и именилац неког разломка $\frac{a}{b}$ дељиви (без остатка) једним истим природним бројем m ($m > 1$), тада их можемо поделити тим бројем m. Овај поступак се назива скраћивање разломка. Скраћивањем се, као и проширивањем, добија разломак који има исту вредност , тј. $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$.

ПРИМЕР 4. Скрати разломак $\frac{15}{6}$.

РЕШЕЊЕ Приметимо да су $3|15$ и $3|6$, па је $\frac{15}{6} = \frac{15 : 3}{6 : 3} = \frac{5}{2}$.

Вредност разломка се не мења када га скратимо, јер се количник не мења ако и дељеник (бројилац) и делилац (именилац) поделимо истим бројем. Вредност разломка остаје иста, али ће бити записан у другом облику.

ПРИМЕР 5. Скрати разломак $\frac{6}{12}$ са 2 и са 3.

РЕШЕЊЕ

$\frac{6}{12} = \frac{6 : 2}{12 : 2} = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $\frac{6}{12} = \frac{6 : 3}{12 : 3} = \frac{2}{4}$

Видимо да оба добијена разломка имају исту вредност, јер су настали од $\frac{6}{12}$, само што имају другачији запис, па је $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$.

ПРИМЕР 6. Пронађи НЗД за бројеве 24 и 84 и затим скрати разломак $\frac{24}{84}$ тим највећим заједничким делиоцем.

РЕШЕЊЕ

$$\begin{array}{r|l} 24,\ 82 & 2 \\ 12,\ 42 & 2 \\ 6,\ 21 & 3 \\ 2,\ 7 & \end{array}$$

Видимо да је НЗД(24,84) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, јер су бројеви 2 и 7 узајмно прости, па је $\frac{24}{84} = \frac{24 : 12}{84 : 12} = \frac{2}{7}$.

НЗД(24, 84) смо могли да одредимо и применом Еуклидовог алгоритма.

Разломак $\frac{24}{84}$ смо могли да скратимо и постепено, најпре са 2, затим поново са 2 и на крају са 3:

$$\frac{24}{84} = \frac{24 : 2}{84 : 2} = \frac{12}{42} = \frac{12 : 2}{42 : 2} = \frac{6}{21} = \frac{6 : 3}{21 : 3} = \frac{2}{7}$$

Ипак, очигледно да је приказани поступак коришћењем НЗД(24, 84) ефикаснији.

У овом примеру смо видели да при скраћивању разломка $\frac{24}{84}$ бројем 12 добијамо разломак $\frac{2}{7}$ чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви.

Ако разломак $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$ скратимо бројем $m = \text{НЗД}(a, b)$, добићемо разломак $\frac{a:m}{b:m}$, чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви. Такав разломак се назива **несводљив разломак**.

ПРИМЕР 7. Дат је скуп разломака $\{\frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \frac{13}{2}, \frac{4}{12}, \frac{49}{14}\}$. Који од елемената овог скупа су несводљиви разломци? Преостале разломке скрати тако да се добију несводљиви разломци.

РЕШЕЊЕ Насводљиви су разломци $\frac{5}{9}$ и $\frac{13}{2}$, јер су бројеви 5 и 9, односно 13 и 2 узајамно прости.

$\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$, $\frac{49}{14} = \frac{49:7}{14:7} = \frac{7}{2}$.

Пошто су бројилац и именилац узајамно прости, несводљив разломак се не може више скратити.

Упоређивање разломака

Како да знамо који је од два разломка већи а који мањи, а да притом не знамо њихову позицију на бројевној полуправој? Како упоредити $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$?

Било би нам лакше да упоредимо разломке који имају једнаке бројиоце (на пример, $\frac{2}{5}$ и $\frac{2}{8}$) или једнаке имениоце (на пример, $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{4}$). Зато ћемо поћи од најлакшег случаја, а то је упоређивање разломака са једнаким имениоцима.

• Упоређивање разломака једнаких именилаца

Очигледно је да је од два разломка са истим имениоцем већи онај чији је бројилац већи. На пример: $\frac{35}{8} > \frac{29}{8}$, $\frac{13}{4} < \frac{15}{4}$, $\frac{3}{5} < \frac{5}{5}$, $\frac{5}{n} < \frac{7}{n}$ $(n \in N)$.

Ако су a, b, c природни бројеви и $a < c$, тада је $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$.
Од два разломка једнаких именилаца већи је онај чији је бројилац већи.

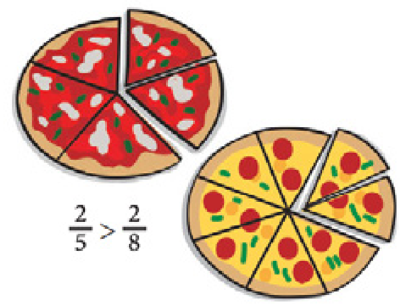
ПРИМЕР 8. Упореди разломке $\frac{3}{6}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$.

РЕШЕЊЕ Видимо да су имениоци разломака једнаки, па их упоређујемо према њиховим бројиоцима у растућем поретку (од најмањег ка највећем):

$\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{7}{6} < \frac{11}{6}$

• Упоређивање разломака једнаких бројилаца

Видимо да када покушамо да упоредимо два разломка истих бројилаца, на пример, $\frac{2}{5}$ и $\frac{2}{8}$ не можемо тврдити да је разломак са већим имениоцем уједно и већи. Заправо, када целину делимо на 5 или на 8 делова, видимо да су петине веће од осмина. Зато закључујемо да су 2 петине веће од 2 осмине.



Такође, $\frac{6}{1} > \frac{6}{2} > \frac{6}{3} > \frac{6}{7} > \frac{6}{11}$ ... што значи да се са повећањем имениоца вредност разломка смањује. То значи да је $\frac{n}{17} > \frac{n}{28}$.

> Ако су a, b, c природни бројеви и $a < c$, тада је $\frac{b}{a} > \frac{b}{c}$.
> Од два разломка једнаких бројилаца већи је онај чији је именилац мањи.

ПРИМЕР 9. Упореди разломке $\frac{7}{9}, \frac{7}{3}, \frac{7}{1}, \frac{7}{12}, \frac{7}{5}, \frac{7}{15}, \frac{7}{20}$.

РЕШЕЊЕ

Видимо да су бројиоци разломака једнаки, па их упоређујемо према њиховим имениоцима у растућем поретку (од најмањег ка највећем):

$$\frac{7}{20} < \frac{7}{15} < \frac{7}{12} < \frac{7}{9} < \frac{7}{5} < \frac{7}{3} < \frac{7}{1}$$

• Упоређивање разломака различитих именилаца и бројилаца

Већ смо видели да се било која два разломка могу упоредити на бројевној полуправој. Међутим, поступак који ћемо сада упознати, знатно је једноставнији и прецизнији.

ПРИМЕР 10. Упореди разломке $\frac{11}{4}$ и $\frac{12}{5}$.

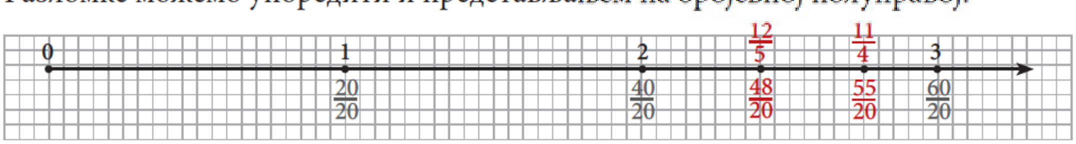
РЕШЕЊЕ

Пре свега, уочимо да је НЗС(4, 5) = 20. Први разломак ћемо проширити са 5, тј. са $\frac{\text{НЗС}(4,5)}{4}$. Други разломак ћемо проширити са 4, односно $\frac{\text{НЗС}(4,5)}{5}$.

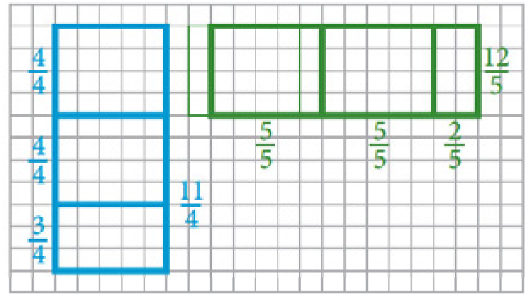
Добијамо да је $\frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{55}{20}$ и $\frac{12}{5} = \frac{12 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{48}{20}$.

Како је $\frac{55}{20} > \frac{48}{20}$, то је и $\frac{11}{4} > \frac{12}{5}$.

Разломке можемо упоредити и представљањем на бројевној полуправој.



Да је $\frac{11}{4} > \frac{12}{5}$ може се закључити и геометријски, као што је приказано на слици.



Поступак приказан у овом примеру често се назива довођење разломка на заједнички именилац. У случају разломака $\frac{11}{4}$ и $\frac{12}{5}$ заједнички именилац је број 20.

Поступак којим од разломака различитих именилаца проширивањем или скраћивањем добијамо разломке чији су имениоци једнаки, називамо **довођење разломака на заједнички именилац**. Обично се узима да је заједнички именилац за разломке $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \in N)$ најмањи заједнички садржалац бројева b и d.

ПРИМЕР 11. Одреди НЗС(6, 9), а затим упореди разломке $\frac{17}{6}$ и $\frac{26}{9}$.

РЕШЕЊЕ

6,	9	2
3,	9	3
1,	3	3
1,	1	

Видимо да је НЗС(6, 9) = $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Први разломак множимо са $\frac{\text{НЗС}(6, 9)}{6} = \frac{18}{6} = 3$ и добијамо $\frac{17}{6} = \frac{17 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{51}{18}$.

Други разломак множимо са $\frac{\text{НЗС}(6, 9)}{9} = \frac{18}{9} = 2$ и добијамо $\frac{26}{9} = \frac{26 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{52}{18}$.

Како је $\frac{26}{9} = \frac{52}{18} > \frac{51}{18} = \frac{17}{6}$, закључујемо да је $\frac{26}{9} > \frac{17}{6}$.

На сличан начин можемо упоредити разломке **довођењем на заједнички бројилац**.

ПРИМЕР 12. Упореди разломке $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ свођењем на заједнички бројилац.

РЕШЕЊЕ

Потребно је да одредимо НЗС(5, 3). Пошто знамо да су бројеви 5 и 3 узајамно прости, то ће њихов НЗС бити њихов производ: НЗС(5, 3) = $5 \cdot 3 = 15$.
Стога, проширујемо оба разломка до бројиоца 15.

$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$ $\quad$ $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$

Пошто је код разломака са једнаким бројиоцима већи онај разломак чији је именилац мањи, то ће бити $\frac{15}{18} > \frac{15}{40}$, а тиме је и $\frac{5}{6} > \frac{3}{8}$.

ПРИМЕР 13. Наћи x ако је $\frac{x}{5} = \frac{3}{15}$.

РЕШЕЊЕ

Видимо да се разломак $\frac{3}{15}$ могао добити проширивањем разломка $\frac{x}{5}$ са 3.

$\frac{x \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$ из чега следи $\frac{x \cdot 3}{15} = \frac{3}{15}$, па је онда $x \cdot 3 = 3$, те је $x = 3 : 3 = 1$.

Значи да је $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$, што нам даје унакрсно множење бројилаца са имениоцима:

$1 \cdot 15 = 5 \cdot 3$

Тако да смо ову једначину могли решити управо тако:

$x \cdot 15 = 3 \cdot 5 = 15$ из чега произлази да је $x = 15 : 15 = 1$.

Ако су разломци $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ једнаки, тада су им и унакрсни производи једнаки.
Ако је $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$, тада је $\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$.

Реши **тестове број 27, 28 и 29** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

22. Прошири разломак $\frac{7}{9}$ са 5, а разломак $\frac{6}{5}$ са 9.

23. Одреди НЗД(24, 42), а затим скрати разломак $\frac{24}{42}$.

24. Скрати разломак $\frac{144}{216}$, тако да се добије несводљив разломак.

25. Поређај по величине разломке $\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{5}{5}, \frac{2}{5}, \frac{11}{5}$.

26. Одреди НЗС(42, 56), а затим упореди разломке $\frac{17}{42}$ и $\frac{23}{56}$.

27. Одреди НЗС(4, 6, 9), а затим упореди разломке $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{6}$ и $\frac{19}{9}$.

28. Попуни празна места, тако да важе једнакости:

а) $\frac{1}{3} = \frac{\square}{9} = \frac{7}{\square}$; б) $\frac{12}{9} = \frac{\square}{27} = \frac{4}{\square}$.

29. Дат је разломак $\frac{p}{q}$ $(p \neq q)$. Да ли се вредност разломка мења, ако се:

а) бројилац и именилац помноже истим бројем различитим од нуле?

б) бројиоцу и имениоцу дода исти број различит од нуле?

30. Одреди НЗС(18, 27), а затим разломке $\frac{5}{18}$ и $\frac{7}{27}$ прошири, тако да им имениоци буду једнаки.

31.* Два радника раде неки посао. Ако један уради $\frac{1}{7}$, а други $\frac{2}{15}$ тог посла, који радник је урадио већи део посла од оног другог радника?

4.4. Децимални запис разломка и превођење у запис облика $\frac{a}{b}$ $(a \in N_0, b \in N)$

Децимални запис разломака

Често се у свакодневном животу срећемо са децималним записом појединих величина. Тако се, на пример, каже да је једна ученица висока 1,65 m или да се у паковању млека налази 0,5 l.

Овакав запис, у ком се појављује такозвана децимална запета, представља број целих у саставу неког разломка (то су цифре испред децималне запете), а затим број десетих, стотих, хиљадитих... делова (то су цифре редом иза децималне запете).

Тако је поменута ученица висока 1 m и 65 стотих делова метра, а у паковању се налази нула целих и 5 десетих делова литра.

Превођење разломака у децимални запис

Појам децималног записа разломка представићемо примером:

чита се:
23 цела и 4 хиљаде 91 десетхиљадити део

Цифре разломљеног дела називају се **децимале** и њихова позиција се броји почевши с десна од децималне запете.

Приметимо да овај децимални запис има 4 децимале као што и број 10 000 има 4 нуле.

Децимални разломци, тј. разломци чији су имениоци декадне јединице 10, 100, 1 000, итд. једноставно се представљају у облику децималног записа:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \quad \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad \frac{1}{1\,000} = 0{,}001 \quad \ldots$$

То су основни децимални разломци, јер им је бројилац једнак 1.

ПРИМЕР 1. Бројеве $\frac{7}{10}$, $\frac{423}{100}$ и $\frac{304}{1\,000}$ представи у децималном запису.

РЕШЕЊЕ $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\quad \frac{423}{100} = 4\frac{23}{100} = 4{,}23$; $\quad \frac{304}{1\,000} = 0{,}304$.

Децимални запис разломка има онолико децимала колико има нула у имениоцу децималног разломка.

Најпре ћемо показати како се у децималном запису представљају природни бројеви пошто се и они могу записати у облику разломка.

ПРИМЕР 2. Знамо да је сваки природан број заправо разломак са имениоцем 1.
На пример, $5 = \frac{5}{1}$, што представља 5 целих и нема разломљеног дела.

» **Имагинаран** – реч латинског порекла и значи замишљен

Зато су код природних бројева све децимале у разломљеном делу једнаке нулама и оне се зову **имагинарне нуле** и има их бесконачно много.
$5 = 5{,}000000...$

На крају сваког децималног записа било ког разломка може се додати бесконачно много нула. Вредност броја се неће променити.

ПРИМЕР 3. Разломак $\frac{3}{10} = 0{,}3$ можемо унедоглед проширивати бројем 10.

$\frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{30}{100} = 0{,}30$ $\quad \frac{30}{100} = \frac{30 \cdot 10}{100 \cdot 10} = \frac{300}{1\,000} = 0{,}300$ итд.

Видимо да је $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000 = ...$

Можемо дописивати или брисати произвољан број имагинарних нула на крају децималног дела.

Такође, то важи и за децималне записе који имају још децимала различитих од нуле: $2{,}45 = 2{,}450 = 2{,}4500 = ...$

Поједини разломци се применом познатог поступка проширивања или скраћивања могу довести до децималних разломака.

ПРИМЕР 4. Бројеве $\frac{2}{5}$, $\frac{56}{40}$, $\frac{4}{25}$ и $\frac{5\,026}{2\,000}$ довести на облик децималних разломака, а затим представи у децималном запису.

РЕШЕЊЕ

$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4;$ $\quad \frac{56}{40} = \frac{56 : 4}{40 : 4} = \frac{14}{10} = 1{,}4;$

$\frac{4}{25} = \frac{4 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{16}{100} = 0{,}16;$ $\quad \frac{5\,026}{2\,000} = \frac{5\,026 : 2}{2\,000 : 2} = \frac{2513}{1\,000} = 2{,}513.$

Разломци чији имениоци представљају степене бројева 2 или 5 и могу се проширити до декадних именилаца, имају **коначан децимални запис** (разломљен део има коначан број цифара).

До децималног записа бројева могли смо да дођемо и дељењем бројиоца имениоцем. На пример, $\frac{56}{40} = 56 : 40$, па добијамо:

$$
\begin{array}{l}
56 = 56{,}00... : 40 = 1{,}4 \\
\underline{-40} \\
\;\;160 \longrightarrow \text{имагинарна нула} \\
\underline{-160} \\
\;\;\;\;0
\end{array}
$$

или

$$
\begin{array}{l}
5026 = 5026{,}\overbrace{00000}^{\text{имагинарна нула}}... : 2000 = 2{,}513 \\
\underline{-4000} \\
\;\;10260 \\
\underline{-10000} \\
\;\;\;\;2600 \\
\;\;\underline{-2000} \\
\;\;\;\;\;6000 \\
\;\;\;\underline{-6000} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Децималну запету пишемо када је остатак мањи од делиоца и тада остатку са десне стране дописујемо нулу.

Има разломака код којих се именилац ни проширивањем, ни скраћивањем не може довести до декадних јединица 10, 100, 1 000, итд.

ПРИМЕР 5. Број $\frac{1}{3}$ представи у децималном запису.

РЕШЕЊЕ Поделимо бројилац имениоцем:

$$\begin{array}{l} 1 : 3 = 0{,}333\ldots \\ -\underline{0} \\ \ \ 10 \\ -\underline{\ \ 9} \\ \ \ \ \ 10 \\ \ \ -\underline{\ \ 9} \\ \ \ \ \ \ \ 10 \\ \ \ \ \ -\underline{\ \ 9} \\ \ \ \ \ \ \ \ 1\ldots \end{array}$$

Очигледно је да се поступак дељења броја 1 бројем 3 не завршава. Због сталног понављања цифре 3 у количнику, кажемо да децимални број 0,333... има бесконачно много цифара 3.

Слично би се добило $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ и $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$

Понекад се не понавља само једна цифра, већ група цифара. Дељењем можемо да видимо да је, на пример $\frac{6}{11} = 0{,}545454\ldots$, а $\frac{25}{37} = 0{,}675675675\ldots$

Група цифара која се стално понавља у децималним запису разломка $\frac{a}{b}$, назива се **период**.

Код децималног записа броја $\frac{1}{9}$ период је дужине 1, код разломка $\frac{6}{11}$ дужине 2, а код $\frac{25}{37}$ дужине три. Зато се ради краћег записивања периоди стављају у заграде:

$0{,}66666\ldots = 0{,}(6)$ $\quad 0{,}54545454\ldots = 0{,}(54)$ $\quad 0{,}675675675675\ldots = 0{,}(675)$

Разломци који се не могу проширити до декадних јединица, јер њихови имениоци садрже у себи просте бројеве различите од 2 или 5, па се само дељењем бројиоца имениоцем могу превести у децимални запис, имају **бесконачан периодичан децимални запис**.

Сваки разломак, па и природан број, има свој коначан или бесконачан периодичан децимални запис. Ипак, постоје и децимални записи који су **бесконачни непериодични**, што значи да не можемо, сем непосредним рачунањем, да предвидимо наредну цифру. Такви децимални записи немају свој разломак. На пример, $5{,}746937006214427693\ldots$ је бесконачан непериодичан децимални број и нема свој разломак.

ПРИМЕР 6. Одреди период у децималном запису разломка $\frac{1}{7}$.

РЕШЕЊЕ Како је $1 : 7 = 0{,}142857142857\ldots$ период је 142857 и има дужину шест.

Понекад понављање цифара у дециманом запису не започне одмах после децималне запете. На пример, $\frac{1\,924}{8\,325} = 0{,}23111\ldots$ Група децимала пре првог појављивања периода назива се **претпериод**.

Превођење из децималног записа разломка са коначним бројем децимала у разломак облика $\frac{a}{b}$ ($a \in N_0$, $b \in N$) по правилу је једноставнији.

Превођење децималног записа у разломак

ПРИМЕР 7. Преведи бројеве 0,9; 0,37; 1,001 и 35,9473 у разломке облика $\frac{a}{b}$ ($a \in N_0$, $b \in N$).

РЕШЕЊЕ

$0{,}9 = \frac{9}{10}$; $\quad 0{,}37 = \frac{37}{100}$; $\quad 1{,}001 = \frac{1\,001}{1\,000}$;

$$35{,}9473 = 35 + 0{,}9473 = 35 + \frac{9473}{10\,000} = \frac{359473}{10\,000}$$

Број $0, a_1 a_2 \ldots a_n$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ су цифре) се претвара у разломак облика $\frac{a}{b}$, тако што број a представљају све децимале, а број b декадна јединица оног реда колико има цифара иза децималне запете (ако је само једна цифра, тада је $b = 10$, ако постоје две цифре, тада је $b = 100$ итд).

Реши **тест број 30** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

32. На боци сока пише да је запремина сока 0,75 l. Представи овај број у облику разломка.

33. Разломке $\frac{3}{100}$, $\frac{33}{100}$ и $\frac{333}{100}$ представи у децималном запису.

34. Бројеве $\frac{7}{50}$, $\frac{131}{20}$ и $\frac{6\,069}{3\,000}$ представи у децималном запису.

35. Дељењем бројиоца имениоцем разломке представи у децималном запису:
а) $\frac{31}{4}$; б) $\frac{21}{25}$; в) $\frac{11}{9}$.

36. Преведи разломке а) 0,37; б) 8,101; в) 74,3; г) 0,0005 у разломак облика $\frac{a}{b}$ ($a, b \in N$).

37. Одреди децимални запис бројева $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$ и за сваки од њих дужине периода понављања цифара иза децималне запете.

38. Који од понуђених бројева је једнак броју 0,7 ?
а) $\frac{10}{7}$; б) $\frac{7}{10}$; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{7}{1}$.

39. Напиши бројеве: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{10}$ у децималном запису.

40. Неправе разломке $\frac{51}{2}$; $\frac{113}{4}$; $\frac{122}{5}$; $\frac{1\,251}{8}$ прикажи у децималном запису.

41.* Изрази у метрима у децималном запису: а) 80 cm; б) 75 cm; в) 3 cm; г) 1,3 cm.

4.5. Упоређивање и заокругљивање бројева у децималном запису

У претходним одељцима смо упоређивали разломке $\frac{11}{4}$ и $\frac{12}{5}$ на бројевној полуправој и геометријски и закључили да је $\frac{11}{4} > \frac{12}{5}$. Представимо сада ове разломке у децималном запису:

цифра јединица

$$\frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{275}{100} = 2{,}75 \qquad \frac{12}{5} = \frac{12 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{240}{100} = 2{,}4$$

$7 > 4$

Видимо да бројеви 2,75 и 2,4 имају исте цифре јединица (цифра 2), али је прва цифра иза децималног записа, цифра десетих делова броја $\frac{11}{4}$ (цифра 7) већа од прве цифре иза децималног записа броја $\frac{12}{5}$ (цифра 4).

Слично, $20{,}305 < 20{,}31$

$0 < 1$

Два броја у децималном запису могу се упоређивати тако што:

1. упоредимо целе делове бројева, па је већи онај чији је цео део већи;
2. ако су цели делови једнаки, с лева на десно поредимо децимале тих бројева, па је већи онај број код кога прво наиђемо на већу децималу на истом месту.

ПРИМЕР 1. а) $5{,}33 < 5{,}41$; б) $51{,}03 > 51{,}01$; в) $0{,}195 < 0{,}2$.

РЕШЕЊЕ

а) Упоређивањем одговарајућих цифара долазимо до разлика у првим децималама, тј. $3 < 4$, па закључујемо да је $5{,}33 < 5{,}41$.

б) Упоређивањем одговарајућих цифара у овом задатку видимо да се разликују на месту других децимала, тј. $3 > 1$, па је $51{,}03 > 51{,}01$.

в) Раније смо показали да се сваки децимални запис не мења по вредности ако му се дода или одузме произвољан број имагинарних нула на крају записа. Зато број $0{,}2 = 0{,}200$, па ће бити $0{,}195 < 0{,}200$. Поновним упоређивањем одговарајућих цифара бројеви се разликују по првим децималама, тј. $1 < 2$, па је и $0{,}195 < 0{,}200$, тј. $0{,}195 < 0{,}2$.

ПРИМЕР 2. Поређај по величини бројеве $a = 3{,}101$, $b = 3{,}011$, $c = 3{,}1110$, $d = 3{,}1111$.

РЕШЕЊЕ

$a > b$, тј. $3{,}101 > 3{,}011$ јер је прва децимала броја a већа од прве децимале броја b, тј. $1 > 0$.
$c > a$, тј. $3{,}1110 > 3{,}101$ јер је друга децимала броја c већа од друге децимале броја a, тј. $1 > 0$.
$d > c$ тј. $3{,}1111 > 3{,}1110$ јер је четврта децимала броја d већа од четврте децимале броја c, док су им све претходне цифре једнаке.

Дакле, $b < a < c < d$, тј. $3{,}011 < 3{,}101 < 3{,}1110 < 3{,}1111$.

Заокругљивање бројева у децималном запису

У свакодневном животу често се појави потреба за заокругљивањем појединих бројева. На пример, кажемо да је број становника неког места 20 000, или да је маса једног слона 5,5 *t*. У оба случаја ради се о приближним вредностима. Понекад превелика тачност није ни потребна. Код зидања зграде мајстори не мере количину потребног цемента у грамима, нити се количина воде у неком језеру изражава у литрима.

Заокруглити неки децимални број значи одредити његову приближну вредност на одређен број децимала.

Заокруглити број $6{,}34 \approx 6{,}3$

Заокружити број 6,34

Правила заокругљивања ако је број *b* добијен заокругљивањем броја *a*:

1) $5{,}73 \approx 5{,}7$ Ако је прва цифра коју одбацујемо мања од 5, онда цифре испред ње остају непромењене.

2) $48{,}3478 \approx 48{,}35$ Ако је прва цифра коју одбацујемо већа од 5, онда се цифра испред одбачене повећава за 1, а остале остају непромењене.

3) $45{,}58978 \approx 45{,}590$ Ако се цифра 9 увећава за 1, онда се уместо ње пише 0, а цифра испред се увећава за 1.

4) $73{,}1587 \approx 73{,}2$ Ако је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње има још цифара различитих од нуле, онда се цифра испред одбачене увећава за 1, а остале цифре остају непромењене.

5) $74{,}375 \approx 74{,}38$ Ако је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње нема других цифара различитих од нуле, а цифра испред одбачене је непарна, онда се та непарна цифра увећава за 1, а остале цифре остају непромењене.

6) $74{,}385 \approx 74{,}38$ Ако је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње нема других цифара различитих од нуле, а цифра испред одбачене парна, тада све цифре испред одбачене остају непромењене.

ПРИМЕР 3. Приликом мерења количине шећера потребне за израду колача, у једној посластичарници три радника су измерила следеће количине: 5,346 kg, 5,413 kg и 5,397 kg. Заокругли ове резултате на две децимале.

РЕШЕЊЕ Цифра хиљадитих код првог радника је 6, па како је већа од 5, број се заокругљује на 5,35 kg.

У другом случају цифра хиљадитих је 3, мања је од 5 и тада број заокругљујемо на 5,41 kg.

Код трећег радника цифра хиљадитих је 7, већа је од 5 и зато претпоследњу цифру повећавамо за 1. Како је та претпоследња цифра 9, уместо ње се пише 0, а претходну цифру, цифру 3, повећавамо за један. Дакле, добијамо 5,40 kg.

При заокругљивању бројева, у зависности од тога колика се жели тачност, неке цифре се задржавају, а неке одбацују. Притом се последња од задржаних цифара некад не мења, а некад повећава за 1.

При заокругљивању бројева последња задржана цифра повећава се за 1 у следећим случајевима:

- када је прва цифра од свих које се одбацују већа од 5;
- када је прва цифра од оних које се одбацују једнака 5, а остале после ње нису све нуле.
- када је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње нема других цифара различитих од нуле, а цифра испред одбачене је непарна.

ПРИМЕР 4. Број $a = 0,27154$ заокругли на: а) једну; б) две; г) три; д) четири децимале.

РЕШЕЊЕ

а) Како је прва децимала која се одбацује једнака 7, што значи већа од 5, број a заокругљен на једну децималу је 0,3.

$$a = 0{,}2\overset{7>5}{7}154 \approx 0{,}3$$

б) Трећа децимала броја a је 1, дакле мања од 5, па се друга децимала при овом заокругљивању не мења и број a заокругљен на две децимале је 0,27.

$$a = 0{,}27\overset{1<5}{1}54 \approx 0{,}27$$

в) У овом случају прва цифра, која се одбацује је једнака 5, иза ње има цифара различитих од нуле (4), па се последња која остаје повећава за 1 и биће 0,272.

$$a = 0{,}271\overset{5=5}{5}4 \approx 0{,}272$$

г) Из истог разлога као у случају б) последња цифра која се задржава се не мења, дакле добијамо 0,2715.

$$a = 0{,}2715\overset{4>0}{4} \approx 0{,}2715$$

При заокругљивању се користи још једно правило – **правило парне цифре**.

Ако је прва одбачена цифра 5 и иза ње нема цифара различитих од нуле, а последња задржана цифра је парна, онда се она не мења. Ако је у истој ситуацији последња задржана цифра непарна, та непарна цифра се повећава за 1.

ПРИМЕР 5. Бројеве $a = 2{,}3155$ и $b = 3{,}7045$ заокругли на три децимале.

РЕШЕЊЕ Добија се $a = 2{,}316$ и $b = 3{,}704$ по правилу парне цифре.

Реши тест број 32 на електронској платформи еЗбирка: http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

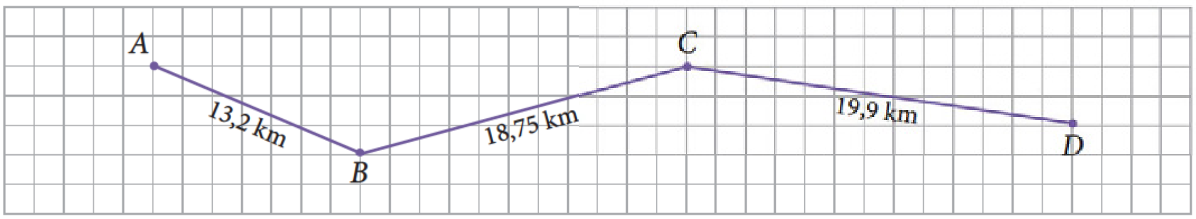
42. Поређај по величини бројеве $a = 1{,}05$; $b = 1{,}15$; $c = 1{,}1$; $d = 1{,}50$; $e = 1{,}10$.

43. Који од бројева 2,53 или 2,530 је већи?

44. Заокругли на две децимале бројеве:
а) 5,111; б) 317,238; в) 0,477; г) 1,333; д) 7,245; ђ) 8,175.

45. Број 7,054321539 заокругли на: а) 8; б) 7; в) 6 децимала.

46. Пређени пут од места A до места D приказан на слици заокругли на цео број километара.



47. Дати су бројеви $a = 3$; $b = 3{,}3$; $c = 0{,}3$; $d = 0{,}03$.
а) Који од ових бројева је највећи?
б) Који од ових бројева је најмањи?

48. Подели бројеве: а) 2 и 3; б) 5 и 7 и добијене количнике заокругли на три децимале.

49. Цвећар Жан продаје букете цвећа у Паризу. Од власника продавнице добио је задатак да заокругли цене букета на најближи цео број евра. Колике ће бити нове цене букета, ако су пре заокругљивања биле:
а) 15,40 €; б) 19,53 €; в) 26,39 €?

50.* Једна трећина литра сока најприближнија је броју:
а) 3,1 dl; б) 3,2 dl ; в) 3,3 dl; г) 3,4 dl.
(Заокружи слово испред тачног одговора.)

51. Мајстор Раде је измерио дужину и ширину плоче правоугаоног облика и добио резултате 23,15 m и 19,29 m. Заокругли добијене резултате на једну децималу.

РАЗНИ ЗАДАЦИ

52. На слици је осенчена $\frac{1}{5}$ квадрата. На исти начин нацртај квадрате и осенчи следеће њихове делове:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{4}$;

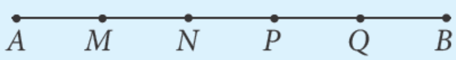
в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{5}{9}$.

53. Нацртај три једнака правоугаоника и осенчи делове тих правоугаоника који представљају њихове: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{5}$.

54. Ноте на слици изрази као разломке.

55. Тачке M, N, P и Q деле дуж AB на пет једнаких делова. Који део дужи AB чине дужи:

а) AM; б) AN; в) MQ; г) MB?



56. Нека је $Q = \{\frac{p}{q} | p \in N_0, q \in N\}$. Која од следећих тврђења су тачна?

а) $\{\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\} \subset Q$; б) $0 \in Q$; в) $N \subset Q$;

г) $Q = N_0$; д) $\frac{5}{3} \in Q$.

57. а) Разломке $\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}$ прикажи у облику количника;

б) количнике $3:5$, $2:7$, $9:4$, $11:5$ прикажи у облику разломака.

58. Посматрај све разломке чији је именилац једнак 5, а бројилац једноцифрен природан број. Издвој међу њима праве и неправе разломке.

59. Одреди природне бројеве који су једнаки разломцима:

а) $\frac{12}{3}$; б) $\frac{8}{4}$; в) $\frac{30}{15}$; г) $\frac{15}{5}$; д) $\frac{51}{17}$.

60. Следеће разломке изрази природним бројем:

а) $\frac{39}{3}$; б) $\frac{15}{5}$; в) $\frac{12}{4}$; г) $\frac{30}{6}$; д) $\frac{48}{24}$; ђ) $\frac{85}{17}$.

61. Природан број 4 може се написати као разломак $\frac{8}{2}$. Одреди бар још три разломка који су једнаки природном броју 4.

62. Напиши као мешовит број:

а) $1 + \frac{4}{5}$; б) $2 + \frac{1}{3}$; в) $5 + \frac{7}{11}$.

63. Дате разломке представи у облику мешовитих бројева:

а) $\frac{14}{3}$; б) $\frac{9}{2}$; в) $\frac{7}{4}$; г) $\frac{121}{7}$; д) $\frac{1711}{23}$.

64. Следеће неправе разломке изразити као мешовите бројеве:

а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{7}{3}$; в) $\frac{13}{4}$; г) $\frac{25}{8}$; д) $\frac{17}{6}$.

65. Следеће мешовите бројеве напиши као неправе разломке:

а) $1\frac{1}{2}$; б) $3\frac{3}{5}$; в) $2\frac{3}{4}$; г) $4\frac{5}{7}$; д) $8\frac{5}{7}$;

ђ) $2\frac{1}{7}$; е) $3\frac{2}{3}$; ж) $14\frac{5}{8}$; з) $173\frac{7}{9}$.

66. Које вредности може да добије природан број q у имениоцу разломка $\frac{7}{q}$ да би тај разломак био:

а) прави разломак; б) једнак 1;

в) неправи разломак?

67. Из скупа $A = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{4}{1}, \frac{5}{9}\}$ издвој подскупове:

а) правих разломака;

б) неправих разломака;

в) природних бројева.

68.* Разломци $\frac{3*5*}{36}$ и $\frac{4*2*}{45}$ су природни бројеви. Одреди цифре које су замењене звездицама.

69. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају разломцима:

а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$;

б) $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}$.

70. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају бројевима:

а) $\frac{3}{5}$, $4\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{8}$, $5\frac{1}{6}$;

б) $\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $3\frac{14}{15}$, $2\frac{5}{7}$.

71. Напиши три разломка чије су вредности веће од $\frac{1}{2}$, а мање од 1 и означи тачке бројевне полуправе које одговарају тим разломцима.

72. Користећи бројевну полуправу упореди разломке:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$; в) $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{6}$ и $\frac{2}{9}$.

73. Користећи бројевну полуправу упореди разломке: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$.

74. На бројевној полуправој означи тачке које одговарају разломцима:
$\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{5}$ и сваки од њих упореди са бројем 1.

75. Користећи бројевну полуправу упореди разломке $\frac{44}{45}$ и $\frac{45}{44}$.

76. Прошири дати разломак са 4:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{7}{3}$; в) $\frac{4}{25}$; г) $\frac{11}{15}$.

77. Разломак $\frac{2}{5}$ прошири са:

а) 2; б) 4; в) 8; г) 16.

78. Разломак $\frac{1}{2}$ прошири неким природним бројем тако да му именилац буде једнак:

а) 10; б) 50; в) 100.

79. Прошири дате разломке тако да добијеш разломке са једнаким имениоцима:

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{7}$; б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{8}$; в) $\frac{1}{9}$ и $\frac{3}{11}$;

г) $\frac{7}{9}$ и $\frac{11}{18}$; д) $\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{3}$; ђ) $\frac{3}{18}$ и $\frac{7}{16}$;

е) $\frac{7}{24}$ и $\frac{5}{18}$; ж) $\frac{7}{8}$ и $\frac{5}{12}$; з) $\frac{4}{9}$ и $\frac{7}{15}$;

и) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{15}$; ј) $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{11}{35}$; к) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{12}$;

л) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{8}$ и $\frac{5}{16}$.

80. Скрати разломке:

а) $\frac{6}{21}$; б) $\frac{6}{10}$; в) $\frac{44}{48}$; г) $\frac{91}{189}$;

д) $\frac{80}{85}$; ђ) $\frac{210}{230}$; е) $\frac{117}{169}$; ж) $\frac{206}{434}$.

81. Скрати разломке:

а) $\frac{8}{16}$; б) $\frac{15}{20}$; в) $\frac{84}{35}$; г) $\frac{54}{144}$; д) $\frac{21}{14}$.

тако што ћеш прво одредити НЗД за њихове бројиоце и имениоце.

82. Из скупа разломака $\{\frac{1}{4}, \frac{5}{10}, \frac{13}{24}, \frac{3}{9}, \frac{44}{33}, \frac{56}{63}\}$ издвој подскуп несводљивих разломака.

83. Одреди природне бројеве a, b, c тако да једнакости буду тачне:

а) $\frac{7}{8} = \frac{a}{24}$; б) $\frac{b}{13} = \frac{10}{26}$; в) $\frac{5}{7} = \frac{10}{c}$.

84.* Одреди природне бројеве x и y тако да једнакости буду тачне:

а) $\frac{4}{6} = \frac{6}{x}$; б) $\frac{y}{9} = \frac{16}{12}$.

85.* Дат је разломак $\frac{192}{264}$. Одреди разломак једнак датом тако да му је збир имениоца и бројиоца једнак 38.

86.* Одреди разломак једнак разломку $\frac{2}{3}$ тако да му је:

а) збир бројиоца и имениоца једнак 80;

б) разлика имениоца и бројиоца једнака 31;

в) производ бројиоца и имениоца једнак 294.

87. Упореди разломке:

а) $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{7}$; б) $\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{9}$;

в) $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{8}$; г) $\frac{5}{12}$ и $\frac{5}{8}$.

88. Упореди разломке:

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{10}$; б) $\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{18}$;

в) $\frac{3}{20}$ и $\frac{1}{10}$; г) $\frac{11}{14}$ и $\frac{5}{7}$;

д) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$; ђ) $\frac{2}{5}$ и $\frac{8}{20}$;

е) $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{9}$; ж) $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{8}$.

89. Дати су разломци: $\frac{8}{7}, \frac{7}{8}, \frac{11}{13}, \frac{15}{8}$ и $\frac{17}{11}$. Одреди оне од њих који су: а) већи од 1; б) мањи од 1.

90. Дати су разломци: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{17}{12}$ и $\frac{13}{18}$.

а) Одреди НЗС(2, 3, 4, 9, 12, 18).

б) Дате разломке сведи на именилац који је једнак њиховом најмањем заједничком садржаоцу.

в) Поређај дате разломке по величини од најмањег до највећег.

91. Следеће разломке поређај по величини од најмањег до највећег:

а) $\frac{7}{13}, \frac{5}{13}, \frac{8}{13}, \frac{6}{13}$; б) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}$; г) $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}$.

92. Из два једнака базена испуштено је $\frac{7}{20}$, односно $\frac{2}{5}$ воде. Из ког базена је испуштено више воде?

93. Жана и Јован читају исту књигу. Жана је прочитала $\frac{5}{8}$, а Јован $\frac{4}{7}$ књиге. Ко је од њих двоје прочитао више?

94. Две сестре близнакиње Ана и Марија на излет су понеле исти износ новца. Ана је потрошила $\frac{6}{7}$, а Марија $\frac{7}{8}$ свог новца. Којој сестри је више новца остало?

95. Колико има природних бројева n за које је тачна неједнакост?

а) $\frac{n}{5} < \frac{11}{10}$; б) $\frac{n}{7} \leq \frac{13}{14}$;

в) $\frac{3}{n} \geq \frac{3}{7}$; г) $\frac{5}{n} > \frac{10}{11}$.

96. Одреди све просте бројеве p за које важи $\frac{1}{6} \leq \frac{p}{12} \leq \frac{2}{3}$.

97.* а) Одреди разломак са имениоцем 20 који је већи од $\frac{3}{11}$, а мањи од $\frac{4}{11}$;

б) одреди разломак са имениоцем 10 који је већи од $\frac{4}{11}$, а мањи од $\frac{5}{11}$.

98. Напиши у децималном запису:

а) 0 целих 11 стотих;

б) 3 цела 7 стотих;

в) 5 целих 5 десетих;

г) 1 цео 23 хиљадита.

99. Напиши речима:

а) 2,1; б) 0,17; в) 3,201; г) 4,02.

100. Који од следећих бројева је запис за број пет целих и једна половина?

а) 5,12; б) 5,2; в) 5,5; г) 2,5; д) 5,05.

101. Које од следећих једнакости су тачне?

а) 3,7 = 3,700; б) 230 = 2,30;

в) 5,9 = 5,999999; г) 2,580 = 2,58.

102. Следеће бројеве у децималном запису изрази несводљивим разломком:

а) 0,6; б) 0,7; в) 0,05; г) 0,012.

103. Дељењем бројиоца имениоцем, следеће разломке изрази у децималном запису:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{4}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{13}{16}$.

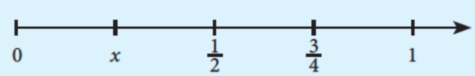
104. Разломке $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}$ напиши у децималном запису.

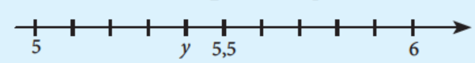
105. а) Изрази у децималном запису:

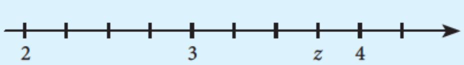
$\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, 5\frac{1}{4}, 6\frac{3}{5}, \frac{11}{2}$.

б) Изрази разломком облика $\frac{p}{q}$, $p \in N_0$, $q \in N$ бројеве: 0,2; 0,4; 0,02; 11,3; 5,4; 6,03.

106. Који број је представљен словом на слици?

а)


б)


в)


107. Сведи имениоце следећих разломака на декадну јединицу и добијене разломке изрази у децималном запису:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{3}{25}$; в) $\frac{17}{50}$; г) $\frac{13}{20}$; д) $\frac{7}{4}$.

108.* Која цифра се налази на шездесетом месту иза децималне запете у децималном запису разломка $\frac{1}{7}$?

109. Упиши знак < или > тако да добијена неједнакост буде тачна:

а) 1,1 □ 1,2; б) 4,14 □ 4,41; в) 8,667 □ 8,7;
г) 0,1 □ 0,099; д) 23,05 □ 23,19; ђ) 7,7 □ 7,69.

110. Пет другова измерили су своје висине и записали су их у табелу:

ИМЕ	ВИСИНА
Алекса	1,4 m
Бора	1,56 m
Вељко	1,6 m
Горан	1,61 m
Дарко	1,48 m

а) Који су све дечаци нижи од Боре?
б) Који дечак је највиши?

111. За које природне бројеве n су тачне неједнакости?

а) $9{,}53 < n < 12{,}01$; б) $95{,}3 < n < 102{,}1$.

112. Бројеве: 0,2; 2,2; 0,02; 2,02; 0,22 напиши редом од најмањег до највећег.

113. Разломке $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ напиши редом од најмањег до највећег.

114. Напиши три броја који су већи од 2,3 и мањи од 2,4.

115. Милан је измерио четири дужи и записао добијене резултате. Која од тих дужи има највећу дужину?

а) 0,58 m; б) 0,8 m; в) 0,509 m; г) 0,79 m.

116. У подне 17. 9. 2021. године температура у неким градовима је била: Суботица 27,2°C; Нови Сад 27,15°C; Београд 28,05°C; Чачак 28,5°C; Крагујевац 28,3°C; Ниш 28,6°C; Врање 28,52°C. У ком граду је било најтоплије, а у ком најхладније?

117. Упореди: а) $\frac{7}{5}$ и 1,41; б) $\frac{7}{4}$ и 1,73; в) $\frac{45}{8}$ и 5,63.

118. Поређај по величини, од највећег до најмањег бројеве: 1,5 $\frac{4}{3}$ 1,3 $\frac{5}{3}$.

119. Брат има $\frac{5}{12}$, а сестра $\frac{4}{9}$ ујакових година. Ко је старији, брат или сестра?

120.* Одреди четири разломка са једноцифреним имениоцима тако да важи $\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}$.

121. На питање који део књиге су прочитали после два дана читања, ученици једног одељења дали су следеће одговоре: Марко – 0,75; Радмила – $\frac{7}{9}$; Јована – $\frac{2}{3}$ и Мирко – 0,625. Који од ученика је прочитао највећи, а који најмањи део књиге?

122. Ширина клупе је 51 cm. То је приближно:

а) 5 m; б) 5 dm; в) 55 cm; г) 50 m.
(Заокружи слово испред тачног одговора.)

123. Дате разломке прикажи у децималном облику заокругљене на две децимале:

а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{13}{7}$; г) $\frac{9}{11}$.

124. Бројеве: а) $\frac{17}{13}$; б) $\frac{213}{17}$ изрази у децималном запису заокругљене на две децимале, а затим одреди између која два природна броја се они налазе.

125. Одреди приближну вредност броја $a = 4{,}103575$ на:

а) једну; б) две; в) три;
г) четири; д) пет децимала.

126. При подели 2000 хиљаде динара на више ученика, Јелисавета је добила једну трећину. Колико новца је добила Јелисавета? Заокругли износ на две децимале.

127. Две трећине литра сока најприближније износи:

а) 6 dl; б) 6,3 dl;
в) 6,6 dl; г) 6,7 dl.

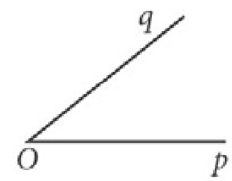
(Заокружи слово испред тачног одговора.)

5 УГАО

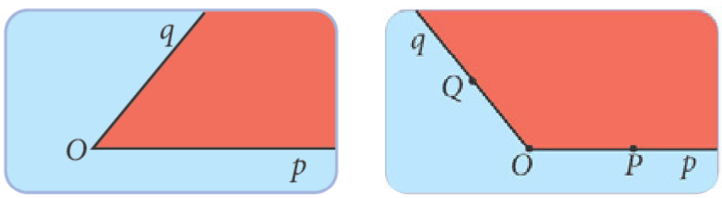
5.1. Угао, централни угао, једнакост углова

Један од значајнијих математичких појмова, који се појављује и у свакодневном животу, јесте појам **угла**. Тако, на пример, кажемо угао учионице, угао између две улице, угао фудбалског терена (корнер).

Нека су дате две полуправе Op и Oq са заједничком почетном тачком O. Угаона линија pOq је унија те две полуправе.



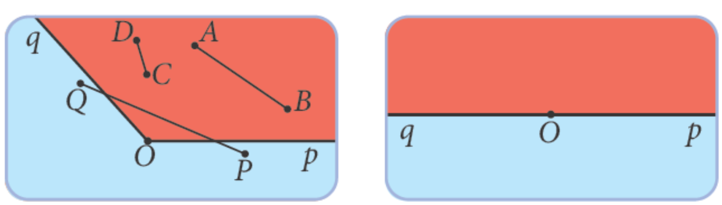
Угаона линија pOq одређује две области које су на слици обојене плавом и црвеном бојом.



Угао pOq је унија свих тачака угаоне линије pOq и једне од тих области. Видимо да свака угаона линија одређује два угла. Угао pOq означавамо са $\measuredangle \boldsymbol{pOq}$. Тачка O се назива теме угла, а полуправе Op и Oq су краци угла. Ако тачка P припада краку Op, а тачка Q припада краку Oq, тада уместо $\measuredangle pOq$, пишемо и $\measuredangle POQ$.

Ако за сваке две тачке A и B које припадају углу pOq и читава дуж AB припада углу, тада кажемо да је тај угао **конвексан**. Ако постоји бар једна дуж чији крајеви припадају углу, али не припадају све тачке те дужи углу, тада кажемо да је такав угао **неконвексан**.

На слици, угао обојен црвено је конвексан. Угао који је обојен плаво је неконвексан, јер крајеви дужи PQ, тј. тачке P и Q, припадају том углу, али не припада читава дуж углу.



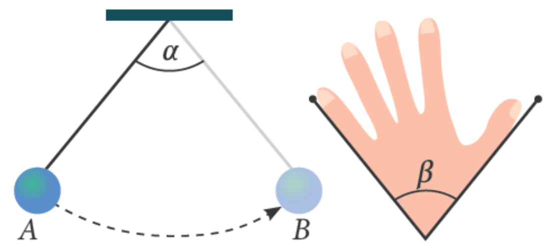
На слици на којој је приказан угао фудбалског игралишта, угао одређен тереном је конвексан, а онај други је неконвексан. Ми ћемо се у даљем раду бавити само конвексним угловима.

ПРИМЕР 1. Краци Op и Oq угла на слици припадају једној правој. У овом случају су оба угла одређена угаоном линијом pOq конвексни.

Ако две полуправе са заједничким почетком припадају истој правој, онда оне образују **опружену угаону линију**. Опружена угаона линија дели раван на две полуравни, при чему је свака од њих конвексна. Унија опружене угаоне линије и једне од полуравни чини **опружен угао**.

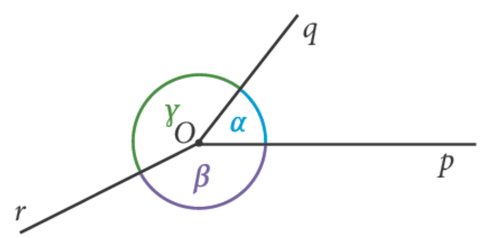
Као што је уобичајено да се тачке означавају великим словима абецеде: A, B, C, D... а праве малим словима абецеде: a, b, c, p, q... тако се углови најчешће означавају словима грчког алфабета: $\boldsymbol{\alpha}$ (алфа), $\boldsymbol{\beta}$ (бета), $\boldsymbol{\gamma}$ (гама), $\boldsymbol{\delta}$ (делта)...

ПРИМЕР 2. Угао, који одређује клатно при њихању од положаја A до B означен је на слици словом α. Угао који одређују палац и мали прст једне руке означен је са β.

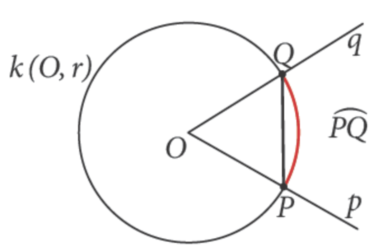


ПРИМЕР 3. Три разне полуправе Op, Oq и Or приказане су на слици. Колико оне одређују угаоних линија, а колико конвексних углова?

РЕШЕЊЕ Ове полуправе одређују три угаоне линије: pOq, qOr и rOp и три конвексна угла који су означени словима α, β и γ.



Нека је дата кружница $k(O, r)$ и две полуправе Op и Oq, као што је приказано на слици.



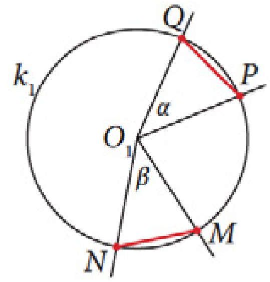
Централни угао кружнице $k(O, r)$ је сваки угао чије је теме центар кружнице тачка O.

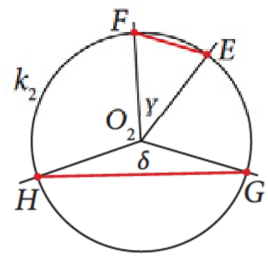
Краци централног угла pOq секу кружницу k у тачкама P и Q и на овај начин одређена је тетива PQ кружнице.

Два централна угла кружница једнаких полупречника су **једнака**, ако су им одговарајуће тетиве једнаке. Приметимо да су у том случају једнаки и одговарајући кружни лукови. Посебно, свака два опружена угла су једнака.

ПРИМЕР 4.

На слици су приказани једнаки централни углови α и β, јер су дужи PQ и MN једнаке (једнаки су и кружни лукови $\widehat{PQ}$ и $\widehat{MN}$): $\boldsymbol{\alpha = \beta}$.





На другој слици централни углови δ и γ су различити, јер дужи HG и EF нису једнаке: $\boldsymbol{\delta \neq \gamma}$.

Ако је тетива HG већа од тетиве EF, тј. $HG > EF$, онда је и одговарајући централни угао већи: $\boldsymbol{\delta > \gamma}$.

ПРИМЕР 5.

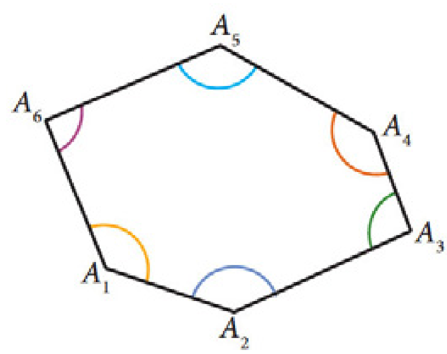
Реч многоугао потиче од речи *много* и *угао*, чиме се указује на то да је реч о фигури са много углова.

У овом примеру имамо конвексан шестоугао, чије је свако теме истовремено и теме једног угла чији краци садрже суседна темена.

Луковима су истакнути углови шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$:

$\sphericalangle A_6A_1A_2$, $\sphericalangle A_1A_2A_3$, $\sphericalangle A_2A_3A_4$, $\sphericalangle A_3A_4A_5$, $\sphericalangle A_4A_5A_6$, $\sphericalangle A_5A_6A_1$.

Област многоугла садржана је у области сваког његовог угла који одређују по две суседне странице.

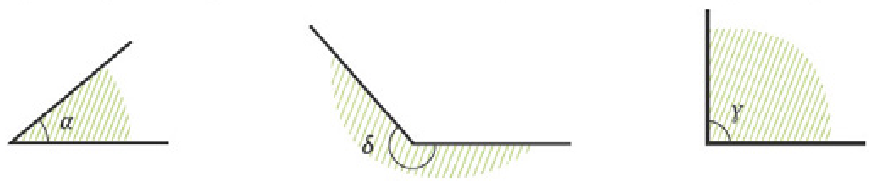


Реши **тест број 17** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

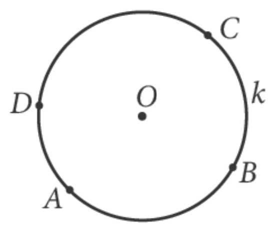
1. Који од углова приказаних на слици су конвексни, а који нису?



2. Нацртај кружницу $k(O, 2\,\text{cm})$ и на њој изабери две тачке P и Q. Означи са α конвексни угао POQ и словом t тетиву PQ.

3. Праве a и b секу се у тачки O. Колико угаоних линија оне одређују?

4. На слици четири тачке A, B, C и D припадају кружници k. Наброј све конвексне централне углове са теменом O које оне одређују.



5. Користећи троугаони лењир нацртај прав угао.

6. Нацртај једну кружницу, а затим коришћењем троугаоног лењира нацртај један њен прав централни угао и његову тетиву.

7. Колико углова одређују:
а) две;
б) три полуправе које имају заједничку почетну тачку?

8. Нацртај два угла са заједничким:
а) теменом;
б) краком.

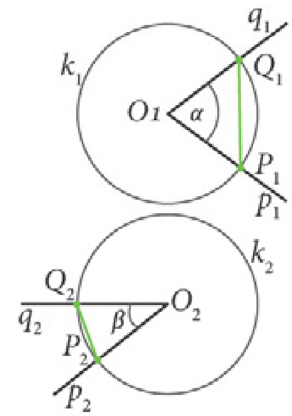
9.* Нацртај кружницу $k\,(O, 2\,\text{cm})$ и две њене тетиве које садрже тачку O. Колико конвексних углова са теменом O одређују ове тетиве?

10. Нацртај кружницу $k(O, 3\text{ cm})$ и две њене тетиве AB и CD. Измери лењиром дужине тих тетива и на основу тога одреди који од углова $\sphericalangle AOB$ или $\sphericalangle COD$ је већи.

Задатке број 2, 9 и 10 уради користећи алат на сајту:
www.geogebra.org

5.2. Преношење углова и надовезивање углова

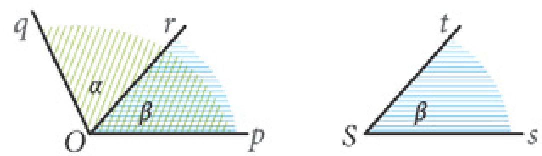
ПРИМЕР 1. На слици су приказани углови $p_1O_1q_1$ и $p_2O_2q_2$. Да бисмо их упоредили, конструишемо кружнице $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, r)$ истог полупречника.



> Ако су добијене тетиве P_1Q_1 и P_2Q_2 једнаке, тада кажемо да су **једнаки** и углови $\sphericalangle p_1O_1q_1$ и $\sphericalangle p_2O_2q_2$, тј. $\alpha=\beta$.

Ако је $P_1Q_1 > P_2Q_2$ (тј. $\widehat{P_1Q_1} > \widehat{P_2Q_2}$), тада кажемо да је угао α већи од угла β и пишемо $\alpha > \beta$.

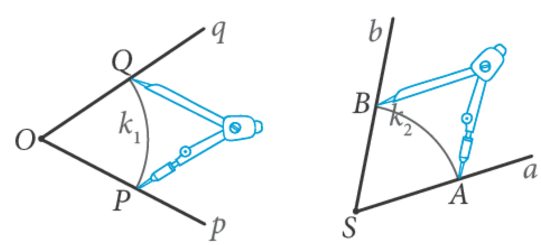
Приметимо да уколико је $\alpha > \beta$, у унутрашњости угла $\alpha = \sphericalangle pOq$ постоји полуправа Or таква да је $\sphericalangle pOr = \sphericalangle sSt = \beta$.



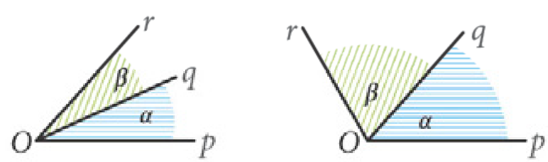
Тврђење, које смо исказали у примеру 1, омогућава да помоћу лењира и шестара, дакле конструктивно, **преносимо углове**.

Претпоставимо да је дат угао pOq и да желимо да конструишемо њему једнак угао са теменом у тачки S.

1. Конструисаћемо најпре полуправу Sa и две кружнице $k_1(O, r)$ и $k_2(S, r)$ истог полупречника. Оне секу полуправе Op, Oq и Sa редом у тачкама P, Q и A.
2. Затим, на кружници k_2 одредимо помоћу шестара тачку B такву да су лукови $\widehat{AB}$ и $\widehat{PQ}$ једнаки. Полуправа Sb одређена је тачкама S и B, а углови $\sphericalangle POQ$ и $\sphericalangle ASB$ су једнаки.



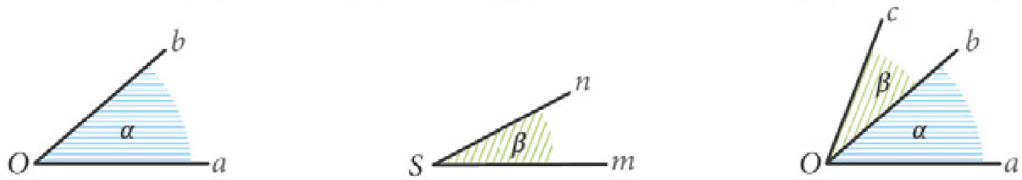
При конструсању збира и разлике два дата угла, постављамо углове тако да им један крак буде заједнички.



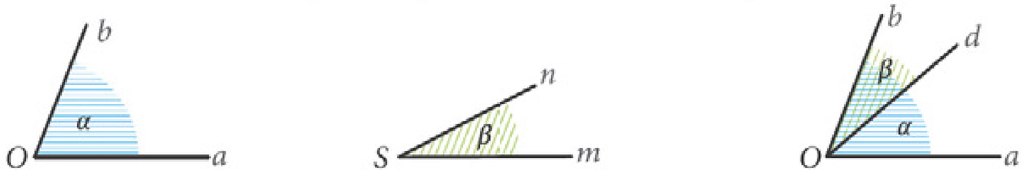
> Углови $\sphericalangle pOq$ и $\sphericalangle qOr$ који имају заједничко теме O и заједнички крак Oq називају се **суседни** или **надовезани углови**.

Преношењем и надовезивањем углова можемо једноставно конструисати збир и разлику датих углова α и β $(\alpha > \beta)$.

ПРИМЕР 2. На слици смо угао $\sphericalangle mSn = \beta$ конструктивно пренели, тако да је $\sphericalangle bOc = \beta$. Тада кажемо да је угао $\sphericalangle aOc$ једнак збиру углова $\sphericalangle aOb$ и $\sphericalangle mSn$, тј. $\sphericalangle aOc = \alpha + \beta$.



Слично, на следећој слици приказан је **поступак одузимања углова** α и β.



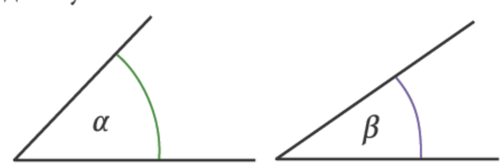
Угао $\sphericalangle mSn$ пренели смо користећи лењир и шестар, тако да је $\sphericalangle mSn = \sphericalangle bOd$.
Тада је $\sphericalangle aOd = \sphericalangle aOb - \sphericalangle mSn$.

Реши задатке 1, 2, 4 и 6 у **тесту број 18** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

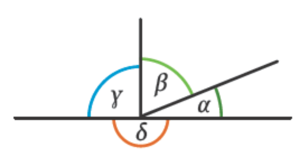
11. Дати су углови α и β као на слици. Пренеси ове углове у своју свеску и утврди да ли је $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ или $\alpha < \beta$. Затим, конструиши следеће углове:

а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha - \beta$; в) $2 \cdot \alpha$;
г) $2 \cdot \beta$; д) $2 \cdot \alpha + \beta$; ђ) $2 \cdot \alpha - \beta$;
е) $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$; ж) $2 \cdot \alpha - 2 \cdot \beta$.



12. Дати су углови α и β као на слици. Пренеси ове углове у своју свеску и конструиши углове: а) $\beta - \alpha$; б) $2 \cdot \alpha$.
Да ли је $2 \cdot \alpha < \beta$, $2 \cdot \alpha = \beta$ или $2 \cdot \alpha > \beta$?

13. Упореди по величини углове α, β, γ и δ приказане на слици.



14. Дат је угао α и полуправа Op. Конструиши угао pOq, тако да је он једнак углу α.

15. Нацртај два угла α и β ($\alpha > \beta$) и конструиши њихов збир и разлику. Да ли је $\alpha + \beta > \alpha$?

16. Нацртај један угао α, а затим разлику углова $3 \cdot \alpha$ и α.

17. Конструиши два централна угла истог круга, а затим конструиши њихов збир и разлику.

18. Нацртај три угла α, β и γ и конструиши њихов збир.

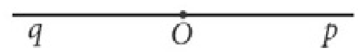
19. Нацртај један угао α, а затим конструиши угао четири пута већи од угла α.

20.* Дати су углови α и β ($\alpha > \beta$). Од збира $2 \cdot \alpha + \beta$ одузми разлику $\alpha - \beta$.

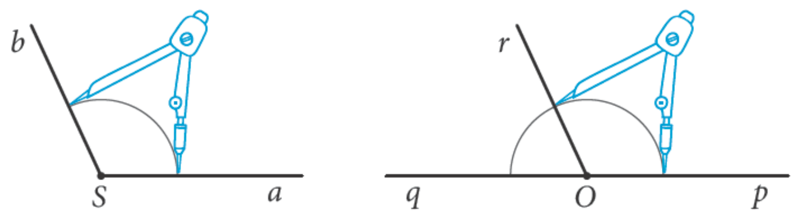
5.3. Упоредни углови, врсте углова

Подсетимо се раније наученог да бисмо се упознали са врстама углова. Ако краци угла pOq припадају једној правој и различити су међу собом, такав угао је опружен угао.

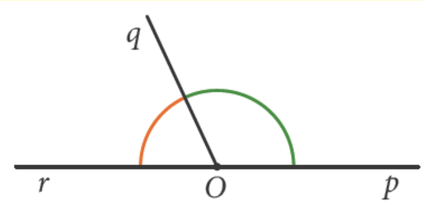
Приметимо да угаона линија опруженог угла одређује и други опружен угао. Та два опружена угла, и уопште, сви опружени углови међу собом су једнаки. Приметимо, такође, да је опружен угао конвексан.



ПРИМЕР 1. Опружени угао је већи од свих конвексних углова који нису опружени. Наиме, нека је $\sphericalangle aSb$ произвољан конвексан угао који није опружен. Ако га пренесемо тако да му се један крак поклапа са краком Op, тада ћемо добити $\sphericalangle pOr = \sphericalangle aSb$. Очигледно је $\sphericalangle pOr$ мањи од опруженог $\sphericalangle pOq$.

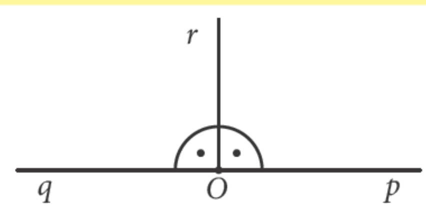


Два суседна угла $\sphericalangle pOq$ и $\sphericalangle qOr$, који су такви да им краци Op и Or одређују опружен угао, називају се **упоредни углови**.



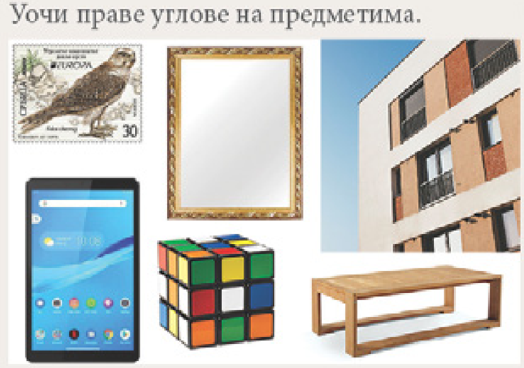
Угао, који је једнак свом упоредном углу, назива се **прав угао**. Обично се прав угао означава као што је приказано на слици.

$\sphericalangle pOr = \sphericalangle qOr$



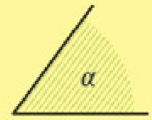
Прави углови су веома значајни у свакодневном животу. Са њима се често срећемо – сва четири угла правоугаоника су прави углови, велики број предмета је облика квадра чије су све стране правоугаоници. Прави углови су чести у природи, на пример, дрво расте под правим углом у односу на земљу.

Уочи праве углове на предметима.

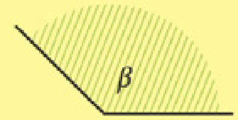


Угао мањи од правог угла је **оштар угао**.

Угао већи од правог, али мањи од опруженог, назива се **туп угао**.

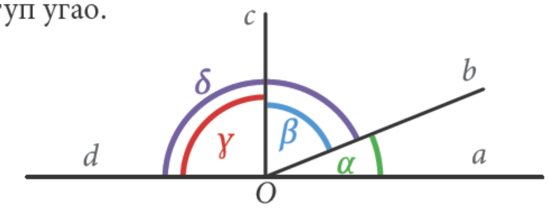


оштар угао

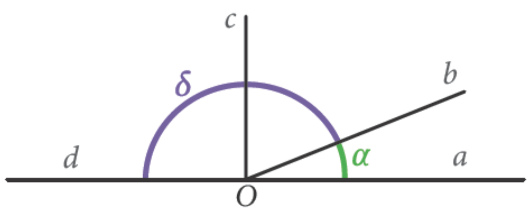


туп угао

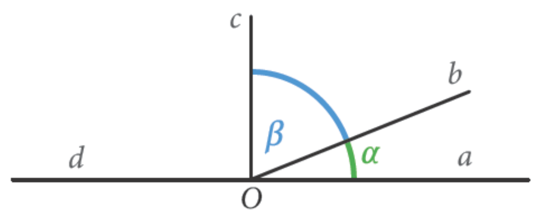
ПРИМЕР 2. Углови на слици су:
α и β су оштри углови,
γ је прав угао,
$\delta = \beta + \gamma$ је туп угао.



$\alpha - \sphericalangle aOb$
$\beta - \sphericalangle bOc$
$\gamma - \sphericalangle cOd$
$\delta - \sphericalangle bOd$



α и δ суплементни

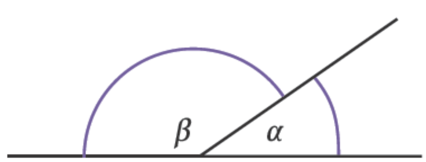


α и β су комлементни

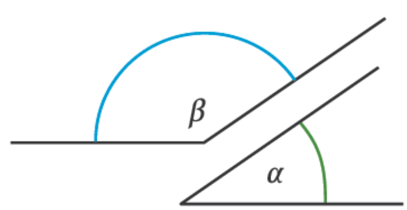
Два угла су **суплементни углови** ако је њихов збир једнак опруженом углу.
Два угла су **комплементни углови** ако им је збир прав угао.

» **суплементан** – реч латинског порекла и значи допунски, накнадни
комплементан – реч латинског порекла и значи допуна, додатак

Приметимо да, иако су упоредни углови увек суплементни, не морају и два суплементна угла да буду обавезно и упоредни.



α и β су суплементни и упоредни.



α и β су суплементни, али нису упоредни.

Реши **тест број 22** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

21. Да ли је оштар, прав, или туп угао:

а) збир оштрог и правог угла? б) разлика опруженог и правог угла?
в) збир два оштра угла?

22. Повежи одговарајуће углове.

а) Суплементни угао

оштрог угла је •	• прав угао
правог угла је •	• оштар угао
тупог угла је •	• туп угао

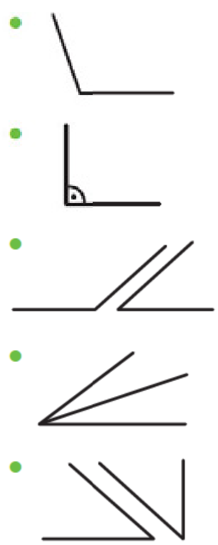
б) суплементни углови •

суседни углови •

прав угао •

туп угао •

комплементни углови •



23. Нацртај један оштар угао α, па конструиши разлику опруженог угла и угла α.

24. Од правог угла одузми један оштар угао α.

25. Од једног тупог угла β одузми прав угао.

26. Нацртај један туп угао α и један оштар угао β и конструиши разлику $\alpha - \beta$.

27. Нацртај један прав угао и затим га удвостручи.

28.* Од опруженог угла одузми угао суплементан датом:

а) оштром углу α;

б) тупом углу β.

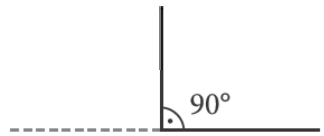
29.* Од правог угла одузми угао комплементан датом оштром углу α.

30.* Прав угао сабери са углом суплементним датом тупом углу α.

5.4. Мерење углова, сабирање и одузимање мере углова

Као што се дужина мери метром, време секундама, а маса грамима, тако постоје и јединице за мерење углова.

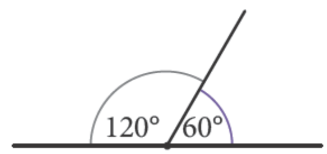
Основна јединица за мерење угла је **степен**. Ознака за угао, чија је мера један степен, је 1°. Степен је 180-ти део опруженог угла.



Опружени угао има меру од **180°**.
Прав угао, као половина опруженог угла, има меру од **90°**.

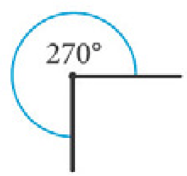
Углови, чија је мера мања од 90°, су **оштри**.
Они углови, чија је мера између 90° и 180°, су **тупи**.

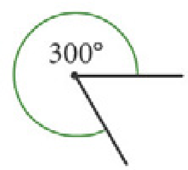
Тако, на пример, мера трећине опруженог угла је 60°, а мера њему суплементног угла је 120°.



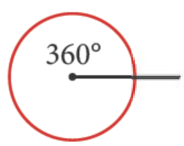
Међутим, постоје и углови који нису конвексни, а њихова мера је већа од мере опруженог угла.

Неконвексни углови имају меру већу од **180°**.

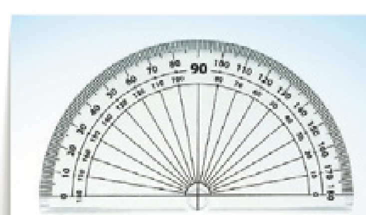




Пун угао има меру **360°**.

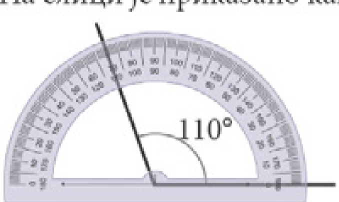


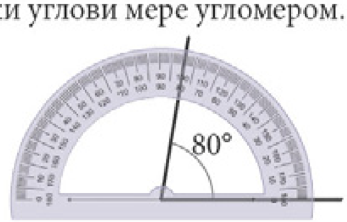
Очигледно је да једнаки углови имају једнаке мере.


угломер

Справа, која служи за мерење углова, назива се **угломер**.

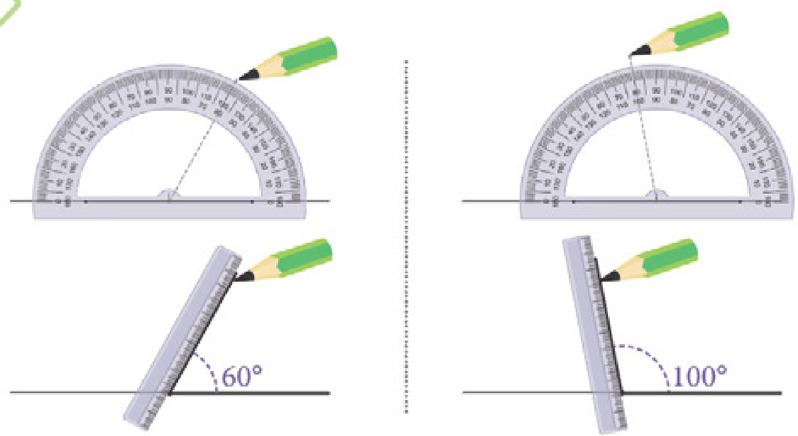
На слици је приказано како се неки углови мере угломером.





ПРИМЕР 1. Користећи угломер нацртај углове од $60°$ и $100°$.

РЕШЕЊЕ



Постоје и јединице мање од степена, то су **минута** и **секунда**. Кажемо да 1 степен има 60 минута, а један минут 60 секунди и то пишемо:

$$1° = 60', \ 1' = 60'', \ 1° = 3600''.$$

Дакле, слично је као што је код мерења времена минут шездесети део сата, а секунда шездесети део минута.

ПРИМЕР 2. Дате су мере углова $\alpha = 300'$, $\beta = 360''$, $\gamma = 280'$, $\delta = 360'150''$.

Пошто је $300' : 60 = 5°$, следи $\alpha = 5°$.

Такође, $360'' : 60 = 6'$, па је $\beta = 6'$.

Затим, $280' : 60 = 240' : 60 + 40'$ (остатак) $= 4°40'$, из чега следи да је $\gamma = 4°40'$.

За угао δ је $360' : 60 = 6°$ и $150'' : 60 = 2' + 30''$ (остатак), па ће бити $\delta = 6°2'30''$.

Тада је $\alpha = 5°$, $\beta = 6'$, $\gamma = 4°40'$, $\delta = 6°2'30''$.

ПРИМЕР 3. Дати су углови $\alpha = 24°32'$ и $\beta = 144°58'$.
Одреди меру углова $\alpha + \beta$, $\beta - \alpha$, $2 \cdot \alpha$ и $3 \cdot \alpha$.

РЕШЕЊЕ

$$\begin{array}{rr} \alpha + \beta = & 24°32' \\ & +144°58' \\ \hline & 168°90' \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \beta - \alpha = & 144°58' \\ & -24°32' \\ \hline & 120°26' \end{array}$$

$\boldsymbol{\alpha + \beta} = 168°90' = 168° + 1° + 30' = 169°30'$ $\qquad$ $\boldsymbol{\beta - \alpha} = 120°26'$

$\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 2 \cdot (24° + 32') = 2 \cdot 24° + 2 \cdot 32' = 48° + 64' = 48° + 60' + 4' = 48° + 1° + 4' = 49°4'$

$\mathbf{3} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 3 \cdot (24° + 32') = 3 \cdot 24° + 3 \cdot 32' = 72° + 96' = 72° + 60' + 36' = 72° + 1° + 36' = 73°36'$

ПРИМЕР 4. Дат је угао $\alpha = 72°10'16''$. Одреди меру његовог:

а) комплементног угла;

б) суплементног угла.

РЕШЕЊЕ

а) $90° - \alpha = 90°$
$$\begin{array}{r} -\,72°\,10'\,16'' \\ \hline 89°\,59'\,60'' \\ -\,72°\,10'\,16'' \\ \hline 17°\,49'\,44''. \end{array}$$

б) $180° - \alpha = 180°$
$$\begin{array}{r} -\,72°\,10'\,16'' \\ \hline 179°\,59'\,60'' \\ -\,72°\,10'\,16'' \\ \hline 107°\,49'\,44''. \end{array}$$

$$\begin{aligned} 90° &= 89° + 1° = \\ &= 89° + 59' + 1' = \\ &= 89° + 59' + 60'' = \\ &= 89°59'60'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 180° &= 179° + 1° = \\ &= 179° + 59' + 1' = \\ &= 179° + 59' + 60'' = \\ &= 179°59'60'' \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. Одреди угао који је два пута мањи од угла $\alpha = 25°45'$.

РЕШЕЊЕ

$$\begin{aligned} \alpha : 2 &= 25°45' : 2 = (25° + 45') : 2 = (24° + 1° + 44' + 1') : 2 = \\ &= (24° + 60' + 44' + 60'') : 2 = (24° + 104' + 60'') : 2 = \\ &= 24° : 2 + 104' : 2 + 60'' : 2 = 12° + 52' + 30'' = 12°52'30'' \end{aligned}$$

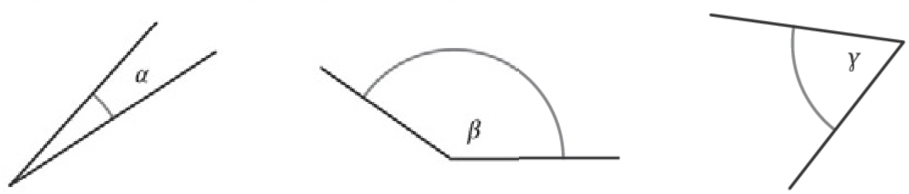
Реши **тестове број 19** (задаци 2, 3, 4, 5 и 6) и **20** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

31. Претвори у минуте: а) $2°$; б) $12°$; в) $180°$.

32. Применом угломера одреди мере углова на слици.



33. Применом угломера нацртај углове од: а) $20°$; б) $70°$; в) $125°$; г) $172°$.

34. Ако је $\alpha = 114°37'$ и $\beta = 63°58'14''$, одреди мере углова $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.

35. Одреди меру угла комплементног и суплементног углу $\alpha = 39°16'55''$.

36. Одреди меру угла који се добија када се од опруженог угла одузме угао $2 \cdot \alpha$, при чему је $\alpha = 28°35'46''$.

37.* Одреди меру угла који се добија као разлика угла суплементног углу $\alpha = 38°12'$ и угла комплементног углу $\beta = 56°44'$.

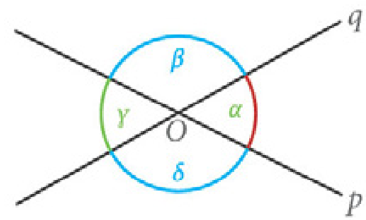
38. Да ли је разлика углова $\alpha = 112°30'24''$ и $\beta = 34°16'52''$ већа од збира углова $\gamma = 28°54'18''$ и $\delta = 34°29'53''$?

39. Одреди меру збира углова α, β и γ, ако је $\alpha = 12°43'18''$, $\beta = 44°57'26''$ и $\gamma = 38°55'11''$.

40. Од збира углова $\alpha = 38°29'55''$ и $\beta = 17°44'31''$ одузми њихову разлику.

5.5. Угао између две праве, унакрсни углови

Две праве које се секу образују четири конвексна угла. На слици су приказане праве p и q које се секу у тачки O. Углови α и γ и углови β и δ, који су такви да им по два крака одређују два опружена угла, називају се **унакрсни углови**.

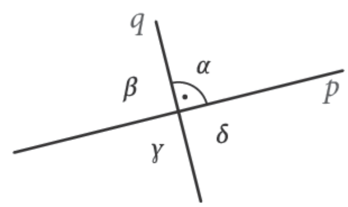


Унакрсни углови су централносиметрични у односу на пресечну тачку одговарајућих правих, па су међу собом једнаки.

ПРИМЕР 1. Ако угао α на слици изнад има меру од $60°$, израчунај мере углова β, γ и δ.

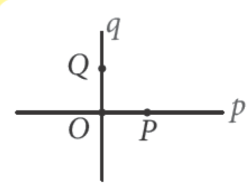
РЕШЕЊЕ Угао γ једнак је углу α, јер су то унакрсни углови. Угао β је суплементан углу α, па је $\beta = 180° - 60° = 120°$. Углови β и δ су унакрсни, па је $\delta = \beta = 120°$.

Нека је један од углова под којим се секу праве p и q прав, као што је на слици приказано. Тада су и остала три угла β, γ и δ прави, као суплементни или унакрсни углови.



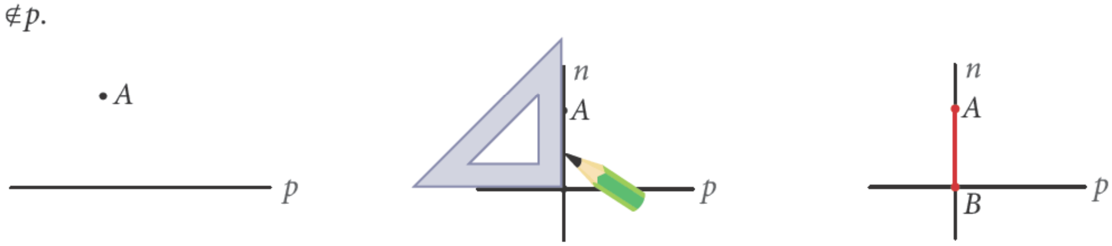
Ако праве p и q садрже редом краке OP и OQ правог угла $\measuredangle POQ$, тада кажемо да је права p **нормална** (**ортогонална**) на правој q. Пише се $\boldsymbol{p \perp q}$.

Јасно је да, ако је $p \perp q$, тада важи и $q \perp p$.



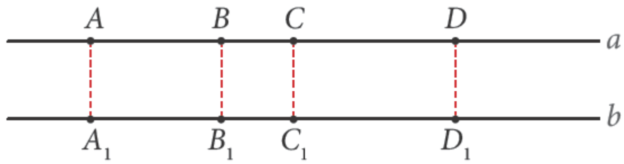
» **ортогоналан** – реч која потиче од грчких речи (*орто* – прав, усправан и *гон* – угао) и значи правоугли

Ако су дате права p и тачка A, тада постоји тачно једна права n која садржи тачку A и нормална је на p. Права n се може нацртати помоћу троугаоног лењира било да $A \in p$ или $A \notin p$.



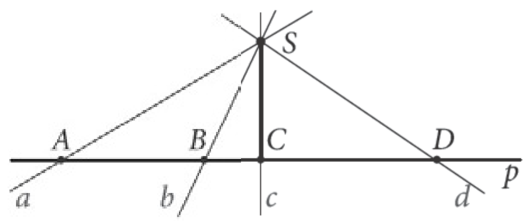
Нека тачка A не припада правој p и нека права n садржи тачку A и нормална је на праву p. Ако права n сече праву p у тачки B, тада се каже да је дужина дужи AB растојање тачке A од праве p.

Ако су a и b паралелне праве, тада су све тачке једне праве подједнако удаљене од друге праве.



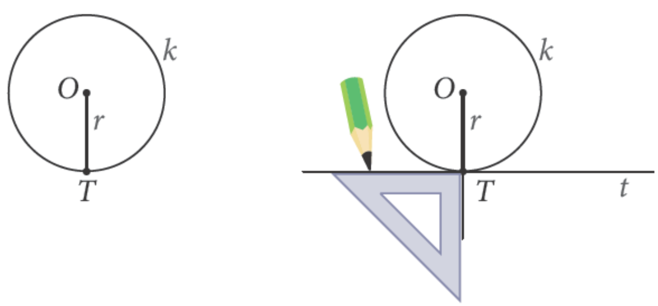
Растојање било које тачке једне праве од друге праве представља растојање између две паралелне праве.

ПРИМЕР 2. Праве a, b, c и d секу праву p редом у тачкама A, B, C и D. Која од дужи SA, SB, SC, SD представља одстојање тачке S од праве p?

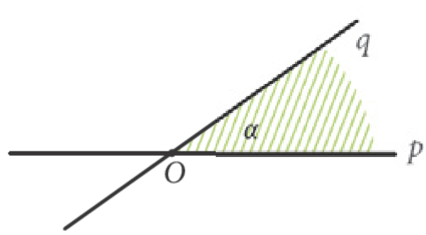


РЕШЕЊЕ То је дуж SC, јер је $c \perp p$.

Нека је права t тангента дате кружнице $k(O, r)$ у тачки T. Како је права t нормална на полупречник OT, то користећи троугаони лењир, можемо нацртати тангенту кружнице у задатој тачки те кружнице.

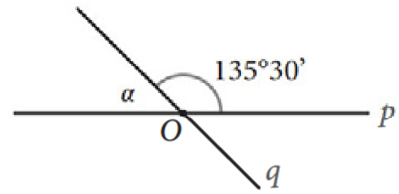


Претпоставимо да праве p и q нису међу собом нормалне и да се секу као што је на слици приказано. Каже се да је угао између правих p и q оштар угао који оне граде.



ПРИМЕР 3. Праве p и q се секу у тачки O. И при томе један од углова које оне граде има меру $135° \ 30'$. Колика је мера угла између правих p и q?

РЕШЕЊЕ Угао између правих p и q је оштар угао.
Меру угла α налазимо из:
$\alpha = 180° - 135°30' =$
$180° - 135° - 30' =$
$45° - 30' = 44°30'$.



Реши **тест број 23** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

41. Нацртај праву p и тачку A ван ње, затим нормалу n на p тако да $A \in n$ и одреди растојање тачке A од праве p.

42. Нацртај кружницу $k(O, 2\,\text{cm})$ и одреди једну тачку M на кружници, а затим нацртај тангенту кружнице k у тачки M.

43. Један од углова под којим се секу праве a и b има меру од $142°57' \ 5''$. Одреди угао између правих a и b.

44. Праве p и q секу се у тачки M при чему један од углова које оне граде има меру $92°15'44''$. Одреди меру угла између правих p и q.

45. Нацртај кружницу $k(O, 2\,\text{cm})$и произвољну праву p која не садржи тачку O. Одреди одстојање тачке O од праве p.

46. Нацртај кружницу $k(O, 2\,\text{cm})$, одреди две тачке M и N на кружници, а затим нацртај тангенту кружнице у тачки M и одреди одстојање тачке N од те тангенте.

47. Нацртај правоугаоник $ABCD$. Угломером измери угао између правих AC и BD.

48. Углови $\alpha = 30°18'44''$ и β су унакрсни. Одреди меру угла γ суплементног углу β.

49. Нацртај:

а) оштар угао и њему унакрсни;

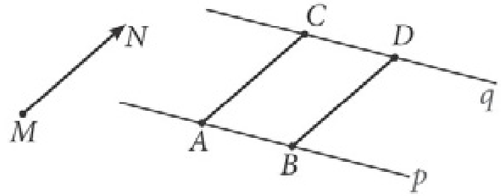
б) туп угао и њему унакрсни угао.

50. Нека права p, која садржи центар кружнице $k(O, 3\,\text{cm})$, сече ту кружницу у тачкама A и B. Нацртај тангенте кружнице k у тачкама A и B.

Све примере у лекцији уради користећи алат на сајту:
www.geogebra.org

5.6. Транслација и углови
Углови на трансверзали

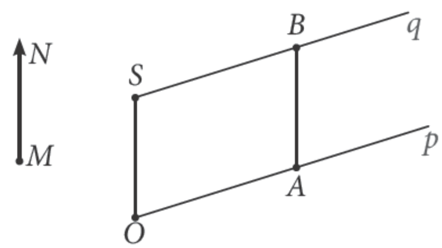
Нека су дате тачке A и B које одређују праву p и вектор $\overrightarrow{MN}$ чији правац није паралелан правој p. Транслацијом за вектор $\overrightarrow{MN}$ тачке A и B редом се пресликавају у тачке C и D. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм, ако се права p транслацијом за дати вектор пресликава у праву q која је паралелна правој p.



ПРИМЕР 1. Пресликај дату полуправу Op транслацијом за дати вектор $\overrightarrow{MN}$.

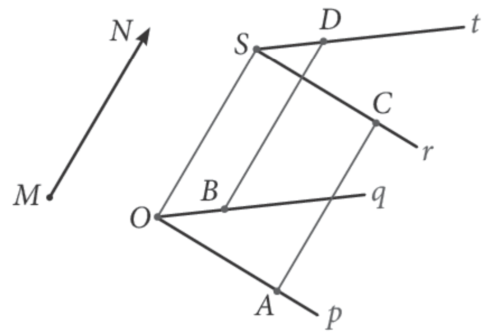
РЕШЕЊЕ

Најпре одредимо тачку S такву да је $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{MN}$, тј. тачка S је слика тачке O при транслацији за вектор $\overrightarrow{MN}$. Затим неку произвољну тачку $A \in p$ пресликамо за $\overrightarrow{MN}$ у тачку B. Полуправа Sq паралелна полуправој Op слика је те полуправе транслацијом за $\overrightarrow{MN}$.



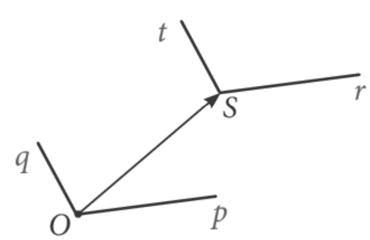
Видели смо да се транслацијом права пресликава у паралелну праву, а полуправа у паралелну полуправу. Нека је сада дат $\sphericalangle pOq$ и вектор $\overrightarrow{MN}$. Одредимо тачке A и B ($A \in Op$, $B \in Oq$) и њихове слике C и D при транслацији за $\overrightarrow{MN}$.

Ако одредимо тачку S која је слика тачке O при овој транслацији, онда се $\sphericalangle AOB$ пресликава у $\sphericalangle CSD$. Ови углови имају паралелне краке и међу собом су једнаки.

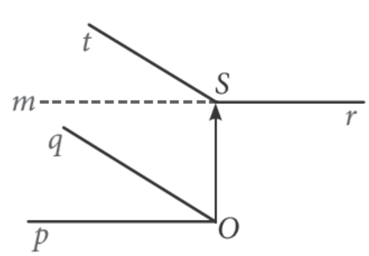


Транслацијом се угао пресликава у једнак угао са паралелним крацима.

Исто тако, ако имамо два угла $\sphericalangle pOq$ и $\sphericalangle rSt$ са паралелним крацима, који су оба оштра, оба права, или оба тупа, и транслацијом за $\overrightarrow{OS}$ угао $\sphericalangle pOq$ се пресликава на угао $\sphericalangle rSt$, тада су ови углови једнаки.

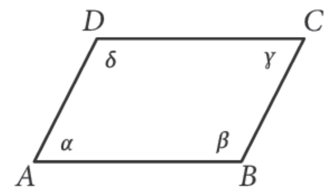


Ако су дати углови $\sphericalangle pOq$ и $\sphericalangle rSt$ са паралелним крацима, од којих је један оштар, а други туп, тада су ти углови суплементни. Наиме, ако је Sm полуправа таква да припада истој правој као и Sr, тада је $\sphericalangle pOq = \sphericalangle mSt$, а како су углови $\sphericalangle pOq$ и $\sphericalangle rSt$ суплементни, то су и углови $\sphericalangle mSt$ и $\sphericalangle rSt$ суплементни.



Ако су углови $\sphericalangle pOq$ и $\sphericalangle rSt$ са паралелним крацима оба оштра, оба права или оба тупа, они су међу собом једнаки, а ако је један од њих оштар, а други туп, онда су суплементни.

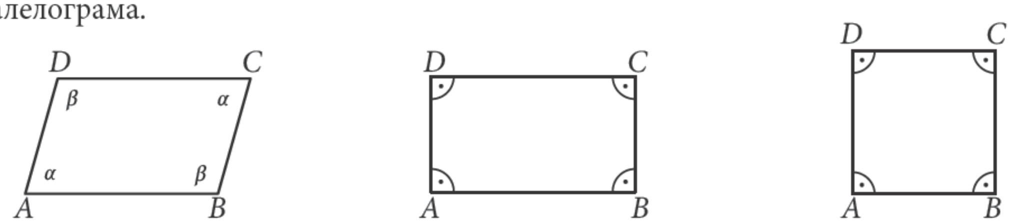
ПРИМЕР 2. На слици је приказан паралелограм $ABCD$. Његови суседни углови α и β, као и β и γ, γ и δ, δ и α су суплементни.



Наспрамни углови α и γ, као и β и δ међу собом су једнаки.

Суседни углови паралелограма су суплементни, а наспрамни углови једнаки.

Овим се можемо осврнути и на правоугаоник и квадрат који су специјални случајеви паралелограма.



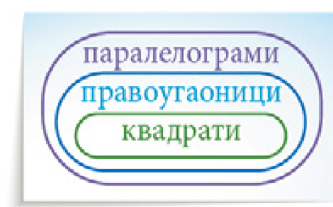
паралелограм
$\alpha, \beta \neq 90°$

правоугаоник
сви углови су прави

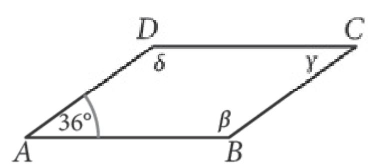
квадрат
све странице су једнаке и сви углови су прави

Правоугаоник је паралелограм чији су сви углови прави, а квадрат је правоугаоник чије су све странице једнаке.

Заправо, сваки правоугаоник је специјалан случај паралелограма чији су сви углови прави, док је квадрат специјалан случај правоугаоника чије су све странице једнаке.

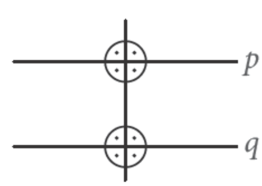


ПРИМЕР 3. Угао α код темена A паралелограма $ABCD$ има меру 36°. Израчунај углове β, γ и δ.

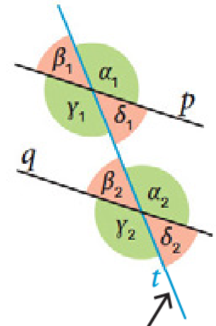


РЕШЕЊЕ Углови γ и α су оштри, а углови β и δ су тупи, па је $\gamma = \alpha = 36°$ и $\beta = \delta = 180° - \alpha = 144°$.

ПРИМЕР 4. Нека су две паралелне праве p и q пресечене правом n која је нормална на једну од њих. Тада је права n нормална и на другу праву и сви углови које права n гради са правама p и q су прави.



Претпоставимо сада да су праве p и q паралелне и да права t није нормална на правој p. Она тада гради са правама p и q углове α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, β_2, γ_2 и δ_2 као што је приказано на слици. Овде се ради о угловима са паралелним крацима, па су сви оштри углови међу њима (β_1, δ_1, β и δ_2) међу собом једнаки и сви тупи углови (α_1, γ_1, α_2 и γ_2) међу собом једнаки. Сви парови углова од којих је један оштар, а други туп (на пример α_1 и δ_2) суплементни су, $\alpha_1 + \delta_2 = 180°$.



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2$$

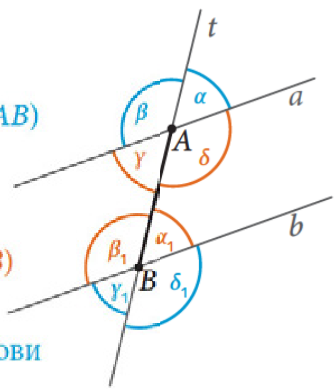
$$\beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = \delta_2$$

У оваквим случајевима када су две праве p и q пресечене трећом правом t, кажемо да је та трећа права **трансверзала**, а углови које она гради са правама p и q називају се **трансверзални углови**.

Реч **трансверзалан** води порекло из латинског језика и значи попречан.

Углови на трансверзали су једнаки ако су оба оштра, оба права или оба тупа. Ако је један оштар, а други туп, они су суплементни.

Врсте углова на трансверзали

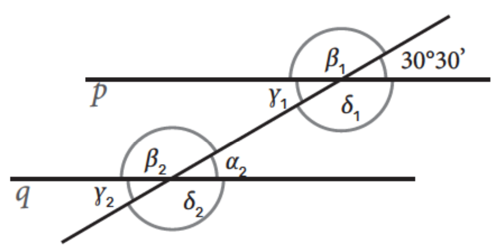


$a \parallel b$
$a \cap t = \{A\}$
$b \cap t = \{B\}$

Сагласни углови (један спољашњи и један унутрашњи угао са исте стране трансверзале а нису суседни): α и α_1; β и β_1; γ и γ_1; δ и δ_1.
Наизменични углови (два спољашња или два унутрашња угла који нису са исте стране трансверзале и нису суседни): α и γ_1; α_1 и γ; β и δ_1; β_1 и δ.

Супротни углови (два спољашња или два унутрашња угла који су са исте стране трансверзале): α и δ_1; δ и α_1; β и γ_1; γ и β_1.

ПРИМЕР 5. Један од трансверзалних углова на слици има меру 30°30′. Одреди мере осталих углове на трансверзали.



РЕШЕЊЕ

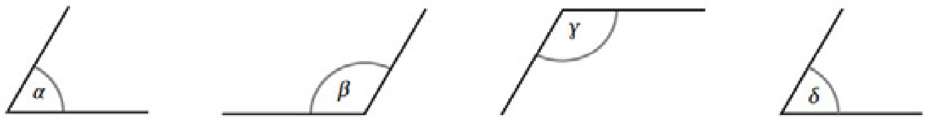
$\alpha_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = 30°30'$,
$\beta_1 = \delta_1 = \beta_2 = \delta_2 = 149°30'$.

Реши **тест број 24** на електронској платформи еЗбирка:

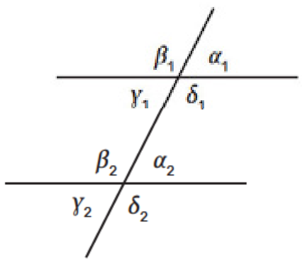
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

51. Углови на слици имају паралелне краке. Ако је $\beta = 119°$, одреди углове α, δ и γ.



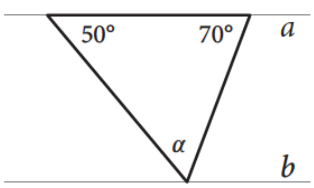
52. Одреди меру углова α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, γ_2 и δ_2, ако је $\beta_2 = 117°53'30''$.



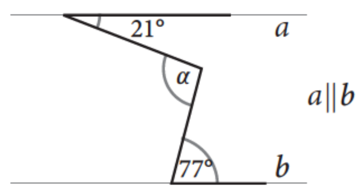
53. Нацртај један оштар угао pOq и у његовој области тачку S, а затим нацртај један угао чије је теме тачка S и има паралелне краке крацима угла pOq, при чему:

а) једнак је углу pOq; б) суплементан је углу pOq.

54. Одреди меру угла α на слици.



55. Израчунај меру угла α на слици.



56. Паралелне праве p и q пресечене су правом r. Један од добијених углова има меру $38°30'$. Колика је мера осталих седам углова?

57. Углови са паралелним крацима су такви да је један два пута већи од другог. Одреди мере тих углова.

58. Нацртај један оштар, а други туп угао тако да им краци буду паралелни.

59. На кружници $k(O, 2\,\text{cm})$ дате су тачке A и B. Нацртај два угла са паралелним крацима чија су темена у тачкама A, односно B.

60. Углови pOq и mSn су једнаки. Ако је $Op \| Sm$, да ли је и $Oq \| On$?

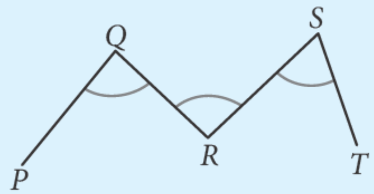
61. Одреди углове паралелограма ако је један његов угао 97°.

62.* Одреди углове паралелограма ако је један његов угао за 30° већи од његовог суседног угла.

63.* Одреди углове паралелограма ако је један његов угао 3 пута мањи од његовог суседног угла.

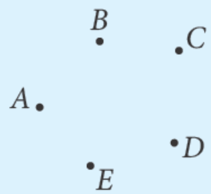
РАЗНИ ЗАДАЦИ

64. Углове означене на слици



обележи симболом (на пример $\sphericalangle PQR$).

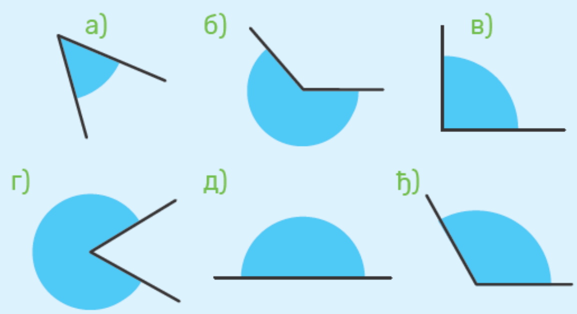
65. Дате су тачке A, B, C, D и E. Означи углове $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle ABE$, $\sphericalangle BEC$ и $\sphericalangle CDE$.



66. Нацртај два угла са заједничким:

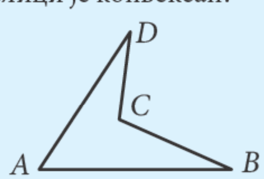
а) краком; б) теменом.

67. Који од углова приказаних на слици су конвексни?



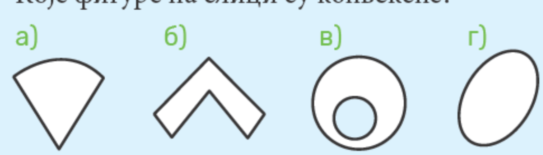
68. Који од углова на слици је конвексан?

а) $\sphericalangle BAD$;
б) $\sphericalangle ADC$;
в) $\sphericalangle DCB$;
г) $\sphericalangle CBA$.



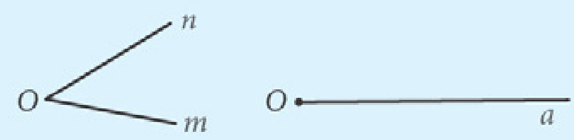
Заокружи слово испред тачног исказа.

69. Које фигуре на слици су конвексне?



Заокружи слово изнад конвексне фигуре.

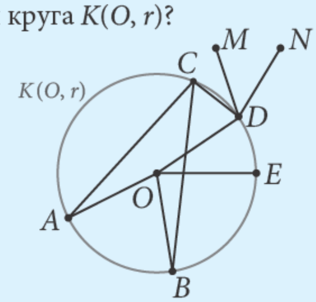
70. Дат је угао $\sphericalangle mOn$ и полуправа Oa на слици.



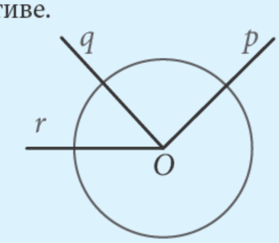
Конструши угао једнак углу mOn тако да му један крак буде полуправа Oa.

71. Који од углова приказаних на слици су централни углови круга $K(O, r)$?

а) $\sphericalangle AOB$;
б) $\sphericalangle ACB$;
в) $\sphericalangle MDN$;
г) $\sphericalangle DOE$;
д) $\sphericalangle BCD$?



72. Тачка O је центар круга на слици. Уочи све конвексне централне углове и означи одговарајуће тетиве.

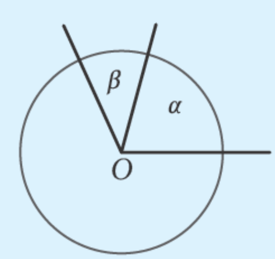


73. Нацртај кружницу $k(O, \text{r})$ и Oa, Ob и Oc. Колико централних углова одређују ове полуправе?

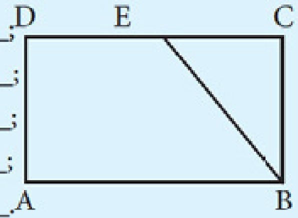
74. Нацртај кружницу $k(O, 2\text{ cm})$ и KL и MN. Упореди затим централне углове $\sphericalangle KOL$ и $\sphericalangle MON$.

75. Помоћу лењира и шестара конструиши задате углове ако су α и β углови приказани на слици.

а) $\alpha + \beta$;
б) $\alpha - \beta$;
в) $2 \cdot \alpha$;
г) $2 \cdot \beta$.



76. Одреди који углови на слици су оштри, прави или тупи:

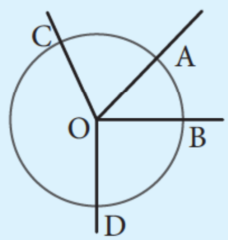


а) $\sphericalangle ABE$ је ____________;
б) $\sphericalangle ADE$ је ____________;
в) $\sphericalangle ABC$ је ____________;
г) $\sphericalangle BED$ је ____________;
д) $\sphericalangle EBC$ је ____________.
ђ) Какав је $\sphericalangle DEC$?

77. Нацртај:

а) два оштра угла и сабери их;
б) један туп и један оштар угао и нађи њихову разлику.

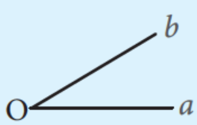
78. На слици су приказани централни углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$.



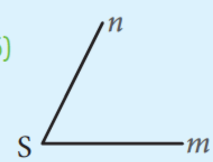
Упореди тетиве AB и CD и централне углове $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$.

79. Пренеси дате углове $\sphericalangle aOb$ и $\sphericalangle mSn$ у своју свеску, а затим их уз помоћ лењира и шестара упореди.

а)



б)



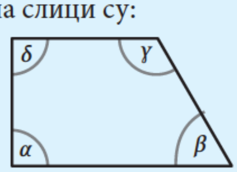
80. Какав угао заклапају казаљке сата на слици:

а) оштар;
б) туп;
в) прав;
г) опружен?

Заокружи слово испред тачног исказа.

81. Који од углова на слици су:

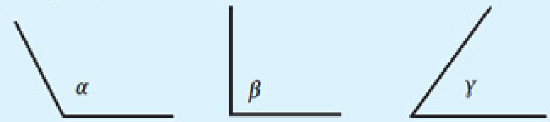
а) оштри;
б) прави;
в) тупи?



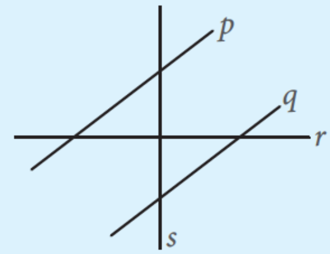
Заокружи слово испред тачног исказа.

82. Нацртај један троугао и три полуправе Aa, Bb и Cc. Конструиши углове једнаке угловима α, β и γ троугла тако да им један крак буде полуправа Aa, Bb, односно Cc, редом.

83. Пренеси углове α, β и γ у своју свеску, а затим уз помоћ лењира и шестара конструиши угао $\alpha-\beta+\delta$.



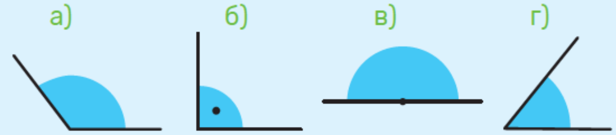
84. На основу слике допуни следеће реченице:



а) паралелне праве су ________________;
б) нормалне праве су ________________.

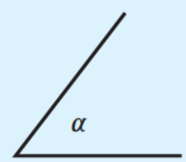
85. На којој слици је приказан опружен угао?

а) б) в) г)



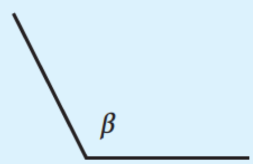
Заокружи слово испред тачне слике.

86. а) Од опруженог угла одузми углове α и β на слици.



б) Прав угао сабери са датим углом α.

в) Од датог угла β одузми прав угао.



87. За колико је суплемент угла $\alpha = 51°43'$ већи од комплемента угла $\beta = 23°17'54''$?

88. Користећи угломер нацртај угао:

а) комплементан;
б) суплементан;

углу од 70°.

89. Применом угломера нацртај угао од 60°, а затим га подели на три једнака дела. Колика је мера сваког од добијених углова?

90. Збир угла α и два њему упоредна угла износи 200°. Одреди меру угла α.

91*. Углови α и γ су суплементни, а β и γ комплементни. Израчунај разлику углова α и β.

92. Користећи угломер нацртај углове $\alpha = 43°$ и $\beta = 27°$, а затим графички и рачунски одреди углове:

а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha - \beta$; в) $2 \cdot \alpha$;
г) $3 \cdot \beta$; д) $2 \cdot \alpha - \beta$; ђ) $2 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta$.

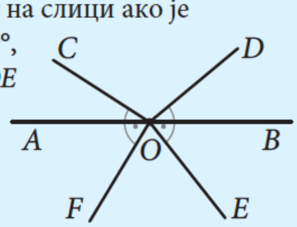
93*. Угао α једнак је половини свог комплементног угла. Израчунај угао β који је једнак половини угла суплементног углу α.

94*. Нађи меру угла који је од свог комплементног угла већи онолико колико је мањи од свог суплементног угла.

95*. Одреди углове α и β ако је угао комплементан углу α једнак углу суплементном углу β, а угао суплементан са $\alpha + \beta$ има меру 50°.

96*. Две праве p и q секу се тако да одређују два оштра и два тупа угла. Један оштар угао и трећина тупог угла су комплементни углови. Колика је мера оштрог, а колика тупог?

97. Израчунај угао $\sphericalangle COD$ на слици ако је $\sphericalangle AOF = 21°$, $\sphericalangle BOE = 19°$, а углови $\sphericalangle COF$ и $\sphericalangle DOE$ су прави.



98. Који је угао седам пута мањи од свог:

а) суплементног; б) комплементног угла?

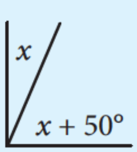
99. Ако је $\alpha = 45°45'45''$, израчунај меру угла:

а) $2 \cdot \alpha$; б) суплементног углу $2 \cdot \alpha$.

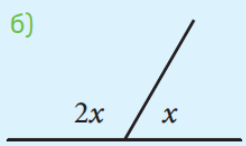
100. Израчунај збир угла комплементног и угла суплементног углу $\alpha = 48°32'56''$.

101. Израчунај меру угла x на сликама а), б), в), г).

а)

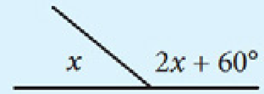


б)



в)

г)



102. Који је угао већи, две петине опруженог или $\frac{7}{9}$ правог угла?

103. Разлика два упоредна угла једнака је правом углу. Одреди мере ових углова.

104. Ако су α и β комплементни, а β и γ суплементни углови, доказати да је $\gamma - \alpha$ прав угао.

105. Помоћу угломера нацртај углове $\alpha = 45°$, $\beta = 122°$ и $\gamma = 32°$, а затим помоћу лењира и шестара конструиши углове:

а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha + \gamma$; в) $\beta + \gamma$;
г) $\beta - (\alpha + \beta)$; д) $\alpha + \beta - \gamma$; ђ) $\beta + (\alpha + \gamma)$.

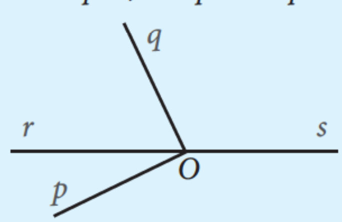
106. Помоћу угломера нацртај а) комплементан; б) суплементан угао углу од 72°.

107. Помоћу угломера нацртај угао x за чију меру важи: а) $x + 12° = 73°$; б) $80° - x = 43$.

108. Дат је угао $\alpha = 58°24'32''$. Одреди меру угла:

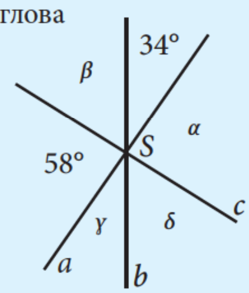
а) комплементног углу α;
б) суплементног углу α;
в) унакрсног углу α.

109. На слици је $\sphericalangle pOq$ прав, а $\sphericalangle pOr = 30°$. Израчунај мере углова $\sphericalangle pOs$, $\sphericalangle sOq$ и $\sphericalangle rOq$.



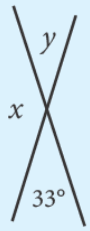
110. Праве a, b и c секу се у тачки S.

Одреди мере углова α, β, γ и δ.

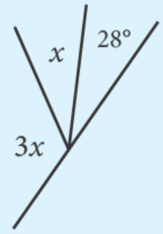


111. Одреди меру углова x и y на слици.

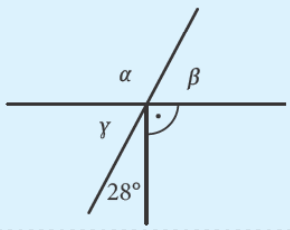
а)



б)

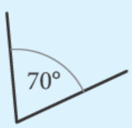


112. Израчунај углове α, β и γ на слици.

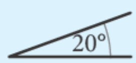


113. Који од углова на слици је суплементан углу $\alpha = 70°$?

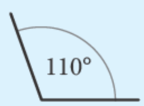
а)



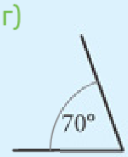
б)



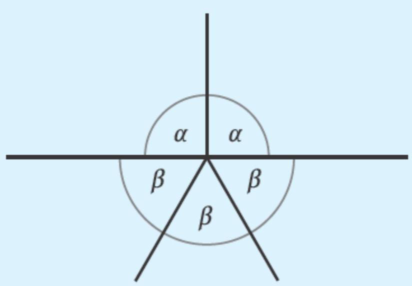
в)



г)



114. Израчунај мере углова α и β на слици.



115. Нацртај један произвољан оштар угао α, а затим нацртај угао:

а) упоредан углу α; б) $2 \cdot \alpha$.

116. Нацртај један прав угао, а затим помоћу лењира и шестара конструиши углове од:

а) 45°; б) 22°30′; в) 67°30′.

117. Од угла суплементног углу од 38°27′44″ одузми угао комплементан углу од 29°15′35″.

118. Када се једном од два упоредна угла дода четвртина другог угла, добија се угао чија је мера 99°. Израчунај мере свих углова.

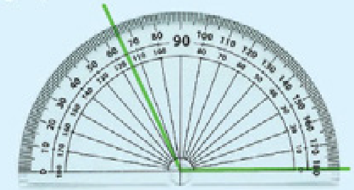
119. Колика је мера угла на слици ?

а) 65°;

б) 75°;

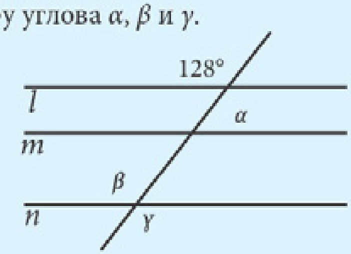
в) 115°;

г) 125°.

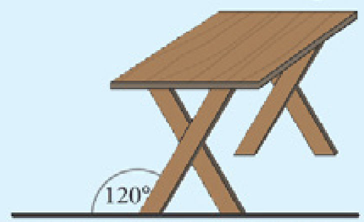


Заокружи слово испред тачног одговора.

120. Праве l, m и n на слици су паралелне. Одреди меру углова α, β и γ.



121. Угао између ногара стола и пода је 120° (слика). Колики угао треба да буде између тих ногара и даске стола да би она била паралелна поду?



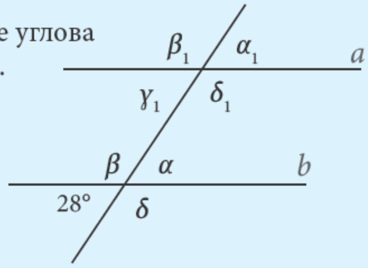
122. Улицу липа секу Улице кестена и јасена као на слици.

Одреди мере углова α и β.

123. Које две улице на мапи су међу собом

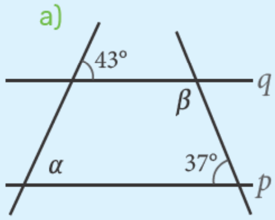
а) паралелне; б) нормалне?

124. Израчунај мере углова на слици ($a \| b$).

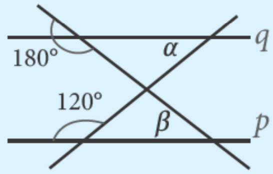


125. Израчунај мере углова α и β на слици.

а)

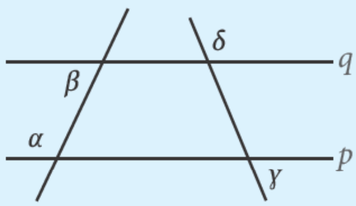


б)



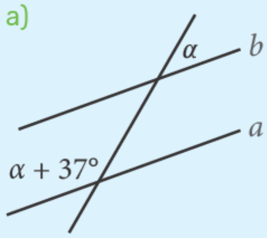
ако су праве p и q паралелне.

126. Праве p и q на слици су паралелне. Израчунај мере углова α, β, γ и δ ако је угао β два пута мањи од угла α, а угао δ за 20° већи од угла γ.

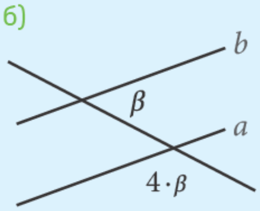


127. Праве a и b на сликама а) и б) су паралелне. Израчунај мере углова α и β.

а)

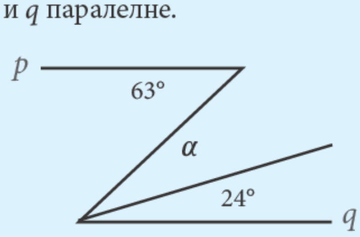


б)

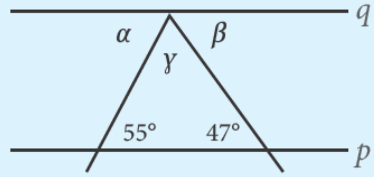


128. Од два угла са паралелним крацима један је пет пута већи од другог. Одреди њихове мере.

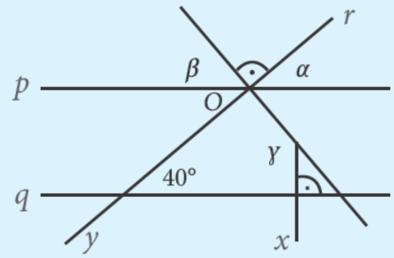
129. Израчунај меру угла α на слици ако су праве p и q паралелне.



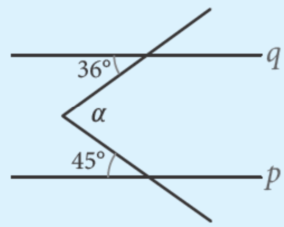
130. Израчунај мере углове α, β и γ на слици ако је $p \| q$.



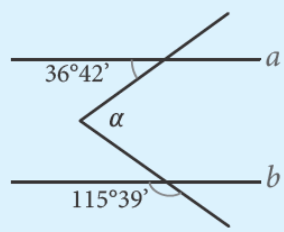
131*. Израчунај мере углова α, β и γ на слици, ако су праве p и q паралелне, $Ox \perp q$ и $Oy \perp r$.



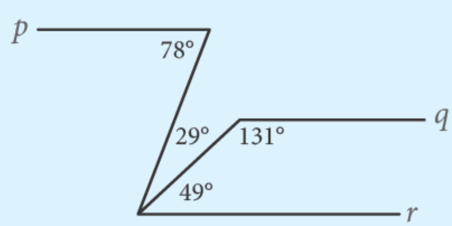
132. Праве p и q на слици су паралелне. Одреди меру угла α.



133. Праве a и b на слици су паралелне. Израчунај меру угла α.



134. Докажи да су праве p, q и r на слици међусобно паралелне.



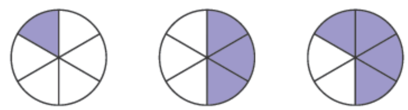
6 РАЗЛОМЦИ – *Други део*

6.1. Сабирање и одузимање разломака (запис $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$)

Поступак сабирања и одузимања разломака зависи од њихових именилаца. Зато ћемо прво размотрити поступак сабирања и одузимања разломака једнаких именилаца.

Сабирање и одузимање разломака једнаких именилаца

ПРИМЕР 1. На слици је илустровано сабирање разломака: $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$.



Уопште, када се сабирају разломци са једнаким имениоцима, имениоци се препишу, а бројиоци саберу.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

На пример: $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$, $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$, $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$.

Слично је и код одузимања – разломци са једнаким имениоцима се одузимају, тако што се имениоци препишу, а бројиоци одузму.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

На пример: $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$, $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$.

Приметимо да се ова операција заснива на закону дистрибутивности операције дељења у односу на сабирање и одузимање. За природне бројеве a, b, c важи:

$a : c + b : c = (a + b) : c$

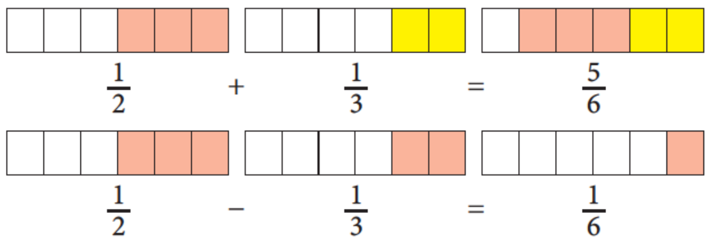
$a : c - b : c = (a - b) : c$, при чему је $a > b$.

Сабирање и одузимање разломака различитих именилаца

За сабирање или одузимање разломака различитих именилаца потребно је да се разломци доведу до заједничког имениоца, па потом да се саберу или одузму.

ПРИМЕР 2. Како је $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, а $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, то је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

што можемо приказати на следећи начин



> Разломке различитих именилаца сабирамо или одузимамо тако што их проширивањем доведемо на разломке једнаких именилаца, потом их саберемо или одузмемо као разломке једнаких именилаца.

ПРИМЕР 3. Израчунај: а) $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{9}+\frac{1}{8}$; в) $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}$.

РЕШЕЊЕ а) $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{3}{21}+\frac{14}{21}=\frac{17}{21}$ б) $\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{2\cdot 8}{9\cdot 8}+\frac{1\cdot 9}{8\cdot 9}=\frac{16}{72}+\frac{9}{72}=\frac{25}{72}$

в) $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 6}{9\cdot 6}-\frac{1\cdot 9}{6\cdot 9}=\frac{12}{54}-\frac{9}{54}=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}$

У овом примеру смо могли једноставније да дођемо до разлике $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}$. Уместо заједничког садржаоца 54, можемо се определити за најмањи заједнички садржалац именилаца разломака – НЗС(9, 6) = 18. Онда је:

$$\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 2}{9\cdot 2}-\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{4}{18}-\frac{3}{18}=\frac{1}{18}$$

Примену НЗС за одређивање заједничког имениоца разломака које сабирамо или одузимамо показаћемо и на следећем примеру.

ПРИМЕР 4. Израчунај $\frac{5}{24}+\frac{7}{18}$ на два начина.

РЕШЕЊЕ

1. начин – Одређивање заједничког садржаоца именилаца разломака

$$\frac{5}{24}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{24\cdot 18}+\frac{7\cdot 24}{18\cdot 24}=\frac{90}{432}+\frac{168}{432}=\frac{258}{432}$$

2. начин – Одређивање најмањег заједничког садржаоца именилаца разломака

18,	24	2
9,	12	2
9,	6	2
9,	3	3
3,	1	3
1,	1	

Имамо да је НЗС(18,24) = 72 и да је 72 : 24 = 3 и 72 : 18 = 4.
Проширићемо први сабирак са 3, а други са 4.

$$\frac{5}{24}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3}{24\cdot 3}+\frac{7\cdot 4}{18\cdot 4}=\frac{15}{72}+\frac{28}{72}=\frac{43}{72}$$

Рачунајући на оба начина добијамо исти резултат, јер се скраћивањем бројиоца и имениоца разломка $\frac{258}{432}$ са 6 добија $\frac{43}{72}$. Можемо да уочимо да је други начин сабирања разломака (одређивањем НЗС за имениоце) једноставнији, јер се приликом израчунавања појављују мањи бројеви.

Природни број треба написати у облику разломка, користећи једнакост $n=\frac{n}{1}$ $(n \in N)$ у случајевима када се:

- разломак сабира са природним бројем,
- од разломка одузима природни број,
- од природног броја одузима разломак.

Такође, разломке у облику мешовитих бројева можемо сабирати или одузимати не само претварањем у неправе разломке, већ и у постојећем облику позајмљивањем.

ПРИМЕР 5. Израчунај: а) $\frac{5}{7}+4$; б) $\frac{11}{2}-2$; в) $3-\frac{1}{5}$.

РЕШЕЊЕ

а) 1. начин: $\frac{5}{7}+4=\frac{5}{7}+\frac{4}{1}=\frac{5}{7}+\frac{4\cdot 7}{1\cdot 7}=\frac{5}{7}+\frac{28}{7}=\frac{33}{7}=4\frac{5}{7}$

2. начин – Применимо комутативност сабирања: $\frac{5}{7}+4=4+\frac{5}{7}=4\frac{5}{7}$

б) 1. начин: $\frac{11}{2}-2=\frac{11}{2}-\frac{2}{1}=\frac{11}{2}-\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{11}{2}-\frac{4}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$

2. начин – Први разломак претворимо у мешовити број: $\frac{11}{2}-2=5\frac{1}{2}-2=3\frac{1}{2}$

в) 1. начин: $3-\frac{1}{5}=\frac{3}{1}-\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 5}-\frac{1}{5}=\frac{15}{5}-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$

2. начин – Природан број претворимо у одговарајући мешовити број:

$3-\frac{1}{5}=2\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=2\frac{4}{5}$

У свим овим случајевима користили смо чињеницу да је за све природне бројеве m НЗС$(m,1)=m$.

ПРИМЕР 6. Израчунај збирове и разлике на два начина: претварањем у неправе разломке, као и позајмљивањем:

а) $2\frac{1}{3}+1\frac{3}{4}=\frac{7}{3}+\frac{7}{4}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{28}{12}+\frac{21}{12}=\frac{49}{12}=4\frac{1}{12}$

$2\frac{1}{3}+1\frac{3}{4}=2\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}+1\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=2\frac{4}{12}+1\frac{9}{12}=3\frac{13}{12}=4\frac{1}{12}$

Реши **тест број 36** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

б) $5\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}=\frac{11}{2}-\frac{13}{5}=\frac{11\cdot 5}{2\cdot 5}-\frac{13\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{55}{10}-\frac{26}{10}=\frac{29}{10}=2\frac{9}{10}$

$5\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}=5\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}-2\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=5\frac{5}{10}-2\frac{6}{10}=(4+1)\frac{5}{10}-2\frac{6}{10}=4\frac{15}{10}-2\frac{6}{10}=2\frac{9}{10}$

ЗАДАЦИ

1. Израчунај:

а) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$;

в) $\frac{2}{11}+\frac{5}{11}+\frac{3}{11}$; г) $\frac{9}{7}-\frac{5}{7}$;

д) $\frac{4}{13}-\frac{1}{13}$; ђ) $\frac{5}{12}-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}$.

2. Израчунај:

а) $\frac{3}{8}+\frac{8}{3}$; б) $\frac{2}{3}-\frac{1}{7}$; в) $\frac{4}{11}+\frac{2}{5}$.

3. Израчунај:

а) $\frac{2}{6}+\frac{1}{12}$; б) $\frac{5}{8}-\frac{1}{12}$;

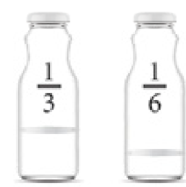
в) $\frac{3}{4}+\frac{5}{18}$; г) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$.

4. Израчунај:

а) $\frac{12}{7}+5$; б) $\frac{5}{3}-1$; в) $2-\frac{4}{9}$.

5.* Иван је једног дана прочитао $\frac{5}{12}$, другог $\frac{1}{7}$, а трећег $\frac{11}{42}$ део неке књиге. Колики део те књиге је прочитао за три дана?

6.* Зоран има две једнаке боце. У једној се налази $\frac{1}{3}$ воде, а у другој $\frac{1}{6}$ воде. Ако воду из друге боце преспе у прву, који део прве боце ће бити испуњен водом?



7. Израчунај:

а) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}$; б) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}-\frac{4}{7}+\frac{5}{7}-\frac{6}{7}$.

8. Израчунај:

а) $\frac{52}{3}+\frac{31}{3}$; б) $\frac{41}{7}-\frac{23}{7}$;

в) $\frac{51}{2}-\frac{31}{3}$; г) $\frac{41}{2}-\frac{32}{3}$.

9. Броју 5 додај разлику бројева $\frac{11}{7}$ и $\frac{2}{3}$.

10. Од броја 9 одузми збир бројева $\frac{1}{2}$ и $\frac{13}{4}$.

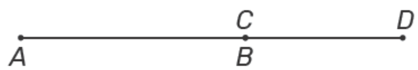
6.2. Сабирање и одузимање разломака (децимални запис)

ПРИМЕР 1. Једна дуж има дужину 3,1 cm, а друга 2,2 cm. Колика је дужина збира ових дужи?

РЕШЕЊЕ Претворимо дате бројеве у запис облика $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$.

Имамо да је $3{,}1 = \frac{31}{10}$ и $2{,}2 = \frac{22}{10}$, па је $3{,}1 + 2{,}2 = \frac{31}{10} + \frac{22}{10} = \frac{31+22}{10} = \frac{53}{10} = 5\frac{3}{10}$.

Дужина збира ових дужи је $5\frac{3}{10}$ cm = 5,3 cm.



Међутим, бројеви у децималном запису се могу сабрати и једноставније, као природни бројеви, али водећи рачуна о децималној запети. На пример:

$$\begin{array}{r} 3{,}1 \\ +\ 2{,}2 \\ \hline 5{,}3 \end{array}$$

Бројеве у децималном запису сабирамо или одузимамо као природне бројеве, водећи рачуна да се код потписивања децималне запете налазе тачно једна испод друге.

ПРИМЕР 2. Израчунај:

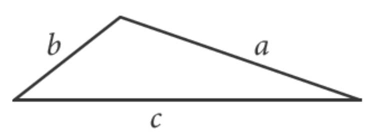
а) 5,48 + 3,21; б) 6,81 + 0,28; в) 5,3 + 1,15; г) 4,5 − 1,2;
д) 3,21 − 1,18; ђ) 5,3 + 2,71 − 1,5; е) 5,67 − 2,4589.

РЕШЕЊЕ

а) $\begin{array}{r} 5{,}48 \\ +\ 3{,}21 \\ \hline 8{,}69 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 6{,}81 \\ +\ 0{,}28 \\ \hline 7{,}09 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} 5{,}3 \\ +\ 1{,}15 \\ \hline 6{,}45 \end{array}$ г) $\begin{array}{r} 4{,}5 \\ -\ 1{,}2 \\ \hline 3{,}3 \end{array}$

д) $\begin{array}{r} 3{,}21 \\ -\ 1{,}18 \\ \hline 2{,}03 \end{array}$ ђ) $\begin{array}{r} 5{,}3 \\ +\ 2{,}71 \\ \hline 8{,}01 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8{,}01 \\ -\ 1{,}5 \\ \hline 6{,}51 \end{array}$ е) $\begin{array}{r} 5{,}67 \\ -\ 2{,}4589 \\ \hline 3{,}2111 \end{array}$

ПРИМЕР 3. Израчунај обим троугла чије су странице $a = 2{,}77$ cm, $b = 1{,}462$ cm и $c = 3{,}98$ cm.



РЕШЕЊЕ

$$\begin{array}{r} 2{,}77 \\ +\ 1{,}462 \\ 3{,}98 \\ \hline 8{,}212 \end{array}$$

Тражени обим је 8,212 cm.

Реши **тест број 34** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

11. Сабери бројеве:

а) 11,32 + 5,1; б) 14,3 + 7,78; в) 151,4 + 2,038; г) 21,85 + 6,9 + 3,717.

12. Одузми бројеве:

а) 3,73 – 2,51; б) 4,4 – 2,87; в) 1 – 0,13; г) 5,1 – 3,875.

13. Дати су бројеви $a = 3,71 + 2,845$ и $b = 7,11 - 0,832$. Да ли је $a > b$ или $b > a$?

14. У једном паковању налази се 0,5 литара сока, а у другом 0,75 литара сока. Колико укупно сока има у та два паковања?

15. Два правоугаоника су направљена од жице. Странице једног су $a_1 = 2,3$ cm, $b_1 = 1,8$ cm, а другог $a_2 = 3,4$ cm, $b_2 = 0,6$ cm. Колико је потребно жице за та два правоугаоника?

16. Јелена је од комада канапа дужине 13,2 m исекла два парчета – једно дужине 0,83 m, а друго дужине 1,5 m. Колико канапа јој је преостало?

17. Израчунај:

а) 2,21 – 1,73 + 5,99;

б) 13,54 – 12,87 + 1,05;

в) 12,96 + 5,05 – 15,88.

18. Од броја 18 одузми: а) збир бројева 5,31 и 4,79; б) разлику бројева 5,31 и 4,79.

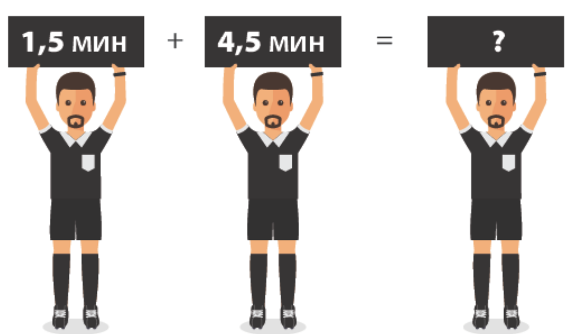
19. Израчунај на што једноставнији начин:

а) 5,37 – 1,89 + 4,52;

б) 13,22 + 19,08 – 11,22;

в) 2,58 – 1,32 – 0,68.

20.* Фудбалски судија продужио је због прекида прво полувреме једне утакмице за 1,5 минута, а друго полувреме за 4,5 минута. Колико је укупно продужио утакмицу?



1. полувреме 2. полувреме укупан продужетак

6.3. Основна својства сабирања и одузимања разломака. Бројевни изрази

Својства операција сабирања и одузимања природних бројева важе и за разломке и њихове децималне записе. За све природне бројеве a, b, c, d, e, f, где су $b, d, f \neq 0$, важи:

комутативност сабирања

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$$

асоцијативност сабирања

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$$

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{7\cdot 2}{6\cdot 2} = \frac{5\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}$$

$$\frac{9}{12} + \frac{14}{12} = \frac{23}{12} = \frac{15}{12} + \frac{8}{12}$$

Нула је неутрални елемент за сабирање (као сабирак не утиче на вредност збира).

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

Одузимање није комутативна операција.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} - \frac{a}{b},\ b, d \neq 0$$

Нула је неутрални елемент за одузимање само као умањилац.

$$\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$$

Примењујући рачунске операције сабирања и одузимања на разломке и њихове децималне записе, градимо **бројевне изразе**. Свака два разломка или децимална записа можемо сабрати, а само од већег можемо одузети онај мањи. Израчунавањем добијамо број који представља **вредност бројевног израза**.

ПРИМЕР 1. Израчунај вредност израза $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$.

РЕШЕЊЕ $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} + \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17-1}{12} = \frac{16}{12}$

ПРИМЕР 2. Израчунај вредност израза 3,56 – 2,09 + 10.

РЕШЕЊЕ 3,56 – 2,09 + 10 = 1,47 + 10 = 11,47

Једноставније бројевне изразе рачунским операцијама повезујемо у сложеније. Приоритет извршавања операција дефинишемо користећи заграде.

ПРИМЕР 3. Од збира бројева 3 и $\frac{1}{2}$ одузми разлику бројева 2,5 и $\frac{3}{4}$.

$$\left(3+\frac{1}{2}\right)-\left(2{,}5-\frac{3}{4}\right)=\left(3+\frac{5}{10}\right)-\left(2{,}5-\frac{75}{100}\right)=\left(3+0{,}5\right)-\left(2{,}5-0{,}75\right)=3{,}5-1{,}75=1{,}75$$

Ако у изразима имамо слова попут: $a, b, c, \ldots m, n, \ldots x, y, z, \ldots$ такве изразе називамо **изрази са промењивом** или промењивама. Заменом промењиве датим бројем добијамо одговарајућу **вредност израза** за дату вредност промењиве (или за дате вредности промењивих).

ПРИМЕР 4. Израчунај вредност израза $6{,}8 + a - (2 - b)$, ако је $a = 5{,}7$ и $b = \frac{7}{4}$.

$$6{,}8 + a - \left(2 - b\right) = 6{,}8 + 5{,}7 - \left(2 - \frac{7}{4}\right) = 12{,}5 - \left(2 - \frac{175}{100}\right) =$$
$$= 12{,}5 - \left(2 - 1{,}75\right) = 12{,}5 - 0{,}25 = 12{,}25$$

За израчунавање вредности бројевних израза можемо да користимо стони калкулатор притискањем тастера за цифре и рачунске операције.

Можемо користити и апликацију *Calculator*:

• на мобилном телефону,

• на рачунару, који се у верзији *Windows 10* отвара у прозору притиском на тастер *Start*, а затим избором опције *Calculator* у падајућем менију.

ПРИМЕР 5. Израчунај вредност бројевног израза помоћу калкулатора:

а) 13, 0528 + 5, 2318 =

РЕШЕЊЕ Притискањем тастера у датом редоследу цифара, рачунских операција и знака једнакости, на екрану ће се исписати резултат 18, 2846.

Реши **тест број 38** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

21. Израчунај вредност израза:

а) $2\frac{5}{6} - \left(1\frac{1}{2} + 0{,}5\right)$; б) $\left(6{,}9 - \frac{4}{5}\right) + \left(3{,}17 - 1\frac{1}{4}\right)$; в) $0{,}25 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 3{,}5 - 0{,}12$

22. Од броја 34 одузми збир бројева 2,18 и 9,06.

23. Разлици бројева $2\frac{1}{2}$ и 1,75 (где је 1,75 умањилац), додај збир бројева $\frac{4}{5}$ и 7,2.

24.* Ако је $a = 1{,}2$, израчунај вредност израза: $\left(3\frac{2}{5} + a\right) - \left(a - 0{,}7\right)$.

25.** Ако је $a = \frac{1}{4}$, $b = 0{,}5$, израчунај вредност израза: $\left(a + 4\frac{1}{2}\right) - \left(5{,}2 - b\right)$.

6.4. Једначине са сабирањем и одузимањем разломака

Подсетимо се да се непознати сабирак израчунава тако што се од збира одузме познати сабирак.

Ако је $x + a = b$,
онда је $x = b - a$
при чему је $(a \leq b)$.

Слично, непознати умањеник се израчунава тако што се разлика сабере са умањиоцем.

Ако је $x - a = b$,
онда је $x = b + a$.

Непознати умањилац се израчунава тако што се од умањеника одузме разлика.

Ако је $a - x = b$,
онда је $x = a - b$
при чему је $(b \leq a)$.

Поменута својства важе за природне бројеве, али и за разломке.

ПРИМЕР 1. Одреди решење једначине $13 - x = 5$.

РЕШЕЊЕ

$13 - x = 5$
$x = 13 - 5$
$x = 8$ Решење дате једначине је број 8.

Провера: $13 - 8 = 5$

ПРИМЕР 2. Реши једначине:

а) $1{,}2 + x = 5{,}7$; б) $x + 13{,}44 = 27{,}1$; в) $x - 5{,}25 = 8$; г) $3{,}13 - x = 2{,}9$.

РЕШЕЊЕ

а) $1{,}2 + x = 5{,}7$
$x = 5{,}7 - 1{,}2 = 4{,}5$
Провера: $1{,}2 + 4{,}5 = 5{,}7$

б) $x + 13{,}44 = 27{,}1$
$x = 27{,}1 - 13{,}44 = 13{,}66$
Провера: $13{,}66 + 13{,}44 = 27{,}1$

в) $x - 5{,}25 = 8$
$x = 8 + 5{,}25 = 13{,}25$
Провера: $13{,}25 - 5{,}25 = 8$

г) $3{,}13 - x = 2{,}9$
$x = 3{,}13 - 2{,}9 = 0{,}23$
Провера: $3{,}13 - 0{,}23 = 2{,}9$

ПРИМЕР 3. Реши једначине:

а) $x + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$; б) $\frac{1}{14} + x = \frac{2}{7}$; в) $2 - x = 1\frac{5}{7}$; г) $x - \frac{4}{15} = \frac{1}{9}$.

РЕШЕЊЕ

а) $x + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$x = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}$
$x = \frac{7}{6} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$
$x = \frac{7}{6} - \frac{4}{6}$
$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Пр.: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

б) $\frac{1}{14} + x = \frac{2}{7}$
$x = \frac{2}{7} - \frac{1}{14}$
$x = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} - \frac{1}{14}$
$x = \frac{4}{14} - \frac{1}{14}$
$x = \frac{3}{14}$
Пр.: $\frac{1}{14} + \frac{3}{14} = \frac{2}{7}$

в) $2 - x = 1\frac{5}{7}$
$x = 2 - 1\frac{5}{7}$
$x = \frac{2}{1} - \frac{12}{7}$
$x = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 7} - \frac{12}{7}$
$x = \frac{14}{7} - \frac{12}{7}$
$x = \frac{2}{7}$
Пр.: $2 - \frac{2}{7} = 1\frac{5}{7}$

г) $x - \frac{4}{15} = \frac{1}{9}$
Најпре одредимо НЗС$(9, 15) = 45$.
$x = \frac{1}{9} + \frac{4}{15}$
$x = \frac{1 \cdot 5}{9 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 3}$
$x = \frac{5}{45} + \frac{12}{45} = \frac{17}{45}$
Пр.: $\frac{17}{45} - \frac{4}{15} = \frac{1}{9}$

ПРИМЕР 4. Ана ради домаћи задатак из математике. Пре подне је урадила трећину задатака, а поподне половину задатака. Који део задатака још треба да уради?

РЕШЕЊЕ

$x + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$

$x + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1$

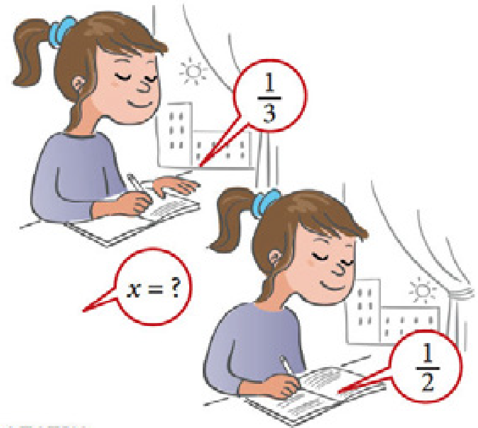
$x + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1$

$x + \frac{5}{6} = 1$

$x = 1 - \frac{5}{6}$

$x = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Провера: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$



Ани је преостало да уради још шестину домаћег задатка.

ПРИМЕР 5. Којем броју треба додати $\frac{1}{4}$ да би се добио број 0,75?

РЕШЕЊЕ Добијамо једначину $x + \frac{1}{4} = 0{,}75$. Када се у неком изразу, као у овом примеру, појаве различити облици записивања разломака, потребно је те облике ускладити.

Једначину можемо решавати на два начина:

1. начин

Искористимо чињеницу да је $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

$x + 0{,}25 = 0{,}75$

$x = 0{,}75 - 0{,}25$

$x = 0{,}5$

2. начин

Преведемо број 0,75 у прави разломак.

$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

У сваком примеру треба установити да ли је погодније радити са разломцима у децималном запису или у облику $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$.

ПРИМЕР 6. Који број треба одузети од броја 0,4 да би се добио број $\frac{1}{7}$?

РЕШЕЊЕ У решавању овог примера нећемо се определити за децимални запис, јер је децимални запис разломка $\frac{1}{7}$ бесконачан. Такође, претворићемо 0,4 у разломак $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$\frac{2}{5} - x = \frac{1}{7}$

$x = \frac{2}{5} - \frac{1}{7}$

$x = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5}$

$x = \frac{14}{35} - \frac{5}{35} = \frac{9}{35}$

Тражени број је $\frac{9}{35}$.

Провера: $\frac{2}{5} - \frac{9}{35} = \frac{14}{35} - \frac{9}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

Реши **тест број 39** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

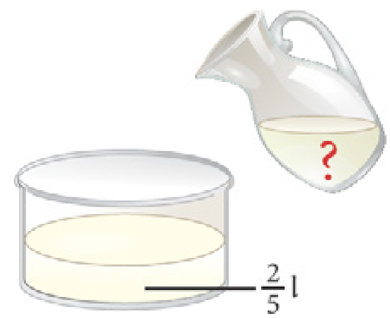
26. Реши једначине:

а) $0{,}7 + x = 1{,}2$; б) $3{,}4 - x = 2{,}5 + 0{,}32$; в) $x - 3{,}14 = 1{,}732$.

27. Реши једначине: а) $x + \frac{2}{3} = \frac{4}{5} - \frac{1}{15}$; б) $x - \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$.

28. Реши једначине: а) $1{,}8 + x = 2\frac{2}{5}$; б) $1{,}3 - x = \frac{2}{7}$.

29. Када је у посуду, у којој се налази $\frac{2}{5}$ l млека, долила извесну количину млека, бака је испунила суд од 1 l до половине. Колико је млека бака долила у суд?



30. Којем броју треба додати 0,17 да би се добила разлика бројева 124,13 и 5,9?

31. Разломку $\frac{3}{5}$ додај један број да би се добио збир $13{,}7 + \frac{1}{2}$. Који си број додао/-ла?

32. Да ли је решење дате једначине природан број?

а) $3{,}5 + x = \frac{121}{2}$; б) $7{,}3 - x + 1{,}6 = 0{,}09$;

в) $x - \frac{115}{4} = \frac{21}{4}$; г) $x + 12{,}3 = \frac{151}{3}$.

33. Провери да ли је број $\frac{11}{3}$ решење једначине $x + x + 5 + x - 4 = 5$.

34. Реши једначину $\frac{4}{5} - x + \frac{5}{4} = \frac{1}{20}$.

35. Камион треба да превезе 14 тона материјала. У првој вожњи превезао је 3,2 t, а у другој 2,9 t. Колико још тона материјала камион треба да превезе?

6.5. Неједначине са сабирањем и одузимањем разломака

Подсетимо се како се неке једноставније неједначине решавају у скупу N_0.

ПРИМЕР 1. Реши неједначину: а) $x + 3 > 5$; б) $x - 17 \leq 35$.

РЕШЕЊЕ

а) $x + 3 > 5$
$x > 5 - 3$
$x > 2$
Решење су сви бројеви из скупа $\{3,4,5,6, ...\}$.

б) $x - 17 \leq 35$
$x < 35 + 17$
$x \leq 52$
Решење су сви бројеви из скупа $\{17, 18, 19, ... ,51, 52\}$.

Ова основна својства за решавање неједначина важе и за неједначине са разломцима.

ПРИМЕР 2. Реши неједначину:

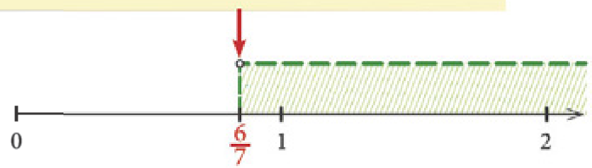
а) $x + \frac{6}{7} > \frac{12}{7}$; б) $x - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{6}$; в) $\frac{4}{5} + x \leq \frac{11}{3}$; г) $x - 1{,}8 < 13{,}5$.

РЕШЕЊЕ

а) $x + \frac{6}{7} > \frac{12}{7}$
$x > \frac{12}{7} - \frac{6}{7}$
$x > \frac{6}{7}$

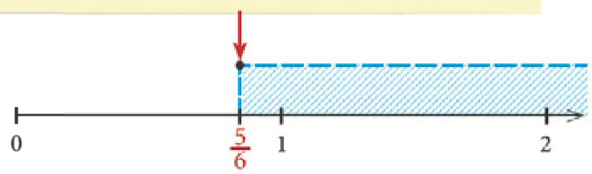
Кружић ∘ на слици означава да број $\frac{6}{7}$ не припада скупу решења.

Скуп решења може се приказати на бројевној полуправој.



б) $x - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{6}$
$x \geq \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$
$x \geq \frac{1}{6} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$
$x \geq \frac{1}{6} + \frac{4}{6}$
$x \geq \frac{5}{6}$

Пуним кружићем • означавамо да одређени број припада скупу решења.

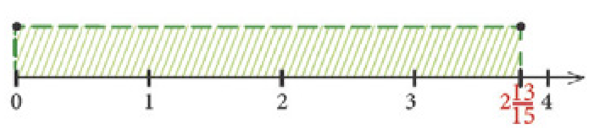


Скуп решења приказан је на бројевној полуправој.

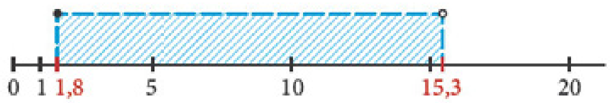
в) $\frac{4}{5} + x \leq \frac{11}{3}$
$x \leq \frac{11}{3} - \frac{4}{5}$
$x \leq \frac{11 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3}$
$x \leq \frac{55 - 12}{15}$
$\underbrace{x \leq \frac{43}{15} = 2\frac{13}{15}, \boxed{x \geq 0}}$

Решења неједначине су бројеви из скупа N, па важи и да је $x \geq 0$.

Из ова два услова скуп решења је $0 \leq x \leq 2\frac{13}{15}$.



г) $x - 1{,}8 < 13{,}5$



$x < 13{,}5 + 1{,}8$

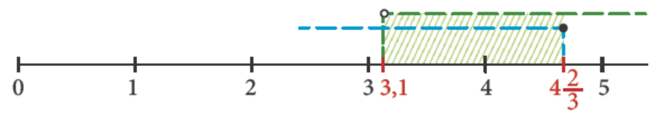
$\left.\begin{array}{l} x < 15{,}3 \\ \boxed{x \geq 1{,}8} \end{array}\right\}$ Из ова два услова скуп решења неједначине је $1{,}8 \leq x \leq 15{,}3$.

Умањеник не сме бити мањи од умањиоца. Овај услов утиче на одређивање скупа решења.

ПРИМЕР 3. На бројевној полуправој прикажи скуп решења неједначине $3{,}1 < x \leq 4\frac{2}{3}$.

РЕШЕЊЕ

На слици су приказани скупови разломака који задовољавају неједначине $x > 3{,}1$ и $x \leq 4\frac{2}{3}$. Пресек ових скупова је скуп решења дате неједначине.



Подсетимо се да када је у неједначини непознат умањилац, знак неједнакости се мења.

ПРИМЕР 4. На бројевној полуправој прикажи скуп решења неједначине:

а) $6\frac{3}{4} - x < 5\frac{1}{3}$; б) $5 - x > 3\frac{3}{5}$; в) $4\frac{1}{2} - x > 0{,}75$; г) $12\frac{5}{8} - x \geq 2\frac{2}{3}$; д) $4\frac{1}{2} - x \geq 2\frac{4}{5}$.

РЕШЕЊЕ

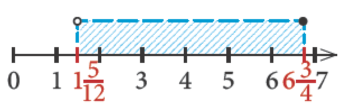
а) $6\frac{3}{4} - x < 5\frac{1}{3}$

$x > 6\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - 5\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4}$

$x > 6\frac{9}{12} - 5\frac{4}{12}$

$\left.\begin{array}{l} x > 1\frac{5}{12} \\ \boxed{x \leq 6\frac{3}{4}} \end{array}\right\}$ Из ова два услова скуп решења је $1\frac{5}{12} < x \leq 6\frac{3}{4}$.

Умањилац не сме бити већи од умањеника. Овај услов утиче на одређивање скупа решења.

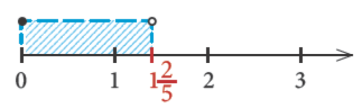


б) $5 - x > 3\frac{3}{5}$;

$x < 5 - 3\frac{3}{5}$

$x < 4\frac{5}{5} - 3\frac{3}{5}$

$\left.\begin{array}{l} x < 1\frac{2}{5} \\ x \leq 5 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Скуп решења је $0 \leq x < 1\frac{2}{5}$.



в) $4\frac{1}{2} - x > 0{,}75$

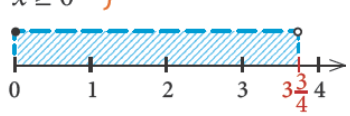
$4\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} - x > 0{,}75$

$4\frac{5}{10} - x > 0{,}75$

$x < 4{,}5 - 0{,}75$

$x < 3{,}75 = 3\frac{75}{100} = 3\frac{75:25}{100:25}$

$\left.\begin{array}{l} x < 3\frac{3}{4} \\ x \leq 4\frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Скуп решења је $0 \leq x < 3\frac{3}{4}$.



г) $12\frac{5}{8} - x \geq 2\frac{2}{3}$;

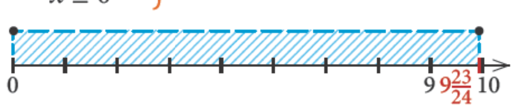
$x \leq 12\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} - 2\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8}$

$x \leq 12\frac{15}{24} - 2\frac{16}{24}$

$x \leq 11\left(\frac{24}{24} + \frac{15}{24}\right) - 2\frac{16}{24}$

$x \leq 11\frac{39}{24} - 2\frac{16}{24}$

$\left.\begin{array}{l} x \leq 9\frac{23}{24} \\ x \leq 12\frac{5}{8} \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Скуп решења је $0 \leq x \leq 9\frac{23}{24}$.



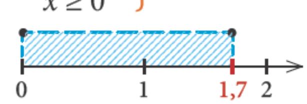
д) $4\frac{1}{2} - x \geq 2\frac{4}{5}$

$x \leq 4\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} - 2\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2}$

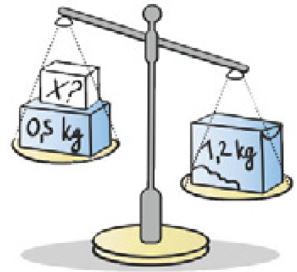
$x \leq 4\frac{5}{10} - 2\frac{8}{10}$

$x \leq 4{,}5 - 2{,}8$

$\left.\begin{array}{l} x \leq 1{,}7 \\ x \leq 4\frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Скуп решења је $0 \leq x \leq 1{,}7$.



ПРИМЕР 1. На једном тасу теразија налази се паковање соли од 1,2 kg, а на другом паковање од 0,5 kg соли. Када је Соња додала још једно паковање на тас са 0,5 kg, још увек је на другом тасу било више соли. Колика је маса соли коју је Соња додала?



РЕШЕЊЕ $0,5 + x < 1,2$

$x < 0,7$

Маса соли коју је Соња додала је мања од 0,7 kg.

Реши задатке 2, 3, 4, 5 и 6 у **тесту број 41** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

36. Реши неједначине:

а) $x - 1,2 \leq 3,9$; б) $x + 13,7 > 15,49$; в) $17,25 + x \leq 52$;

г) $\frac{3}{4} + x \geq \frac{11}{2}$; д) $x - \frac{5}{7} > \frac{3}{7}$; ђ) $x + \frac{2}{5} < 4$;

е) $x + 0,5 < \frac{6}{7}$; ж) $x - \frac{1}{2} < 0,12$; з) $3,2 > \frac{1}{4} + x$.

37. Прикажи на бројевној полуправој скупове решења неједначина:

а) $2,1 \leq x < 3,6$; б) $\frac{1}{4} < x < 2,05$; в) $1,7 < x \leq 2\frac{1}{3}$.

38. Који услов треба да задовољава број који треба додати броју 1,2 да би добијени збир био већи од 2,13?

39. Колику количину брашна бака може да извади из паковања од 2 kg да би јој остало више од $\frac{3}{4}$ kg?

40. Реши неједначине: а) $x + 2,3 - 1,7 < 4,5$; б) $17,2 + x - 5,9 \geq 11,3$; в) $3,7 + x < 2,1 + 5,6$.

41. Реши неједначине: а) $x + \frac{5}{7} - \frac{1}{2} \leq \frac{13}{14}$; б) $\frac{2}{3} + x - \frac{1}{6} \geq 1\frac{1}{2}$.

42. Реши неједначине: а) $x + 2,5 - \frac{1}{4} > 5\frac{3}{4}$; б) $5\frac{1}{6} + x - 2,5 \leq 7\frac{1}{3}$.

43. Цена једне чоколаде је изражена природним бројем у динарима. Укупна цена 9 чоколада је већа од 1 100, а мања од 1 200 динара, док је укупна цена 13 чоколада већа од 1 500, а мања од 1 600 динара. Колика је цена једне чоколаде?

44. Одреди решења неједначине: а) $5\frac{1}{4} - (2,75 - \frac{3}{4}) < x + 1,5$; б) $13,5 - (5\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}) \geq x - 2\frac{1}{6}$.

45.* Од ког броја треба одузети збир бројева $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ да би добијена разлика била мања од $\frac{25}{6}$?

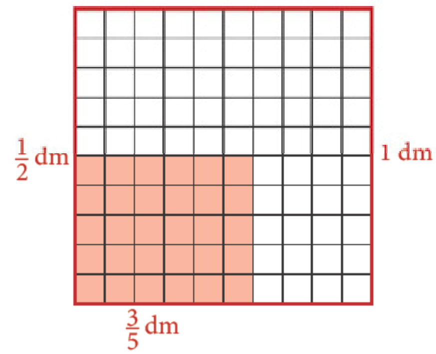
46.* Који број треба одузети од 4,5 да та разлика, одузета од $6\frac{1}{2}$, не буде већа од $3\frac{3}{4}$?

47.* Од ког броја треба одузети $2\frac{1}{2}$ да та разлика, одузета од 10,6, буде мања од $5\frac{3}{10}$?

48.* Који број треба сабрати са $1\frac{3}{4}$ да тај збир, одузет од броја 10, не буде већи од $5\frac{4}{9}$?

6.6. Множење разломака (запис $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$)

ПРИМЕР 1. Израчунајмо површину правоугаоника чије су странице $a = \frac{3}{5}$ dm и $b = \frac{1}{2}$ dm.



На слици је обојен дати правоугаоник.
Он садржи $6 \cdot 5 = 30$ квадрата странице 0,1 dm, па је његова површина једнака површини тих 30 квадрата:

$30 \cdot \frac{1}{10}\,\text{dm} \cdot \frac{1}{10}\,\text{dm} = \frac{30}{100}\,\text{dm}^2 = \frac{3}{10}\,\text{dm}^2.$

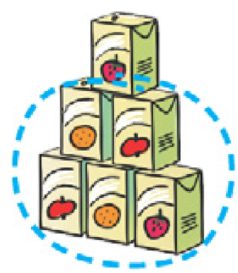
С друге стране, површина правоугаоника се израчунава по формули $P = ab$, па је:

$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}.$

Производ два разломка $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \in N)$ је разломак, чији је бројилац производ бројилаца, а именилац производ именилаца, тих разломака.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

ПРИМЕР 2. У једном паковању налази се $\frac{1}{5}$ l. Колика количина сока се налази у шест оваквих паковања?



РЕШЕЊЕ Саберимо шест сабирака $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ l.

И у овом примеру добијамо $6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$

Ако је $n \in N$ и $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$ разломак, тада је $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$.

ПРИМЕР 3. Израчунај: а) $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{11} \cdot 3$; в) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{17}$.

РЕШЕЊЕ

а) $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}$; б) $\frac{4}{11} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 1} = \frac{12}{11}$; в) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{17} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 17} = \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$.

У последњем примеру приликом множења разломака $\frac{5}{3}$ и $\frac{6}{17}$ добили смо резултат $\frac{30}{51}$, па смо након скраћивања бројиоца и имениоца са 3 добили $\frac{10}{17}$.
Једноставније би било да смо бројеве 3 и 6 скратили са 3 још пре множења:

$\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{17} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{17} = \frac{10}{17}.$

На тај начин приликом множења добијају се мањи бројеви и смањује опасност од грешке.

ПРИМЕР 4. Израчунај: а) $\frac{5}{36}\cdot\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{14}$; в) $\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{8}$; г) $\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{35}$.

РЕШЕЊЕ

а) Скратимо бројеве 5 и 25 са 5, а бројеве 24 и 36 са 12. Добићемо:

$$\frac{\cancel{5}^{:5}}{\cancel{36}_{:12}}\cdot\frac{\cancel{24}^{:12}}{\cancel{25}_{:5}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{2}{15}$$

б) Скратимо бројеве 8 и 4 са 4, бројеве 7 и 14 са 7 и бројеве 9 и 3 са 3. Добићемо:

$$\frac{\cancel{7}^{:7}}{\cancel{4}_{:4}}\cdot\frac{\cancel{8}^{:4}}{\cancel{9}_{:3}}\cdot\frac{\cancel{3}^{:3}}{\cancel{14}_{:7}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{3}.$$

в) Скратимо бројеве 2 и 8 са 2, а бројеве 15 и 3 са 3. Добићемо:

$$\frac{\cancel{2}^{:2}}{\cancel{15}_{:3}}\cdot\frac{\cancel{3}^{:3}}{\cancel{8}_{:2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 4}=\frac{1}{20}$$

г) Скратимо бројеве 15 и 35 са 5, а бројеве 16 и 24 са 8. Добићемо:

$$\frac{\cancel{15}^{:5}}{\cancel{16}_{:8}}\cdot\frac{\cancel{24}^{:8}}{\cancel{35}_{:5}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 7}=\frac{9}{14}$$

ПРИМЕР 5. На школском такмичењу у атлетици у трци на 400 m, после $\frac{3}{8}$ претрчане стазе Јелица је избила на чело и ту позицију је сачувала до краја трке. После колико метара је Јелица избила на прво место?

РЕШЕЊЕ Резултат добијамо множењем $\frac{3}{8}\cdot 400=\frac{3}{1}\cdot 50=150$.

Јелица је избила на прво место после 150 m.

ПРИМЕР 6. Колико износи: а) четвртина броја 168; б) $\frac{3}{4}$ броја 8; в) $\frac{2}{5}$ од 15; г) $1\frac{2}{3}$ од 120; д) $3\frac{5}{12}$ од 60?

РЕШЕЊЕ

а)
$$\begin{array}{l} 168 : 4 = 42 \\ \underline{-16} \\ \quad\ 8 \\ \quad\underline{-8} \\ \quad\ \ 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{4}\cdot 168=\frac{1}{\cancel{4}_{:4}}\cdot\frac{\cancel{168}^{:4}}{1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{42}{1}=42$$

Део ОД нечега:
за одређивање користи се операција множења.

$\frac{3}{4}$ од 8 → $\frac{3}{4}\cdot 8$

б) $\frac{3}{4}$ од $8=\frac{3}{4}\cdot 8=\frac{3}{\cancel{4}_{:4}}\cdot\frac{\cancel{8}^{:4}}{1}=\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{6}{1}=6$

в) $\frac{2}{5}$ од $15=\frac{2}{\cancel{5}_{:5}}\cdot\frac{\cancel{15}^{:5}}{1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}=\frac{6}{1}=6$

г) $1\frac{2}{3}$ од $120=1\frac{2}{3}\cdot 120=\frac{5}{\cancel{3}_{:3}}\cdot\frac{\cancel{120}^{:3}}{1}=\frac{5}{1}\cdot\frac{40}{1}=\frac{200}{1}=200$

д) $3\frac{5}{12}$ од $60=3\frac{5}{12}\cdot 60=\frac{41}{\cancel{12}_{:12}}\cdot\frac{\cancel{60}^{:12}}{1}=\frac{41}{1}\cdot\frac{5}{1}=\frac{205}{1}=205$

ПРИМЕР 7. Израчунај: а) $2\frac{1}{6}\cdot 6$; б) $\frac{5}{7}\cdot 1\frac{1}{13}$; в) $\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{12}$; г) $\frac{35}{22}\cdot\frac{33}{65}$; д) $3\frac{5}{12}\cdot 8$; ђ) $3\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{25}$; е) $1\frac{2}{25}\cdot\frac{35}{36}$; ж) $5\frac{1}{4}\cdot 2\frac{2}{15}$.

РЕШЕЊЕ

а) $2\frac{1}{6}\cdot 6=2\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{1}=\frac{13}{\cancel{6}_{:6}}\cdot\frac{\cancel{6}^{:6}}{1}=\frac{13}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{13}{1}=13$

б) $\frac{5}{7}\cdot 1\frac{1}{13}=\frac{5}{\cancel{7}_{:7}}\cdot\frac{\cancel{14}^{:7}}{13}=\frac{5}{1}\cdot\frac{2}{13}=\frac{10}{13}$

в) $\frac{\cancel{8}^{:4}}{\cancel{15}_{:5}}\cdot\frac{\cancel{5}^{:5}}{\cancel{12}_{:4}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

г) $\frac{\cancel{35}^{:5}}{\cancel{22}_{:11}}\cdot\frac{\cancel{33}^{:11}}{\cancel{65}_{:5}}=\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{13}=\frac{21}{26}$

д) $3\frac{5}{12}\cdot 8=\frac{41}{\cancel{12}_{:4}}\cdot\frac{\cancel{8}^{:4}}{1}=\frac{41}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{82}{3}=27\frac{1}{3}$

ђ) $3\frac{3}{4}\cdot\frac{\cancel{14}^{:2}}{\cancel{25}_{:5}}=\frac{\cancel{15}^{:5}}{\cancel{4}_{:2}}\cdot\frac{14}{25}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}$

е) $1\frac{2}{25} \cdot \frac{35}{36} = \frac{\cancel{27}^{:9}}{\cancel{25}_{:5}} \cdot \frac{\cancel{35}^{:5}}{\cancel{36}_{:9}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$

ж) $5\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{15} = \frac{\cancel{21}^{:3}}{\cancel{4}_{:4}} \cdot \frac{\cancel{32}^{:4}}{\cancel{15}_{:3}} = \frac{7}{1} \cdot \frac{8}{5} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5}$

Реши задатке 1, 2, 3, 4 и 6 у **тесту број 55** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

49. Помножи разломке природним бројем:

а) $4 \cdot \frac{1}{7}$; б) $6 \cdot \frac{2}{5}$; в) $3 \cdot \frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{40} \cdot 1\,000$.

50. Помножи бројеве:

а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{7} \cdot \frac{13}{2}$; в) $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{9}$; г) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{17}$;

д) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7}$; ђ) $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{25}$; е) $\frac{3}{11} \cdot \frac{22}{27}$.

51. Израчунај вредност израза:

а) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{3}{7}$; б) $\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{16} \cdot \frac{18}{5}$.

52. Колико износи $\frac{1}{4}$ од 25?

53. У једној продавници налазе се две врсте кафе и то укупно 200 kg. Три петине те количине је јефтинија кафа. Колика количина скупље кафе се налази у тој продавници?

54. Израчунај површину правоугаоника чије су странице дужине $3\frac{1}{3}$ cm и $5\frac{2}{5}$ cm.

55. Израчунај вредност производа:

а) $5\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{19}$; б) $1\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8}$; в) $2\frac{3}{5} \cdot 1\frac{5}{13}$.

56. У једној школи је одлучено да се бетонира део дворишта облика правоугаоника дужине $7\frac{1}{2}$ m, а ширине $8\frac{3}{4}$ m. Са свим припремама, цена бетонирања је 4 000 динара по квадратном метру. Колико ће школа платити за ове радове?

57. Јована је купила паковање од $\frac{7}{10}$ l сока и попила $\frac{2}{5}$ садржаја. Колико је сока остало?

58.* Бранко има 6 месеци и млађи је $4\frac{2}{3}$ пута од своје сестре Нине. Колико Нина има година?

6.7. Множење разломака (децимални запис)

Множење разломака у децималном запису декадном јединицом

Децималне бројеве можемо помножити декадном јединицом на исти начин као са неким природним бројем – претварањем децималног броја у разломак.

$2{,}4 \cdot 10 = \frac{24}{10} \cdot 10 = 24$

$31{,}56 \cdot 10 = \frac{3156}{100} \cdot 10 = \frac{3156}{10} = 315{,}6$

$2{,}4 \cdot 10 = 24, = 24$

$31{,}56 \cdot 10 = 315{,}6$

Разломак записан у децималном запису множи се декадном јединицом тако што му се децимална запета помери за онолико места удесно колико та декадна јединица има нула.

$3{,}7 \cdot 100 = 3{,}70 \cdot 100 = 370$ $\quad 2{,}187 \cdot 1\,000 = 2187$ $\quad 0{,}0034 \cdot 1\,000 = 3{,}4$

$0{,}1 \cdot 1\,000 = 0{,}100 \cdot 1\,000 = 100$ $\quad 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$ $\quad 1{,}001 \cdot 100 = 100{,}1$

У следећим примерима проверити да ли је множење извршено правилно.

$0{,}101 \cdot 10\,000 = 0{,}1010 \cdot 10\,000 = 1\,010$

$0{,}017 \cdot 100\,000 = 0{,}01700 \cdot 100\,000 = 1700$

$0{,}0025 \cdot 100 = 0{,}25$

$10{,}1 \cdot 100 = 10{,}10 \cdot 100 = 1\,010$

$0{,}67 \cdot 10\,000 = 0{,}6700 \cdot 10\,000 = 6\,700$

$0{,}017 \cdot 100 = 1{,}7$

ПРИМЕР 1. Израчунај вредност следећих израза: а) $2{,}53 \cdot 10 + 0{,}47 \cdot 100$; б) $100 \cdot 0{,}765 + 1\,000 \cdot 3{,}14$; в) $0{,}023 \cdot 10\,000 - 0{,}015 \cdot 100$.

РЕШЕЊЕ

а) $2{,}53 \cdot 10 + 0{,}47 \cdot 100 = 25{,}3 + 47 = 72{,}3$

б) $100 \cdot 0{,}765 + 1\,000 \cdot 3{,}14 = 76{,}5 + 1\,000 \cdot 3{,}14 = 76{,}5 + 3\,140 = 3\,216{,}5$

в) $0{,}023 \cdot 10\,000 - 0{,}015 \cdot 100 = 0{,}0230 \cdot 10\,000 - 1{,}5 = 230 - 1{,}5 = 228{,}5$

ПРИМЕР 2. Израчунај вредност производа, тако што ћеш оба чиниоца написати у облику разломка $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$: а) 1,2 и 2,4; б) 0,3 и 1,41.

РЕШЕЊЕ

а) $1{,}2 \cdot 2{,}4 = \frac{12}{10} \cdot \frac{24}{10} = \frac{12 \cdot 24}{10 \cdot 10} = \frac{288}{100} = 2{,}88$ $\quad$ б) $0{,}3 \cdot 1{,}41 = \frac{3}{10} \cdot \frac{141}{100} = \frac{3 \cdot 141}{10 \cdot 100} = \frac{423}{1\,000} = 0{,}423$

Два разломка записана у децималном запису множе се као одговарајући природни бројеви (без децималног записа), а у производу се издваја онолико децимала колико их укупно имају оба чиниоца.

ПРИМЕР 3. Израчунај вредност производа: а) $1{,}3 \cdot 2{,}7$; б) $2{,}25 \cdot 1{,}4$; в) $2{,}14 \cdot 30$.

РЕШЕЊЕ а) Помножимо прво бројеве 13 и 27.

У добијеном производу треба издвојити две децимале, па је $1{,}3 \cdot 2{,}7 = 3{,}51$.

$$\begin{array}{r} 13 \cdot 27 \\ 91 \\ +\;26 \\ \hline 351 \end{array}$$

б) Најпре израчунајмо $225 \cdot 14$, а затим у добијеном производу 3 150 издвојмо три децимале и добијамо:
$2{,}25 \cdot 1{,}4 = 3{,}150 = 3{,}15$

$$\begin{array}{r} 225 \cdot 14 \\ 900 \\ +\;225 \\ \hline 3150 \end{array}$$

в) Како је $214 \cdot 30 = 6\,420$, то је $2{,}14 \cdot 30 = 64{,}20 = 64{,}2$.

Када је један чинилац облика $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$, а други разломак у децималном запису, онда у зависности од облика тих чинилаца претварамо оба у исти облик.

ПРИМЕР 4. Израчунај производе: а) $0{,}5 \cdot \frac{1}{3}$; б) $\frac{17}{100} \cdot 0{,}3$.

РЕШЕЊЕ а) $0{,}5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$; б) $\frac{17}{100} \cdot 0{,}3 = 0{,}17 \cdot 0{,}3 = 0{,}051$.

Множење децималних бројева

$$\begin{array}{r} 25{,}4 \cdot 1{,}6 = 1\,524 \\ +254 \\ \hline 40{,}64 \end{array} \qquad 3{,}8 \cdot 7 = 26{,}6$$

Два разломка дата у децималном запису множимо тако што најпре помножимо одговарајуће природне бројеве изостављањем децималних запета, па у производу одредимо место запете, тако да је број децимала производа једнак збиру бројева децимала чинилаца.

ПРИМЕР 5. Помножи следеће децималне бројеве природном или децималним бројем.

а) $4 \cdot 0{,}001$; б) $2{,}19 \cdot 30$; в) $8{,}46 \cdot 200$; г) $2{,}1 \cdot 3\,000$;
д) $0{,}32 \cdot 0{,}6$; ђ) $0{,}08 \cdot 3{,}15$; е) $5{,}5 \cdot 3{,}3$.

РЕШЕЊЕ а) $4 \cdot 0{,}001 = 0{,}004$ б) $2{,}19 \cdot 30 = 65{,}70 = 65{,}7$

в) $8{,}46 \cdot 200 = 1\,692{,}00 = 1\,692$ г) $2{,}1 \cdot 3\,000 = 6\,300{,}0 = 6\,300$

д) $$\begin{array}{r} 0{,}32 \cdot 0{,}6 = 192 \\ 000 \\ \hline 0192 = 0{,}192 \end{array}$$

ђ) $$\begin{array}{r} 0{,}08 \cdot 3{,}15 = 040 \\ 008 \\ 024 \\ \hline 02520 = 0{,}252 \end{array}$$

е) $$\begin{array}{r} 5{,}5 \cdot 3{,}3 = 165 \\ 165 \\ \hline 1815 = 18{,}15 \end{array}$$

Реши **тест број 50** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

59. Израчунај:

а) $2{,}6 \cdot 1{,}1$; б) $3{,}05 \cdot 1{,}2$; в) $17{,}1 \cdot 0{,}0003$; г) $5{,}2 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}07$; д) $0{,}01 \cdot 0{,}01 \cdot 203$.

60. Страница квадрата је $a = 2{,}4$ cm. Колика је површина тог квадрата?

61. Израчунај: а) $9{,}21 \cdot \frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{5} \cdot 3{,}475$.

62. Један литар неке течности се продаје за 320 динара. Колико кошта $\frac{3}{4}$ литра те течности?

63. Илија је на пијаци купио 1,2 kg јабука, по цени од 80 динара за килограм и 0,55 kg крушака по цени од 220 динара по килограму. Колико је Илија платио за купљено воће?

64. Да ли је већа површина правоугаоника чије су странице 2,25 cm и $\frac{2}{3}$ cm или квадрата странице $1\frac{1}{5}$ cm?

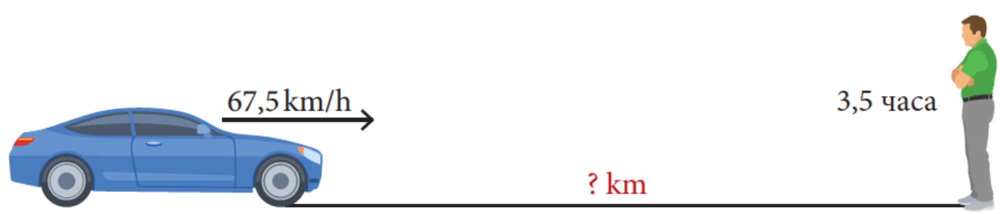
65. Познато је да је $817 \cdot 96 = 78\,432$. Израчунај:

а) $0{,}817 \cdot 0{,}096$; б) $0{,}0817 \cdot 9{,}6$; в) $8{,}17 \cdot 0{,}96$.

66. Израчунај: а) $2{,}5 \cdot 4$; б) $0{,}32 \cdot \frac{1}{16}$; в) $0{,}23 \cdot 0{,}07$; г) $\frac{2}{5} \cdot 8{,}05$.

67. Који број је 3,6 пута већи од 5,05 ?

68. Вук је возио свој аутомобил брзином од 67,5 km/h. Код свог ујака у село стигао је после 3,5 часова. Колико километара је прешао?



6.8. Реципрочан број
Дељење разломака (запис $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$)

Каже се да је број y **реципрочан** броју x ($x \neq 0$), ако је производ $x \cdot y = 1$.

Тако је, на пример, број $\frac{1}{3}$ реципрочан броју 3, јер је $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 3} = 1$.

Природном броју n реципрочан је разломак $\frac{1}{n}$ јер је

$$n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Број $\frac{8}{7}$ је реципрочан броју $\frac{7}{8}$, јер је $\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7} = 1$.

Разломку $\frac{a}{b}$ ($a, b \in N$) реципрочан је разломак $\frac{b}{a}$ јер је

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

Приметимо да се може рећи да су бројеви a и b међу собом реципрочни, јер ако је број b реципрочан броју a, тада је $a \cdot b = 1$. Али, тада је и $b \cdot a = 1$, па је и број a реципрочан броју b.

ПРИМЕР 1. Одреди реципрочне бројеве бројевима: а) $\frac{2}{11}$; б) $3\frac{1}{2}$; в) 2,5.

РЕШЕЊЕ а) Броју $\frac{2}{11}$ реципрочан је $\frac{11}{2}$, јер је $\frac{2}{11} \cdot \frac{11}{2} = 1$.

б) Број $3\frac{1}{2}$ напишемо у облику неправог разломка, $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Његов реципрочан број је $\frac{2}{7}$.

в) Како је $2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$, број реципрочан броју 2,5 је $\frac{2}{5}$.

ПРИМЕР 2. Подели разломак $\frac{2}{3}$ разломком $\frac{4}{5}$, тј. одреди разломак $\frac{a}{b}$ ($a, b \in N$), такав да је $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{a}{b}$.

Ово значи да је $\frac{a}{b} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

Пошто је $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{a}{b} \cdot \frac{4}{5}$, онда је $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

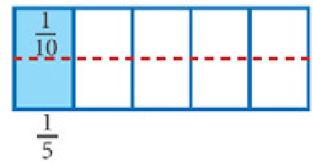
Закључујемо да смо количник разломака $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ нашли тако што смо дељеник $\frac{2}{3}$ помножили реципрочном вредношћу делиоца, тј. бројем $\frac{5}{4}$, одакле је

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$.

Ово правило за дељење важи за произвољна два разломка.

Два разломка се могу **поделити**, тако што се дељеник помножи реципрочном вредношћу делиоца. Нека су a, b, c, d природни бројеви. Тада је: $\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$.

ПРИМЕР 3. Подели разломак $\frac{1}{5}$ природним бројем 2.



РЕШЕЊЕ $\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{5} : \frac{2}{1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Поделити број a бројем b исто је што и помножити број a реципрочном вредношћу броја b.

ПРИМЕР 4. Подели разломак $\frac{10}{21}$ разломком $\frac{5}{7}$.

РЕШЕЊЕ 1. начин: Пошто је бројилац првог разломка дељив бројиоцем другог разломка 5|10, и именилац првог разломка је дељив имениоцем другог разломка 7|21, разломке можемо поделити без претварања у множење:

$$\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{10:5}{21:7} = \frac{2}{3}$$

2. начин: Претварањем дељења разломком $\frac{5}{7}$ у множење његовом реципрочном вредношћу $\frac{7}{5}$ добија се исти резултат:

$$\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5} = \frac{70}{105} = \frac{2}{3}$$

ПРИМЕР 5. Подели разломке:

а) $\frac{3}{11} : \frac{5}{2}$; б) $\frac{7}{6} : \frac{3}{2}$; в) $\frac{2}{5} : 7$;

г) $\frac{21}{40} : \frac{7}{13}$; д) $\frac{6}{35} : \frac{3}{7}$; ђ) $5 : \frac{3}{4}$.

РЕШЕЊЕ

а) $\frac{3}{11} : \frac{5}{2} = \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{55}$

б) $\frac{7}{6} : \frac{3}{2} = \frac{7}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$

в) $\frac{2}{5} : 7 = \frac{2}{5} : \frac{7}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$

г) $\frac{21}{40} : \frac{7}{13} = \frac{21}{40} \cdot \frac{13}{7} = \frac{39}{40}$

д) $\frac{6}{35} : \frac{3}{7} = \frac{6}{35} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5}$

ђ) $5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

ПРИМЕР 6. $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10} = 2\frac{1}{10}$ јер је $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$

Разломак чији су и бројилац и именилац такође разломци, назива се **двојни разломак**. Решавамо га тако што је производ спољашњих чланова бројилац новог разломка, а производ унутрашњих чланова његов именилац.

ПРИМЕР 7.

а) $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{17}} = \frac{1 \cdot 17}{3 \cdot 4} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

б) $\dfrac{\frac{11}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{11 \cdot \cancel{10}^{:5}}{\cancel{15}_{:5} \cdot 3} = \frac{11 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$

в) $\dfrac{\frac{63}{77}}{\frac{72}{21}} = \frac{\cancel{63}^{:9} \cdot \cancel{21}^{:7}}{\cancel{77}_{:7} \cdot \cancel{72}_{:9}} = \frac{7 \cdot 3}{11 \cdot 8} = \frac{21}{88}$

г) $\dfrac{5}{\frac{30}{13}} = \dfrac{\frac{5}{1}}{\frac{30}{13}} = \frac{\cancel{5}^{:5} \cdot 13}{1 \cdot \cancel{30}_{:5}} = \frac{1 \cdot 13}{1 \cdot 6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$

ПРИМЕР 8. Страница једног квадрата је $1\frac{1}{5}$ cm. Правоугаоник који има исту површину као поменути квадрат, има једну страницу дужине $1\frac{4}{5}$ cm. Колика је друга страница тог правоугаоника?

РЕШЕЊЕ $1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{25}$ Површина квадрата износи $\frac{36}{25}$ cm².

$\frac{36}{25} : 1\frac{4}{5} = \frac{36}{25} : \frac{9}{5} = \frac{36}{25} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}$

Друга страница правоугаоника износи $\frac{4}{5}$ cm.

ПРИМЕР 9. Да ли је већи количник или производ бројева $\frac{7}{8}$ и $\frac{3}{4}$?

РЕШЕЊЕ Количник ових бројева је $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{6}$.

Производ је мањи од количника, јер је $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{32}$.

Видимо да је количник датих бројева већи од 1, а њен производ мањи од 1.

Реши задатке 1, 2, 3, 5 и 6 у **тесту број 58** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

69. Израчунај: а) $5 : \frac{2}{5}$; б) $\frac{4}{3} : 12$; в) $24 : \frac{8}{11}$; г) $\frac{5}{2} : \frac{13}{17}$;
д) $\frac{11}{19} : \frac{6}{5}$; ђ) $\frac{24}{7} : \frac{12}{15}$; е) $\frac{13}{17} : \frac{26}{5}$; ж) $\frac{72}{28} : 3\frac{6}{7}$.

70. Израчунај збир, разлику, производ и количник разломака $\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{7}$.

71. Да ли је количник разломака $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{7}$ већи или мањи од њиховог збира?

72. Маша је 2,75 kg поморанџи платила 275 динара. Колико је коштао килограм поморанџи?

73. Једна страница правоугаоника је $3\frac{1}{3}$ cm, а његова површина је $14\frac{2}{7}$ cm². Колика је дужина друге странице овог правоугаоника?

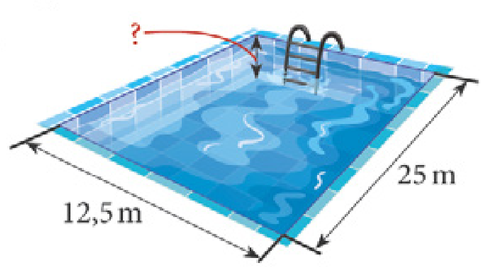
74. Одреди бројеве реципрочне бројевима: а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{15}{12}$; г) 0,05.

75. Израчунај: а) $\frac{53}{8} : 3\frac{1}{4}$; б) $\frac{12}{7} : 2\frac{1}{3}$; в) $2\frac{1}{3} : \frac{1}{9}$; г) $\frac{41}{13} : \frac{41}{5}$.

76. Разлику бројева $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$ подели њиховим збиром.

77. Да ли је производ бројева $\frac{31}{7}$ и $\frac{5}{11}$ већи или мањи од њиховог количника.

78.* Колика је дубина базена, ако је његова дужина 25 m, ширина 12,5 m, а у њега када је пун стане 562 500 литара воде?



6.9. Дељење разломака (децимални запис)

Дељење разломака у децималном запису декадном јединицом

Децималне бројеве можемо поделити декадном јединицом на исти начин као и неким природним бројем. Најпре претворимо децимални број у разломак, а дељење претворимо у множење реципрочном вредношћу декадне јединице.

$$253{,}4 : 10 = \frac{2534}{10} : 10 = \frac{2534}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2534}{10 \cdot 10} = \frac{2534}{100} = 25{,}34$$

$$29{,}37 : 100 = \frac{2937}{100} : 100 = \frac{2937}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{2937}{100 \cdot 100} = \frac{2937}{10\,000} = 0{,}2937$$

$253{,}4 : 10 = 25{,}34$

$29{,}37 : 100 = 0{,}2937$

Разломак записан у децималном запису дели се декадном јединицом тако што му се децимална запета помери за онолико места улево колико та декадна јединица има нула.

Дописујемо нулу да би се запета померила улево за онолико места колико декадна јединица има нула.

$58{,}42 : 10 = 5{,}842$

$058{,}42 : 100 = 0{,}5842$

$245{,}6 : 100 = 2{,}456$

$30{,}48 : 10 = 3{,}048$

$2861 : 1\,000 = 2{,}861$

$032{,}5 : 100 = 0{,}325$

$03{,}8 : 100 = 003{,}8 : 100 = 0{,}038$

$21{,}4 : 1\,000 = 0021{,}4 : 1\,000 = 0{,}0214$

$34{,}72 : 10\,000 = 00034{,}72 : 10\,000 = 0{,}003472$

$7 : 10 = 07 : 10 = 0{,}7$

$300 : 1\,000 = 0300 : 1\,000 = 0{,}300 = 0{,}3$

$3 : 1\,000 = 0003 : 1\,000 = 0{,}003$

$10{,}1 : 1\,000 = 0010{,}1 : 1\,000 = 0{,}0101$

$3{,}102 : 100 = 003{,}102 : 100 = 0{,}03102$

ПРИМЕР 1. Поделити децималне бројеве декадним јединицама и израчунати вредност израза:

а) $9 : 10 - 1{,}2 : 100$; б) $3{,}4 : 100 + 0{,}2 : 10$.

РЕШЕЊЕ а) $9 : 10 - 1{,}2 : 100 = 0{,}9 - 001{,}2 : 100 = 0{,}9 - 0{,}012 = 0{,}888$

б) $3{,}4 : 100 + 0{,}2 : 10 = 003{,}4 : 100 + 00{,}2 : 10 = 0{,}034 + 0{,}02 = 0{,}054$

Дељење децималних бројева

ПРИМЕР 2. Израчунајмо количник бројева 2,31 и 0,7.

РЕШЕЊЕ

1. Начин: Претворићемо ове бројеве из децималног записа у облик $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$.
Имамо да је $2{,}31 = \frac{231}{100}$ и $0{,}7 = \frac{7}{10}$, па је $2{,}31 : 0{,}7 = \frac{231}{100} : \frac{7}{10} = \frac{231}{100} \cdot \frac{10}{7} = \frac{33}{10} \cdot \frac{1}{1} = 3{,}3$.

2. Начин: До истог резултата смо могли да дођемо и једноставније. Поделићемо дате бројеве као да су природни, водећи рачуна о децималном запису.
Количник 2,31 : 0,7 се не мења ако проширимо дељеник и делилац истим бројем.
У овом случају проширићемо их са 10 да би делилац био цео број.

$$2{,}31^{\cdot 10} : 0{,}7^{\cdot 10} =$$

$$\begin{array}{l} 23{,}1 : 7 = 3{,}3 \\ \underline{-21} \\ \quad 2{,}1 \\ \underline{\ -2{,}1} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Када при дељењу дођемо до децималне запете у дељенику, уписујемо децималну запету и код количника.

> Дељење два децимална броја се своди на дељење децималног броја природним бројем, множењем и дељеника и делиоца одговарајућом декадном јединицом која има онолико нула колико делилац има децимала.

ПРИМЕР 3. Израчунај: а) 4,17 : 3; б) 542,08 : 7; в) 4,93 : 1,7; г) 534 : 0,06.

РЕШЕЊЕ

а)
$$\begin{array}{l} 4{,}17 : 3 = 1{,}39 \\ \underline{-3} \\ \ 11 \\ \underline{-\ 9} \\ \quad 27 \\ \underline{\ -27} \\ \qquad 0 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{l} 542{,}08 : 7 = 77{,}44 \\ \underline{-49} \\ \quad 52 \\ \underline{\ -49} \\ \qquad 30 \\ \underline{\quad -28} \\ \qquad\ 28 \\ \underline{\quad\ -28} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

в) 4,93 : 1,7 = 49,3 : 17 = 2,9

г) 534 : 0,06 = 534 000 : 6 = 8 900.

ПРИМЕР 4. Израчунај 0,17 : 0,003 и заокругли вредност количника на две децимале.

РЕШЕЊЕ

Проширимо дељеник и делилац са 1 000. Добијамо 0,17 : 0,003 = 170 : 3 = 56,666. У овом примеру добијамо количник са бесконачно много децимала, али по правилу заокругљивањем тај резултат се може заокруглити на 56,67.

ПРИМЕР 5. Израчунај вредност количника бројева $\frac{3}{4}$ и 0,2.

РЕШЕЊЕ

1. Начин: $\frac{3}{4} : 0{,}2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

2. Начин: $\frac{3}{4} : 0{,}2 = 0{,}75 : 0{,}2 = 7{,}5 : 2 = 3{,}75$.

Реши тест број 53 на електронској платформи еЗбирка: http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

79. Израчунај:

а) 2,03 : 7; б) 58,3 : 11; в) 8,04 : 0,6; г) 6,65 : 1,9; д) 0,356 : 0,002;
ђ) 1,2312 : 0,08.

80. Израчунај производ и количник бројева 2,461 и 2,3.

81. Производ бројева 34 и 0,17 подели њиховим количником.

82. Количник бројева 3,98 и 1,8 заокругли на три децимале.

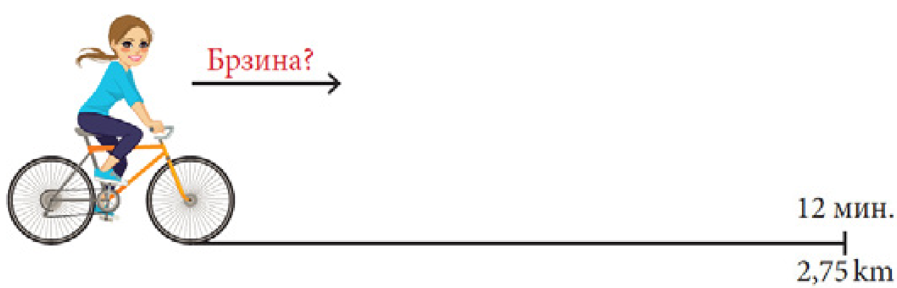
83. Познато је да је 1 921 : 17 = 113. Израчунај:

а) 19,21 : 17; б) 192,1 : 1,7; в) 1,921 : 0,17; г) 1 921 : 0,017.

84. Збир бројева 3,18 и 1,68 подели њиховом разликом.

85. Вредност количника бројева $1\frac{1}{4}$ и 0,4 израчунај на два начина.

86. Возећи бицикл, Даница је 2,75 km прешла за 12 минута. Којом брзином је возила (у километрима на час)?



87. Израчунај дужину странице квадрата чији је обим:

а) 10 cm ; б) 7 cm ; в) 20,8 cm.

88.* Душан је најпре броју 7,2 додао 3,6, а затим је број 7,2 помножио са 3. Колико пута је добијени производ већи од добијеног збира?

6.10. Основна својства множења и дељења разломака Бројевни изрази

Подсетимо се да смо се сретали са бројевним изразима у којима учествују разломци. Бројевни изрази су изрази који садрже бројеве, операције са њима и заграде. Операције множења и дељења имају приоритет над операцијма сабирања и одузимања. Повезивањем једноставнијих бројевних израза рачунским операцијама добијамо сложеније бројевне изразе. Они по потреби садрже заграде, које одређују приоритет извршавања рачунских операција. Операције у заградама имају предност над операцијама ван њих. Када се изврше све операције у бројевном изразу, добија се број који називамо вредношћу бројевног израза.

ПРИМЕР 1. Израз $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\right)$ је бројевни израз. Израчунај његову вредност.

РЕШЕЊЕ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\right)=\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{4}{14}\right)=\frac{5}{6}:\frac{3}{14}=\frac{5}{6}\cdot\frac{14}{3}=\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{3}=\frac{35}{9}=3\frac{8}{9}.$

Већ смо помињали да најважнији закони (комутативност, асоцијативност, дистрибутивност) који важе за природне бројеве, важе и за разломке.

Нека су $a, b, c, d, e, f \in N$, $b, d, f \neq 0$. Тада важи:

комутативност множења

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

1 је неутрални елемент за операцију множења

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

дистрибутативност множења према сабирању

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

није дефинисано

$$a:0$$

0 се може делити – количник је увек 0

$$0:a=0$$

ПРИМЕР 2. За колико је разлика бројева $15\frac{1}{4}$ и 6,2 мања од њиховог збира?

РЕШЕЊЕ $\left(15\frac{1}{4}+6{,}2\right)-\left(15\frac{1}{4}-6{,}2\right)=$

$=\left(\frac{61}{4}+\frac{\cancel{62}^{:2}}{\cancel{10}_{:2}}\right)-\left(\frac{61}{4}-\frac{\cancel{62}^{:2}}{\cancel{10}_{:2}}\right)=$

$=\left(\frac{61^{\cdot 5}}{4_{\cdot 5}}+\frac{31^{\cdot 4}}{5_{\cdot 4}}\right)-\left(\frac{61^{\cdot 5}}{4_{\cdot 5}}-\frac{31^{\cdot 4}}{5_{\cdot 4}}\right)=$

$=\left(\frac{305}{20}+\frac{124}{20}\right)-\left(\frac{305}{20}-\frac{124}{20}\right)=$

$=\frac{429}{20}-\frac{181}{20}=\frac{248}{20}=\frac{\cancel{248}^{:2}}{\cancel{20}_{:2}}=\frac{124}{10}=12{,}4$

ПРИМЕР 3. Израчунај вредност израза $2\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \left(6{,}2 - \frac{11}{18}\right)$.

РЕШЕЊЕ Најпре израчунајмо вредност израза у загради, затим поделимо број $\frac{1}{3}$ добијеним разломком и у овом случају добијеном количнику додајмо $2\frac{1}{3}$.

$$2\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \left(6{,}2 - \frac{11}{18}\right) = 2\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \left(\frac{31}{5} - \frac{11}{18}\right) = 2\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \left(\frac{558}{90} - \frac{55}{90}\right) =$$
$$= 2\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \frac{503}{90} = 2\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{90}{503} = 2\frac{1}{3} + \frac{30}{503} = \frac{7}{3} + \frac{30}{503} =$$
$$= \frac{7 \cdot 503 + 30 \cdot 3}{1509} = \frac{3\,611}{1\,509} = 2\,\frac{593}{1\,509}$$

ПРИМЕР 4. Провери тачност једнакости:

а) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{7}$; б) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$.

РЕШЕЊЕ а) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{\underset{:2}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\overset{:2}{\cancel{12}}}{35} = \frac{6}{35}$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{\underset{:2}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{:2}{\cancel{4}}}{7} = \frac{6}{35}$

б) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

ПРИМЕР 5. Израчунај на што једноставнији начин вредност израза:

а) $0{,}5 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{8}$; б) $0{,}17 \cdot 0{,}82 + 0{,}17 \cdot 3{,}18$.

РЕШЕЊЕ Применимо неке од закона који важе за множење и сабирање:

а) $0{,}5 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = (0{,}5 \cdot 2) \cdot \left(1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) = 1 \cdot \left(\frac{\overset{:4}{\cancel{4}}}{\underset{:3}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{:3}{\cancel{3}}}{\underset{:4}{\cancel{8}}}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

б) $0{,}17 \cdot 0{,}82 + 0{,}17 \cdot 3{,}18 = 0{,}17 \cdot (0{,}82 + 3{,}18) = 0{,}17 \cdot 4 = 0{,}68$.

ПРИМЕР 6. Ана је купила један литар минералне воде у флаши. После ручка је попила половину воде из флаше, а после вечере четвртину преостале воде у флаши. Колико је воде остало у флаши? Изрази преосталу количину воде у милилитрима.

РЕШЕЊЕ

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

У флаши је остало $\frac{3}{8}$ l.

1l = 1 000 ml, па је $\frac{3}{8}$ l $= \frac{3}{8} \cdot 1\,000$ ml $= 375$ ml

ЗАДАЦИ

89. Израчунај вредност израза:

а) $\frac{2}{3}-\frac{3}{8}:0{,}8+0{,}5$; б) $(1{,}2\cdot 5+4):\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot 5\right)$;

в) $5\frac{5}{6}\cdot\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right):\left((21-1{,}25):2{,}5\right)$.

90. Збир бројева 3,18 и 2,09 помножи разликом бројева 0,26 и 0,1.

91. Израчунај вредност израза $2{,}4+2\cdot\frac{3}{2}-\left(5{,}25-\frac{9}{4}\right)\cdot 0{,}5$.

92. Израчунај вредност израза $\left(29{,}7-15\frac{7}{10}\right):\left(1{,}88+\frac{23}{25}\right)+13\cdot\frac{1}{8}$.

93. Израчунај вредност израза $\left(\frac{3}{2}-0{,}25\right):\left(\frac{11}{4}-1{,}125\right)+1$.

94. Количник бројева $2\frac{2}{5}$ и $\frac{21}{10}$ подели разликом бројева $\frac{21}{2}$ и $\frac{32}{7}$.

95. Од производа бројева $\frac{21}{4}$ и 1,8 одузми количник истих бројева.

96. Половини збира бројева $\frac{481}{10}$ и 17,9 додај разлику бројева $5\frac{2}{5}$ и 4,5, а затим добијени резултата допуни до 80. Који је број додат?

97. Милица је на дводневну екскурзију понела џепарац у износу од 2000 динара. Првог дана је потрошила једну четвртину новца, а другог дана једну половину од онога што јој је преостало.
Колико новца је Милица вратила са екскурзије?

98.* На питање коју је оцену добила на писменом задатку из математике, наставник је Анђели одговорио: „Од збира бројева $\frac{21}{18}$ и $\frac{17}{12}$ одузми њихову разлику, а затим добијени број помножи са $\frac{111}{19}$. Број, који добијеш, је твоја оцена”. Напиши одговарајући израз и израчунај коју оцену је Анђела добила.

6.11. Једначине са множењем и дељењем разломака

Подсетимо се одређивања непознатог чиниоца, дељеника и делиоца.
Нека су a и b два броја, а x непознат број.

Ако је $x \cdot a = b$ $(a \neq 0)$, онда је $x = b : a$.

Ако је $x : a = b$ $(a \neq 0)$, онда је $x = b \cdot a$.

Ако је $a : x = b$ $(b \neq 0)$, онда је $x = a : b$.

Ова правила важе, како за природне бројеве, тако и за разломке.

ПРИМЕР 1. Одреди број који помножен са $3\frac{1}{2}$ даје производ 14.

РЕШЕЊЕ Из $3\frac{1}{2} \cdot x = 14$ одредићемо непознати број x тако што број $3\frac{1}{2}$ напишемо најпре у облику разломка $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Како је $\frac{7}{2} \cdot x = 14$, то је $x = 14 : \frac{7}{2} = \frac{14}{1} : \frac{7}{2} = \frac{14^{:7}}{1} \cdot \frac{2}{7_{:7}}$, па је $x = 4$.

Провера: $\frac{7}{2} \cdot 4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{14}{1} = \frac{28}{2} = 14$

ПРИМЕР 2. Реши једначине: а) $x \cdot 3{,}7 = 22{,}2$; б) $\frac{11}{20} \cdot x = 0{,}88$.

РЕШЕЊЕ

а)
$$x = 22{,}2 : 3{,}7$$
$$x = 222 : 37$$
$$x = 6$$

Провера: $6 \cdot 3,7 = 22,2$

б)
$$x = 0{,}88 : \frac{11}{20}$$
$$x = \frac{88}{100} : \frac{11}{20}$$
$$x = \frac{88}{100} \cdot \frac{20}{11}$$
$$x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

Провера: $\frac{11}{20} \cdot \frac{8}{5} = \frac{88}{100} = 0,88$

ПРИМЕР 3. Реши једначине: а) $x : 7{,}2 = 5\frac{1}{2}$; б) $5{,}2 : x = \frac{13}{50}$.

РЕШЕЊЕ

а)
$$x = 5\frac{1}{2} \cdot 7{,}2$$
$$x = 5{,}5 \cdot 7{,}2$$
$$x = 39{,}6$$

Провера: $39{,}6 : 7{,}2 = 5{,}5 = 5\frac{1}{2}$

б)
$$x = 5{,}2 : \frac{13}{50}$$
$$x = \frac{52}{10} \cdot \frac{50}{13}$$
$$x = 20$$

Провера: $5{,}2 : 20 = \frac{520}{100} : \frac{20}{1} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$

ПРИМЕР 4. Којим бројем треба поделити број $\frac{3}{5}$ да би се добио број $\frac{39}{25}$?

РЕШЕЊЕ Означимо тражени број са x. Тада се добија:

$$\frac{3}{5} : x = \frac{39}{25}$$
$$x = \frac{3}{5} : \frac{39}{25}$$

$x = \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{39} = \frac{5}{13}$. Тражени број је $\frac{5}{13}$.

Провера: $\frac{3}{5} : \frac{5}{13} = \frac{3}{5} \cdot \frac{13}{5} = \frac{39}{25}$

ПРИМЕР 5. Ђорђе је замислио један број. Када га је поделио са 5,5, добио је $1\frac{3}{5}$. Који је број Ђорђе замислио?

РЕШЕЊЕ

$x : 5{,}5 = 1\frac{3}{5}$

$x = 1\frac{3}{5} \cdot 5{,}5$

$x = 1{,}6 \cdot 5{,}5$

$x = 8{,}8$

Провера: $8{,}8 : 5,5 = 1{,}6 = 1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}$

Сложене једначине

ПРИМЕР 6. Ако се четворострукој вредности непознатог броја додају $\frac{2}{3}$ збира бројева $\frac{1}{2}$ и $1\frac{3}{4}$, добија се $5\frac{1}{4}$. Одреди непознати број.

РЕШЕЊЕ Означимо непознати број са x. Из услова задатка добијамо:

$\overbrace{4 \cdot x}^{\text{1. сабирак}} + \overbrace{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}\right)}^{\text{2. сабирак}} = 5\frac{1}{4}$ прво израчунамо вредност израза у загради

$\underbrace{4 \cdot x}_{\text{непознати сабирак}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = 5\frac{1}{4}$

$4 \cdot x + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$

$4 \cdot x = \frac{21}{4} - \frac{3^{\cdot 2}}{2_{\cdot 2}}$ израчунамо непознати сабирак

$4 \cdot \underbrace{x}_{\text{непознати чинилац}} = \frac{21}{4} - \frac{6}{4}$ израчунамо разлику бројева

$4 \cdot x = \frac{15}{4}$

$x = \frac{15}{4} : 4$ израчунамо непознати чинилац

$x = \frac{15}{16}$

Провера: $\cancel{4}^{:4} \cdot \frac{15}{\cancel{16}_{:4}} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

ПРИМЕР 7.

Који број помножен са $\frac{2}{5}$ треба одузети од $\frac{1}{2}$ да би се добила $\frac{1}{4}$?

РЕШЕЊЕ

$\frac{1}{2} - \overbrace{\frac{2}{5} \cdot x}^{\text{непознати умањеник}} = \frac{1}{4}$

$\frac{2}{5} \cdot x = \frac{1^{\cdot 2}}{2_{\cdot 2}} - \frac{1}{4}$

$\frac{2}{5} \cdot x = \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$

$\frac{2}{5} \cdot x = \frac{1}{4}$ непознати чинилац

$x = \frac{1}{4} : \frac{2}{5}$

$x = \frac{5}{8}$

Провера: $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ПРИМЕР 8.

Којим бројем треба поделити број 4 да би тај количник сабран са $\frac{2}{5}$ дао $1\frac{1}{5}$?

РЕШЕЊЕ

$\overbrace{4 : x}^{\text{непознати сабирак}} + \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}$

$4 : x = 1\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$

$4 : x = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}$

непознати дељеник

$4 : x = \frac{4}{5}$

$x = \frac{4}{1} : \frac{4}{5} = \frac{4^{:4}}{1} \cdot \frac{5}{4_{:4}}$

$x = \frac{5}{1} = 5$

Провера: $\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

ПРИМЕР 9. Који број треба сабрати са $\frac{1}{4}$ да би се при дељењу тог збира са 2,5 добио број $1\frac{3}{7}$?

РЕШЕЊЕ

$$\overbrace{\left(x+\frac{1}{4}\right)}^{\text{непознати дељеник}} : 2{,}5 = 1\frac{3}{7}$$

$$\underbrace{x}_{\text{непознати сабирак}} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{7} \cdot 2\frac{5}{10}$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{10}{7} \cdot \frac{25}{10}$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{25}{7}$$

$$x = \frac{25^{\cdot 4}}{7_{\cdot 4}} - \frac{1^{\cdot 7}}{4_{\cdot 7}}$$

$$x = \frac{100}{28} - \frac{7}{28}$$

$$x = \frac{93}{28} = 3\frac{9}{28}$$

Провера: $\left(3\frac{9}{28} + \frac{1}{4}\right) : 2{,}5 = \left(3\frac{9}{28} + \frac{7}{28}\right) : \frac{5}{2} = 3\frac{16}{28} : \frac{5}{2} = 3\frac{4}{7} : \frac{5}{2} = \frac{25}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$

ПРИМЕР 10. Реши једначину:

$$\left(3 + \frac{1}{4} : \frac{7}{16}\right) : x = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{7}.$$

РЕШЕЊЕ

$$\left(3 + \frac{1}{4} : \frac{7}{16}\right) : \overbrace{x}^{\text{непознати делилац}} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{7}$$

$$\left(3 + \frac{1}{\cancel{4}_{:4}} \cdot \frac{\cancel{16}^{:4}}{7}\right) : x = \frac{14}{14} - \frac{9}{14}$$

$$\left(\frac{21}{7} + \frac{4}{7}\right) : x = \frac{14}{14} - \frac{9}{14}$$

$$\frac{25}{7} : x = \frac{5}{14}$$

$$x = \frac{25}{7} : \frac{5}{14}$$

$$x = \frac{\cancel{25}^{:5}}{\cancel{7}_{:7}} \cdot \frac{\cancel{14}^{:7}}{\cancel{5}_{:5}}$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{1}$$

$$x = 10$$

Провера: $\left(3 + \frac{1}{4} : \frac{7}{16}\right) : 10 =$

$\frac{25}{7} : 10 = \frac{\cancel{25}^{:5}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_{:5}} = \frac{5}{14}$

ПРИМЕР 11. Реши једначину:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(3 \cdot x - \frac{7}{15}\right) = 2$$

РЕШЕЊЕ

$$\frac{1}{2} + \overbrace{\frac{3}{4} \cdot \left(\underbrace{3 \cdot x}_{\text{непознати умањеник}} - \frac{7}{15}\right)}^{\text{непознати сабирак}} = 2$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(3 \cdot x - \frac{7}{15}\right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(3 \cdot x - \frac{7}{15}\right) = \frac{3}{2}$$

$$3 \cdot x - \frac{7}{15} = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$$

$$3 \cdot x - \frac{7}{15} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$3 \cdot x - \frac{7}{15} = \frac{2}{1}$$

$$3 \cdot x = \frac{2^{\cdot 15}}{1_{\cdot 15}} + \frac{7}{15}$$

$$3 \cdot x = \frac{37}{15}$$

$$x = \frac{37}{15} : \frac{3}{1} = \frac{37}{15} \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{37}{45}$$

Провера: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{37}{45} - \frac{7}{15}\right) =$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{37}{15} - \frac{7}{15}\right) =$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{4} = \frac{4}{2} = 2$

Реши **тест број 61** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

99. Реши једначине:

а) $x \cdot 3{,}7 = 40{,}7$;   б) $\frac{3}{7} \cdot x = \frac{9}{17}$;   в) $5{,}2 \cdot x = 1\frac{11}{15}$;   г) $3\frac{1}{2} \cdot x = 0{,}7$.

100. Реши једначине:

а) $\frac{7}{13} : x = \frac{4}{13}$;   б) $x : 0{,}2 = 5{,}11$;   в) $0{,}32 : x = \frac{1}{16}$;   г) $x : \frac{3}{4} = 2{,}5$.

101. Који број треба поделити са $\frac{2}{5}$, да би се добио број $8\frac{2}{5}$?

102. У лонцу запремине 5 l налазила се количина од $3\frac{1}{2}$ l воде. Да би напунила лонац, Милена је пет пута додавала воду у лонац, тј. сипала из једног мањег суда напуњеног водом. Која је запремина тог мањег суда?

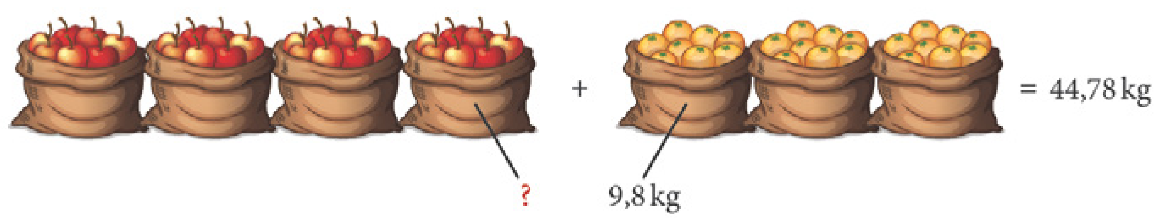
103. Који број треба помножити са 1,32 да би се добио број 9,24?

104. Количина од 630,5 kg шећера подељена је као помоћ извесном броју домаћинстава. Колико домаћинстава је добило помоћ, ако су сви добили по 48,5 kg шећера?

105. Алекса се припрема за такмичење из математике. Када је урадио $\frac{5}{9}$ предвиђених задатака, преостала су му још 24 задатка. Колико задатака Алекса треба укупно да уради?

106. Обим једног троугла је 8,5 cm. Ако су две странице једнаке, а дужина треће је 3,7 cm, колика је дужина сваке од једнаких страница?

107.* Укупна маса четири џака јабука и три џака поморанџи је 44,78 kg. Колика је маса једног џака јабука, ако је маса једног џака поморанџи 9,8 kg?



108. Реши једначине: а) $32{,}4 - (8{,}1 - 2 \cdot x) = 29{,}2$;   б) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{11}{2}\right) \cdot 0{,}4 = \frac{2}{5}$.

6.12. Неједначине са множењем и дељењем разломака

Подсетимо се, најпре, како се решавају неједначине у скупу N_0.

ПРИМЕР 1. Реши неједначине: а) $x \cdot 3 \geq 60$; б) $7 \cdot x < 42$; в) $x : 2 < 8$; г) $8 : x \geq 2$.

РЕШЕЊЕ

а) $x \cdot 3 \geq 60$
$x \geq 60 : 3$
$x \geq 20$
Скуп решења је $\{20, 21, 22, \dots\}$

б) $7 \cdot x < 42$;
$x < 42 : 7$
$x < 6$
Скуп решења је $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

в) $x : 2 < 8$;
$x < 8 \cdot 2$
$x < 16$
Скуп решења је $\{0, 2, \dots, 14\}$.

г) $8 : x \geq 2$
$x \leq 8 : 2$
$x \leq 4$
Скуп решења је $\{1, 2, 4\}$ због услова да је $x|8$.

Знак неједнакости се мења приликом решавања неједначине у којој је непознат делилац.

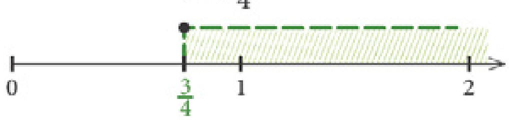
Иста правила важе и при решавању неједначина у којима се појављују разломци.

ПРИМЕР 2. Реши неједначине и прикажи решења на бројевној полуправој:

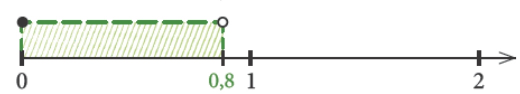
а) $x \cdot \frac{7}{8} \geq \frac{21}{32}$; б) $0{,}2 \cdot x < 0{,}16$; в) $x : 0{,}3 \leq 1\frac{2}{3}$.

РЕШЕЊЕ

а) $x \cdot \frac{7}{8} \geq \frac{21}{32}$
$x \geq \frac{21}{32} : \frac{7}{8}$
$x \geq \frac{21}{32} \cdot \frac{8}{7}$
$x \geq \frac{3}{4}$

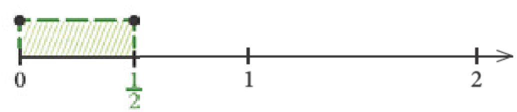


б) $0{,}2 \cdot x < 0{,}16$
$x < 0{,}16 : 0{,}2$
$\left.\begin{array}{l} x < 0{,}8 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Из ова два услова скуп решења је $0 \leq x < 0{,}8$.



Решења неједначине су бројеви из скупа N, па важи и да је $x \geq 0$.

в) $x : 0{,}3 \leq 1\frac{2}{3}$
$x \leq 1\frac{2}{3} \cdot 0{,}3$
$x \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10}$
$\left.\begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Из ова два услова скуп решења је $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.



ПРИМЕР 3. Производ броја $\frac{2}{7}$ и непознатог броја није већи од $\frac{16}{21}$. Одреди које вредности може да има непознати број.

РЕШЕЊЕ Како је $\frac{2}{7} \cdot x \leq \frac{16}{21}$
$x \leq \frac{16}{21} : \frac{2}{7} = \frac{8}{3}$
$\left.\begin{array}{l} x \leq \frac{8}{3} \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ Из ова два услова скуп решења је $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

ПРИМЕР 4. Реши неједначину и прикажи решења на бројевној полуправи.

непознати делилац

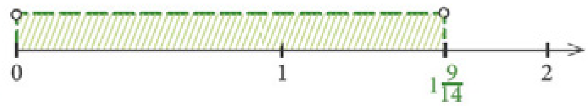
$5\frac{3}{4} : x > 3\frac{1}{2}$

Приликом решавања неједначине мења се знак неједнакости.

$x < 5\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2}$

$x < \frac{23}{4} : \frac{7}{2}$

$x < \frac{23}{4} \cdot \frac{2}{7}$



$x < \frac{23}{14} = 1\frac{9}{14}$

$x \neq 0$

$x > 0$

Из ових услова скуп решења је $0 < x < 1\frac{9}{14}$.

Нула није решење неједначине, јер се нулом не дели.

ПРИМЕР 5. Којим бројевима се може поделити број 4,2 да резултат не буде мањи од $\frac{3}{5}$?

РЕШЕЊЕ У овом примеру може се обратити пажња на одређивање интервала решења:

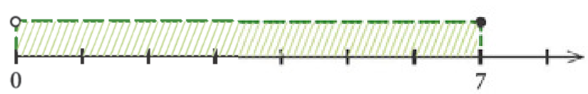
- Израз „да не буде мањи од", тј. „није мање од" заправо значи „веће или једнако" $\geq$.
- Израз „није веће од" значи „мање или једнако", па се записује знаком $\leq$.
- Непознат је делилац, па се знак неједнакости мења.
- Број 0 не припада решењима, јер дељење нулом није дефинисано.

$4{,}2 : x \geq \frac{3}{5}$

$x \leq 4{,}2 : \frac{3^{\cdot 2}}{5_{\cdot 2}}$

$x \leq 4{,}2 : \frac{6}{10}$

$x \leq 4{,}2^{\cdot 10} : 0{,}6^{\cdot 10}$



$x \leq 42 : 6$

$x \leq 7$

$x \neq 0$

$x > 0$

Из ових услова скуп решења је $0 < x \leq 7$.

ПРИМЕР 6. Петар је летовао у Грчкој и желео је да својим другарима пошаље разгледнице. Израчунао је да 9 једнаких разгледница кошта 11 евра и известан број центи, а 13 истих таквих разгледница кошта 15 евра и известан број центи.

Која је цена једне разгледнице?

РЕШЕЊЕ Означимо број разгледница са x.

Из $11 < 9x < 12$ и $15 < 13x < 16$ налазимо

$\frac{11}{9} < x < \frac{12}{9}$ и $\frac{15}{13} < x < \frac{16}{13}$

$1{,}222 < x < 1{,}333$ и $1{,}1538 < x < 1{,}2307$,

па је $x = 1{,}23$ евра.

Реши **тест број 64** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

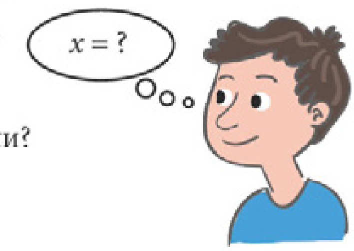
ЗАДАЦИ

109. Реши неједначине: а) $3 \cdot x < \frac{9}{11}$; б) $x \cdot 7{,}4 \geq 37$; в) $0{,}7 \cdot x \leq 22{,}4$.

110. Реши неједначине: а) $x : 7 < 0{,}91$; б) $x : \frac{5}{7} \geq \frac{1}{5}$; в) $x : \frac{3}{4} \leq 6{,}24$.

111. Михаило је замислио један број. Када га је поделио са $5\frac{1}{11}$, добио је количник који је већи од 33.

Који је најмањи број који је Михаило могао да замисли?



112. Реши неједначине: а) $x \cdot \frac{3}{7} \leq \frac{9}{14}$; б) $\frac{5}{3} \cdot x > \frac{31}{3}$; в) $\frac{1}{4} \cdot x < 5{,}2$.

113. Реши неједначине: а) $x : 0{,}21 \leq 4$; б) $x : 12 > \frac{5}{6}$; в) $x : 2{,}4 \leq 12$.

114. Реши неједначине: а) $\left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{2} < 1\frac{2}{3}$; б) $\left(2 \cdot x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{7} \geq \frac{23}{7}$.

115. Из паковања од 1,9 l сока Нина је сипала сваког дана себи пуну чашу од 1,5 dl све док количина преосталог сока није била мања од запремине чаше. Колико дана је Нина могла да сипа сок у своју чашу на овај начин?

116. Реши неједначине и скуп решења прикажи на бројевној полуправој:

а) $x \cdot 0{,}3 > 1{,}5$; б) $x : \frac{2}{3} \leq 4\frac{1}{2}$.

117. Реши неједначину $3\frac{1}{7} < 2 \cdot x < 5\frac{3}{7}$.

118.* Ако се од троструке вредности непознатог броја одузме збир бројева $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, добија се број који је већи од 4. Одреди које вредности може имати непознати број.

РАЗНИ ЗАДАЦИ

119. Испод прва два круга напиши разломке који одговарају обојених деловима. Затим, одреди збир разломака и обој одговарајући број делова трећег круга да би сабирање било тачно.

____ + ____ = ____

120. Сабери разломке:

а) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$; в) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}$;

г) $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$; д) $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$; ђ) $\frac{3}{10}+\frac{2}{10}$;

е) $\frac{1}{14}+\frac{3}{14}+\frac{7}{14}$; ж) $\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}$.

121. Сабери разломке:

а) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$;

г) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$; д) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$; ђ) $\frac{1}{21}+\frac{3}{7}$.

122. Израчунај:

а) $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}$; б) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}$;

г) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$; д) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$; ђ) $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$;

е) $\frac{8}{9}-\frac{3}{9}-\frac{1}{9}$; ж) $\frac{7}{11}-\frac{3}{11}-\frac{4}{11}$.

123. Израчунај:

а) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$; б) $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$;

в) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}$; г) $\frac{5}{11}-\frac{4}{11}+\frac{3}{11}$.

124. Израчунај вредност збира и изрази га у децималном запису:

а) $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}$;

б) $\frac{3}{100}+\frac{5}{1\,000}+\frac{7}{100\,000}$.

125. Израчунај вредност израза:

а) $\left(3\frac{3}{7}-2\frac{1}{7}\right)+4\frac{4}{7}$; б) $8\frac{5}{11}-\left(2\frac{4}{11}+3\frac{10}{11}\right)$;

в) $\left(9\frac{3}{5}-4\frac{1}{5}\right)-3\frac{3}{5}$; г) $7\frac{1}{9}-\left(5\frac{4}{9}-2\frac{7}{9}\right)$.

126. Шта ће се догодити са збиром два броја ако:

а) један сабирак повећамо за $3\frac{3}{5}$, а други за $2\frac{1}{4}$;

б) један сабирак увећамо за 5,5, а други умањимо за $2\frac{1}{8}$?

127. Од збира бројева $3\frac{3}{4}$ и $2\frac{1}{5}$ одузми разлику тих бројева.

128. Збиру бројева $13\frac{3}{8}$ и $5\frac{1}{4}$ додај њихову разлику.

129. а) Странице једног троугла су $a=2\frac{1}{3}$ cm, $b=3$ cm и $c=4\frac{5}{6}$ cm. Израчунај обим овог троугла.

б) Странице једног правоугаоника су $a=5\frac{3}{7}$ cm и $b=3\frac{2}{5}$ cm. Израчунај обим овог правоугаоника.

130. Израчунај обим правоугаоника чија је:

а) дужина $5\frac{1}{5}$ cm, а ширина за $\frac{3}{10}$ cm мања од дужине;

б) дужина $5\frac{1}{5}$ cm, а ширина за $\frac{1}{2}$ cm већа од дужине.

131.* Један радник би цео посао завршио за 15 дана, други радник би исти посао завршио за 20 дана, а трећи за 12 дана. За колико дана ће завршити посао ако раде сва тројица заједно?

132. Бака Ружа у свом дворишту узгаја живину. Ћурке чине $\frac{3}{8}$, гуске $\frac{1}{10}$, а кокошке $\frac{2}{5}$. Остало су патке. Који део представљају патке?

133.* Зоран и Горан раде домаћи задатак из математике. Зоран уради домаћи за 21 минут, а ако му Горан помогне, задатак заврше за 14 минута. Колико времена Горану треба да сам уради домаћи задатак?

134.* Крава попасе једну ливаду за два сата, овца за три сата, а коза за шест сати. За које време би оне заједно попасле ту ливаду?

135. Израчунај:

а) $2{,}5 + 0{,}1$; б) $2{,}43 + 3{,}78$;
в) $1{,}4 + 5{,}28$; г) $1{,}075 + 2{,}33$;
д) $11{,}27 + 4{,}309$; ђ) $5{,}55 + 9{,}909$.

136. Сабери бројеве:

а) $0{,}3 + 0{,}9 + 1{,}2$; б) $0{,}4 + 1{,}7 + 11{,}03$;
в) $0{,}023 + 5{,}1 + 16{,}99$; г) $0{,}12 + 0{,}02 + 0{,}88$.

137. Израчунај збир:

а) $5{,}6 + 0{,}3 + 7{,}4 + 11{,}2$;
б) $1{,}2 + 1{,}3 + 1{,}4 + 1{,}5$;
в) $2{,}1 + 3{,}2 + 4{,}3 + 5{,}4 + 6{,}5$;
г) $11{,}03 + 0{,}89 + 1{,}58 + 3{,}24 + 0{,}07$.

138. Израчунај разлику:

а) $4{,}6 - 3{,}2$; б) $5{,}9 - 3{,}8$;
в) $0{,}15 - 0{,}14$; г) $3{,}237 - 2{,}111$.

139. Израчунај разлику:

а) $1{,}2 - 0{,}3$; б) $7{,}6 - 3{,}9$;
в) $5{,}43 - 2{,}88$; г) $11{,}25 - 3{,}46$;
д) $7{,}073 - 6{,}18$; ђ) $10{,}0032 - 0{,}745$.

140. Попуни таблицу:

a	0,1		23,01
b	0,05	3,74	
$a + b$		17,11	
$a - b$			2,5

141. Од броја 6 одузми бројеве:

а) 2,11; б) 0,17; в) 5,92; д) 1,33.

142. Израчунај:

а) $5{,}2 - 2{,}4 + 1{,}7$; б) $2{,}14 - 1{,}87 + 3{,}51$;
в) $5{,}03 - 1{,}9 + 4{,}117$; г) $6{,}22 - 5{,}87 + 0{,}13$.

143. Од броја 8 одузми збир бројева:

а) $3{,}2 + 1{,}8$; б) $4{,}37 + 2{,}76$;
в) $3{,}05 + 1{,}73$; г) $2{,}101 + 3{,}998$.

144. а) Броју 7 додај збир бројева 2,3 и 4,9;
б) Од броја 8,12 одузми разлику бројева 3,4 и 1,72;
в) Од броја 7,505 одузми збир бројева 0,13 и 6,92.

145. Дате разлике изрази као децималне бројеве, па израчунај вредност израза:

а) $\frac{1}{2} + 0{,}23$; б) $\frac{3}{4} - 0{,}57$;
в) $\frac{5}{8} + 2{,}77$; г) $\frac{17}{20} - 0{,}18$;
д) $\frac{1}{5} + \frac{3}{8} - 0{,}49$; ђ) $\frac{5}{8} + 2{,}17 - \frac{9}{10}$.

146. Дате децималне бројеве преведи у разломак облика $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$ и израчунај:

а) $\frac{1}{2} + 0{,}5$; б) $0{,}375 - \frac{1}{8}$;
в) $2{,}75 + \frac{3}{4}$; г) $2{,}9 - \frac{1}{10}$.

147. Израчунај обим троугла, ако су дужине страница:

а) 2,3 cm, 4,1 cm, 3,8 cm;
б) 1,6 mm, 2,34 mm, 1,07 mm.

148. Мајстори су од кабла дужине 24 m одсекли најпре део од 6,3 m, а затим део од 2 m и 7 cm. Колико кабла је преостало?

149. Реши једначине:

а) $x + 1\frac{3}{4} = 2$; б) $5\frac{2}{3} - x = \frac{1}{6}$;
в) $x - 3 = 4\frac{1}{8}$; г) $5\frac{1}{5} + x = 13$;
д) $1\frac{1}{3} - (x - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$; ђ) $2\frac{1}{4} + (5 + x) = 11\frac{3}{4}$.

150. Реши једначине:

а) $3{,}14 + x = 5{,}02$; б) $x + 0{,}73 = 8$; в) $21{,}5 - x = 13{,}05$;
г) $x - 3{,}21 = 4{,}89$; д) $18 - (0{,}21 + (6{,}29 - x)) = 12{,}5$.

151. Реши једначине:

а) $5{,}4 + x = 12\frac{1}{4}$; б) $x - 2\frac{1}{12} = 5\frac{3}{4}$;
в) $x + 0{,}5 = 9\frac{1}{3} - 7$; г) $x + 1\frac{2}{5} = 2\frac{7}{10} - 0{,}8$;
д) $6\frac{1}{7} - x = \frac{3}{14}$; ђ) $11{,}2 - x = 1\frac{3}{5}$;
е) $13{,}2 - (4\frac{3}{5} - (x - 1\frac{2}{5})) = 12{,}5$.

152. Провери да ли је број $2\frac{2}{3}$ решење једначине $x + (x + 5\frac{2}{3}) - (x - 4\frac{1}{3}) = \frac{1}{6} + 12.$

153. Реши једначину $5\frac{1}{5} - x = 26{,}2$. Да ли решење припада скупу природних бројева?

154. Ако непознат број увећамо за 37,05, добијамо највећи двоцифрен природан број. Одреди непознат број.

155. За колико треба повећати разлику бројева $12\frac{1}{3} - 4\frac{3}{5}$ да би се добио број 20?

156. Који број треба одузети од збира $3\frac{1}{9} + 2{,}5$ да би се добио број $1\frac{5}{6}$?

157. Који број треба додати разлици бројева $3\frac{1}{4}$ и $1\frac{1}{3}$ да би се добио збир бројева $\frac{1}{12}$, $5\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{2}$.

158. Обим троугла је 11,05 cm. Колика је дужина треће странице, ако су дужине двеју страница $3\frac{1}{4}$ cm и $5\frac{2}{5}$ cm.

159. Када се трећини непознатог броја дода 5,2 добија се 8,14. Који је то број?

160. У акваријум стаје 120 l воде. Првог минута насуто је $37\frac{1}{4}$ l, а другог још $48\frac{1}{3}$ l. Колико још треба сипати воде да би акваријум био пун?

161. Реши неједначине:

а) $x + \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}$;

б) $\frac{1}{7} + x \geq \frac{3}{14}$; в) $x - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{9}$; г) $x - \frac{1}{5} > \frac{7}{10}$.

162. Реши неједначине:

а) $x + 0{,}73 \leq 1{,}205$; б) $1{,}03 + x > 2{,}7$;
в) $x + 2{,}14 \geq 3$; г) $5{,}1 + x < 12{,}99$;
д) $x - 3{,}17 > 2{,}83$; ђ) $x - 1{,}1 \leq 5{,}41$;
е) $x - 13{,}7 > 2{,}3$.

163. Реши неједначине:

а) $\frac{4}{5} + x \geq 2{,}1$;

б) $x + 7{,}3 \leq 12\frac{1}{10}$; в) $\frac{5}{7} + x < 1{,}1$;
г) $1\frac{3}{5} + x > 10{,}4$; д) $x - 2\frac{1}{5} \leq 5{,}4$;
ђ) $x - 1{,}2 \leq \frac{1}{10}$; е) $x - 4\frac{1}{3} < 5{,}2$.

164. Када иде од куће у библиотеку, Мира пролази поред школе. Дужина пута од куће до библиотеке је мања од 500 m, а од куће до школе износи 214,3 m. Колико највише може да буде дуг пут од школе до библиотеке?

165. Од ког броја треба одузети 3,17 да би разлика била већа од 2,83?

166. Одредити решења неједначина, а затим све природне бројеве који је задовољавају:

а) $5{,}6 + x < 7\frac{1}{3}$; б) $3\frac{1}{3} + x < 8{,}2$.

167. На бројевној полуправој означи све природне бројеве за које важи:

а) $x + 2{,}7 < 5{,}1$; б) $3 + x \leq 7\frac{1}{3}$;
в) $x + 8\frac{1}{3} < 12{,}4$; г) $5{,}7 + x \leq 11\frac{1}{8}$.

168. Реши неједначине:

а) $7 - x > 3$; б) $20 - x \leq 11$;
в) $5\frac{1}{3} - x > 4\frac{5}{6}$; г) $17 - x \leq \frac{2}{3}$;
д) $23{,}6 - x < 15\frac{1}{5}$; ђ) $7\frac{1}{2} - x \geq 5{,}3$.

169. Израчунај вредност израза:

а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{11}$; в) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$;
г) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5}$; д) $3 + \frac{1}{9} \cdot 2\frac{1}{4}$; ђ) $2 \cdot \frac{3}{11} - 1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{55}$;
е) $1\frac{2}{9} \cdot 3\frac{3}{11} - 4\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{58}$; ж) $2\frac{1}{2} \cdot (8\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3})$;
з) $\frac{3}{28} \cdot (\frac{7}{8} \cdot 2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{10})$.

170. Израчунај:

а) $\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{8}$; б) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{24} \cdot 2$;
в) $3\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}$; г) $5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{7}$;
д) $16\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{7}$; ђ) $2\frac{2}{15} \cdot 1\frac{2}{16}$.

171. Израчунај:

а) $(\frac{1}{2}+1\frac{1}{3})\cdot 6-\frac{3}{5}\cdot 5$; б) $(\frac{3}{4}+2\frac{1}{8})\cdot 8-1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{7}$.

172. Израчунај вредност производа:

а) $8\cdot\frac{2}{3}\cdot 9\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{16}$; б) $6\cdot 4\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{14}{27}$;

в) $\frac{11}{16}\cdot 8\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{11}\cdot\frac{4}{9}\cdot 6$.

173. Израчунај: а) $\frac{1}{2}$ од 20; б) $\frac{1}{4}$ од 24;

в) $\frac{1}{5}$ од 40; г) $\frac{1}{10}$ од 30; д) $\frac{1}{10}$ од 100;

ђ) $\frac{1}{5}$ од 1 000; е) $\frac{1}{8}$ од 200.

174. Колико износи: а) $\frac{1}{4}$ од 12; б) $\frac{2}{3}$ од 9;

в) $\frac{7}{10}$ од 30; г) $\frac{6}{13}$ од 65; д) $\frac{2}{5}$ од $\frac{1}{9}$;

ђ) $\frac{3}{7}$ од $\frac{21}{13}$; е) $\frac{5}{32}$ од $\frac{64}{121}$; ж) $\frac{27}{5}$ од $\frac{25}{9}$?

175. Израчунај:

а) $\frac{5}{6}$ од 72; б) $\frac{2}{3}$ од 66; в) $\frac{7}{12}$ од 150.

176. Да ли је веће $\frac{7}{16}$ од 640 или $\frac{17}{40}$ од 640?

177. Кошаркашки клубови „Младост” и „Јединство” одиграли су до сада једни против других 132 меча. Екипа „Младости” добила је $\frac{7}{12}$ одиграних мечева. Колико победа има екипа „Јединства”?

178. На такмичењу из математике учествовало је 240 ученика. Ако је $\frac{7}{20}$ такмичара успело да се квалификује, а од њих једна четвртина освојила је награде. Колико ученика је награђено?

179. Из магацина у коме је било $12\frac{1}{5}$ t брашна однето је једног дана $\frac{5}{11}$ укупне количине брашна, а другог дана $\frac{2}{3}$ остатка. Колико је брашна остало?

180. Једна трећина ученика V_1 су дечаци. Број ученика тог одељења је $\frac{3}{40}$ од броја свих ученика школе. Који део ученика школе су дечаци одељења V_1?

181. Школа страних језика дала је овакав оглас:

НАУЧИТЕ ЕНГЛЕСКИ ЈЕЗИК
ЗА САМО 8 НЕДЕЉА!
ДВА ПУТА НЕДЕЉНО ПО $1\frac{1}{2}$ САТА

Колико је сати наставе енглеског језика предвиђено овом понудом?

182. Из бурета од 120l Јанко је излио $\frac{4}{15}$, а Иван $\frac{3}{10}$ садржаја. Ко је излио већу количину течности?

183. У Мартином одељењу има 28 ученика, од којих су $\frac{4}{7}$ девојчице. Од свих девојчица из тог одељења, $\frac{3}{4}$ се баве неким спортом. Колико девојчица из Мартиног одељења се не бави спортом?

184. Дате бројеве помножи са 10: а) 5,3; б) 4,7; в) 11,02; г) 0,07; д) 2,232; ђ) 0,011.

185. Дате бројеве помножи са 1,4: а) 2,5; б) 0,03; в) 5,55; г) 0,37; д) 35; ђ) 0,001.

186. Израчунај: а) $5{,}2\cdot 0{,}1$; б) $3{,}7\cdot 0{,}4$;
в) $2{,}2\cdot 4{,}4$; г) $3{,}8\cdot 4{,}9$; д) $5{,}23\cdot 7$;
ђ) $9{,}99\cdot 8$; е) $2{,}75\cdot 0{,}4$; ж) $5{,}36\cdot 0{,}05$.

187. Знајући да је $125\cdot 63 = 7\,875$ израчунај:
а) $12{,}5\cdot 63$; б) $1{,}25\cdot 63$; в) $12{,}5\cdot 6{,}3$;
г) $12{,}5\cdot 0{,}63$; д) $1{,}25\cdot 0{,}63$; ђ) $12{,}5\cdot 0{,}63$;
е) $0{,}125\cdot 63$; ж) $1{,}25\cdot 6{,}3$; з) $0{,}125\cdot 6{,}3$.

188. Израчунај, тако што ћеш разломке облика $\frac{a}{b}$ $(a, b\in N)$ претворити у децимални запис и обрнуто:

а) $2{,}1\cdot\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{7}\cdot 2{,}8$; в) $\frac{4}{5}\cdot 0{,}37$;

г) $6{,}7\cdot\frac{1}{8}$; д) $\frac{1}{3}\cdot 2{,}4$; ђ) $\frac{4}{5}\cdot 0{,}066$;

е) $0{,}7\cdot\frac{11}{13}$; ж) $\frac{5}{11}\cdot 2{,}2$.

189. Израчунај $\frac{2}{3}$ броја:
а) 1,23; б) 1,5; в) 3,21; г) 9,27.

190. Израчунај: а) $\frac{5}{6}$ од 0,3; б) $\frac{11}{13}$ од 0,65;

в) $\frac{2}{7}$ од 5,6; г) $\frac{4}{9}$ од 28,62.

191. Воз се креће брзином од 36,12 метара у секунди. Колико тај воз пређе за:

а) 10 s; б) 150 s; в) 12,3 s.

192. Једна соба има димензије 3,75 m и 4,5 m, а друга 3,65 m и 5,2 m. Која соба има већу површину и за колико?

193. Михајло је желео да купи 180 евра по курсу који је пет дана био 1 евро је 117,92 динара. Колико динара му је за то било потребно?

194. Израчунај:

а) $2{,}03 \cdot 10 + 2{,}03 \cdot 100 + 2{,}03 \cdot 1\,000$;
б) $0{,}006 \cdot 10 + 0{,}006 \cdot 100 + 0{,}006 \cdot 1\,000$;
в) $0{,}7 \cdot 10 + 0{,}07 \cdot 100 + 0{,}007 \cdot 1\,000$.

195. Израчунај:

а) $2{,}7 \cdot 3{,}5 + 11{,}4 \cdot 3$; б) $5{,}02 \cdot 7{,}1 - 2{,}4 \cdot 1{,}1$;
в) $8 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}3$; г) $13 \cdot 2{,}45 - 4{,}4 \cdot 2{,}9$.

196. Израчунај вредност и количника:

а) $\frac{3}{7} : \frac{6}{5}$; б) $\frac{12}{25} : \frac{4}{16}$; в) $1\frac{3}{7} : \frac{5}{14}$;
г) $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$; д) $\frac{25}{33} : 5$; ђ) $\frac{16}{23} : 8$;
е) $\frac{2}{7} : 5$; ж) $\frac{1}{9} : 3$; з) $11 : \frac{11}{12}$;
и) $7 : \frac{3}{14}$; ј) $11 : 5\frac{1}{2}$; к) $12 : 1\frac{3}{4}$;
л) $1\frac{1}{2} : 6$.

197. Израчунај:

а) $\left(2\frac{4}{5} : 1\frac{2}{5}\right) : \frac{4}{7}$; б) $3\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)$;
в) $\left(5\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right) : \frac{3}{14}$; г) $7\frac{1}{2} : \left(3\frac{1}{3} : \frac{5}{6}\right)$.

198. Дате су једнакости: а) $\frac{1}{4} : 3 = 1 : \frac{4}{3}$;
б) $\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$; в) $6\frac{4}{15} : 4{,}7 = 1\frac{1}{3}$.
Које од ових једнакости су тачне?

199. Израчунај: а) збир; б) разлику; в) производ; г) количник бројева $1\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

200. Упореди збир, разлику, производ и количник бројева $1\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{10}$.

201. Обим квадрата је $21\frac{3}{5}$ cm. Одреди дужину странице a и површину P тог квадрата.

202. Израчунај вредност израза:

а) $\frac{5}{8} + \frac{16}{6}$; б) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$;
в) $1\frac{3}{5} - \frac{7}{15}$; г) $8\frac{7}{9} + 12\frac{4}{12}$.

203. Возећи сталном брзином, један камион за $2\frac{1}{2}$ сата прешао је 75 километара. Колико је прелазио за један сат?

204. Марков корак је дуг $\frac{4}{5}$ m. Колико корака треба да направи од куће до школе, ако је дужина тог пута 220 m?

205. Возећи свој аутомобил просечном брзином $91\frac{1}{9}$ km/h Богдан је прешао пут од Београда до Будимпеште дуг 410 km. Колико дуго је Богдан возио?

206. Драгомир жели да лончетом у које стане $\frac{2}{3}$ l воде напуни канту у коју стаје $4\frac{2}{3}$ l воде. Колико пута треба да напуни лонче водом да би напунио канту?

207. Одреди број x ако је:

а) $\frac{3}{5}$ броја x једнака 9; б) $\frac{5}{8}$ броја x једнака 15;
в) $\frac{3}{7}$ броја x једнака 21; г) $\frac{3}{5}$ броја x једнака $\frac{9}{11}$.

208. Бројеве подели са 10:

а) 3,7; б) 23,41; в) 0,7; г) 105,105.

209. Бројеве подели са 100:

а) 313,2; б) 24,07; в) 5,1; г) 0,73.

210. Бројеве подели са 2: а) 14,4; б) 7,6;
в) 0,18; г) 3,754; д) 0,281; ђ) 0,0053.

211. Бројеве подели са 0,25: а) 13,75; б) 15,25;
в) 0,7025; г) 1,5.

212. Подели: а) $14 : 0{,}7$; б) $0{,}38 : 0{,}2$;
в) $1{,}8 : 0{,}09$; г) $6{,}5 : 0{,}013$;
д) $0{,}24 : 60$; ђ) $21{,}46 : 0{,}003$.

213. Израчунај:

а) $2,3 : 10 + 2,33 : 100$;

б) $70,17 : 10 + 8,2 : 100$;

в) $1\,000,3 : 10 + 242,7 : 100 + 54,1 : 1\,000$;

г) $5,3 : 10 + 55,33 : 100 + 555,333 : 1\,000$.

214. Израчунај вредност израза:

а) $(5,7 + 2,4) : (3,7 - 2,8)$;
б) $(37,44 + 27,56) : (1,12 + 0,18)$;
в) $(22,6 - 15,4) : (0,37 + 0,53)$.

215. Израчунај, тако што ћеш разломке облика $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$ претворити у децимални запис или бројеве у децималном запису у облику разломка:

а) $7,5 : \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{7} : 2,4$; в) $5,4 : \frac{3}{7}$;
г) $\frac{1}{4} : 0,32$; д) $\frac{3}{8} : 0,21$; ђ) $7,75 : \frac{5}{9}$.

216. Обим квадрата је 28,56 cm. Израчунај дужину једне његове страницe.

217. Возећи сталном брзином, Горан је на ауто-путу за 3 h прешао 382,95 km. Колики пут је прешао за 1 h?

218. Платно дужине 14,5 m треба поделити на пет једнаких делова. Колика ће бити дужина једног дела?

219. На летовању у Грчкој, Ирена је за четири једнака колача платила 7,4 евра. Колико кошта један колач?

220. Димензије једне посуде облика квадра су $a = 0,7$ m, $b = 0,43$ m, $c = 0,52$ m. Колика је запремина овог квадра у кубним метрима? Колико литара воде стане у тај квадар?

221. Производ бројева 43,2 и 0,3 поделити њиховим количником.

222. а) Колико пута је троструки производ бројева 3,3 и 0,25 мањи од броја 4,95?

б) Колико пута је количник бројева $4\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{9}$ већи од броја $2\frac{1}{3}$?

223. Породица Николић попије недељно 42 l флаширане воде. У једној боци налази се 1,5 l воде. Колико боца те воде Николићи потроше за недељу дана?

224. У београдском хотелу „Соко” гост је требало да плати рачун од 12 500 динара. Колико швајцарских франака је гост требало да размени у хотелској мењачници, ако се тог дана за 1 швајцарски франак добијало 108,70 динара?

225. Израчунај вредности израза $a = 0,2 : 0,02$; $b = 0,2 : 2$; $c = 0,2 \cdot 2$; $d = 0,02 : 0,2$ и поређај бројеве a, b, c, d по величини.

226. Драгица је траку дужине 26,01 dm исекла на три једнака дела, а њена сестра Мира траку дужине 30,24 dm је исекла на девет једнаких делова. Колике су дужине добијених делова?

227. Реши једначине:

а) $\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{7}{13} = \frac{x+2}{13}$; в) $\frac{x-1}{4} = 1\frac{1}{4}$;
г) $\frac{7}{x} = \frac{7}{9}$; д) $\frac{4}{x-1} = \frac{4}{5}$; ђ) $\frac{3}{2 \cdot x + 7} = \frac{3}{11}$.

228. Реши једначине:

а) $3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x = 2$; б) $2,5 - \frac{3}{10} \cdot x = 1\frac{3}{10}$.

229. Одреди y ако је а) $\frac{2}{5}y = \frac{3}{7}$; б) $\frac{3}{7}y = \frac{2}{5}$.

230. Реши једначине:

а) $12 : x = 0,75$; б) $11 : x = 0,25$;
в) $14,3 : x = 0,55$; г) $8,75 : x = 0,07$.

231. Реши једначине:

а) $x \cdot 4 - 1,5 = 2\frac{1}{4}$; б) $x \cdot 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6}$;
в) $(3 - 1\frac{1}{8}) : x = 0,25$; г) $2,85 - 4\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{10}$.

232. Одреди број чије $\frac{3}{5}$ износе:

а) 24; б) 39; в) $\frac{3}{7}$; г) $2\frac{1}{16}$.

233. Ана је прочитала $\frac{4}{7}$ књиге и остало јој је да прочита још 120 страна. Колико страна има та књига?

234. Када је прешао $\frac{7}{12}$ пута, аутобусу је преостало да пређе још 25 km. Колики пут аутобус треба да пређе?

235. Када је препливао 900 m, пливачу је остало још $\frac{2}{5}$ стазе. Колика је дужина стазе?

236. Који број треба помножити са $1\frac{2}{5}$ да би се добио број 4,2?

237. Одреди број који подељен са $2\frac{1}{2}$ даје количник бројева 0,8 и $\frac{1}{5}$.

238. Ученици петог разреда су измерили дужину учионице 7,6 m и ширину 5,5 m. Колика је висина учионице, ако је њена запремина 125,4 m³?

239. Извесна количина бицикала подељена је у три продавнице тако да је прва добила $\frac{1}{6}$, а друга $\frac{3}{10}$ остатка, а трећа 70 бицикла. Колико бицикала је добила прва, а колико друга продавница?

240. Ако се од броја a одузму његове $\frac{3}{8}$, а затим од остатка одузмемо $\frac{7}{15}$, добија се број 80. Одреди број a.

241. Мотоциклиста је прешао $\frac{7}{12}$ пута и остало му је 45 km. Колики пут је планирао да пређе?

242. Иванка је прочитала $\frac{4}{9}$ неке књиге и преостало јој је још 105 страна. Колико страна има та књига?

243. Мајка је 30 година старија од своје ћерке и ћеркине године представљају $\frac{2}{7}$ мајчиних година. Колико година има мајка, а колико ћерка?

244. Реши неједначине:

а) $8 \cdot x - 5\frac{1}{2} \geq 2,5$; б) $2 \cdot x - 8\frac{1}{3} \leq \frac{7}{6}$;

в) $6 \cdot x - (3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}) > 5$; г) $4 \cdot x - (5,2 - \frac{1}{10}) < 6\frac{1}{5}$.

245. Реши неједначине:

а) $3 \cdot (x + 1) \geq 5$; б) $7 \cdot (x - 3) \leq 4$;

в) $2 \cdot (x - \frac{3}{2}) \leq 1$; г) $4 \cdot (x + \frac{1}{3}) \geq 11$;

д) $\frac{1}{4} \cdot x + 1 > \frac{15}{2}$; ђ) $\frac{1}{3} \cdot (x - 1) < \frac{7}{8}$.

246. Реши неједначине и скуп решења прикажи на бројевној полуправој:

а) $3 \cdot x + 2\frac{1}{5} > 4,2$; б) $1\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} < 1$.

247. Реши неједначину, а затим решење прикажи на бројевној полуправој:

а) $x : \frac{3}{4} \geq 1,2$; б) $x : 0,4 > 3\frac{1}{4}$;

в) $\frac{2}{7} \cdot x < 0,2$; г) $x \cdot 1\frac{5}{6} \geq 6\frac{1}{5}$.

248.* Реши неједначину: $\frac{1}{4} < 1 : (2 \cdot x - \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.

249. Реши неједначину:

а) $\frac{3}{4} \leq (x + 1) : 6 < \frac{4}{5}$;

б) $\frac{1}{3} < (x - 3) : 5 \leq \frac{3}{4}$.

250. Одреди све природне бројеве n такве да важи:

а) $\frac{1}{6} \leq \frac{n}{12} \leq \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3} < \frac{n}{5} < \frac{11}{12}$.

251.* Одреди све просте бројеве тако да је разломак $\frac{37}{2}p$ већи од 1, а мањи од 2.

252. Одреди све природне бројеве који задовољавају две дате неједначине:

а) $x - 5 \geq 0$ и $3x - 19 < 0$;

б) $2x - 8 > 0$ и $5x - 37 \leq 0$.

253. Одреди разлику израза $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} : \frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$.

254. Производ бројева $5\frac{1}{3}$ и $2\frac{5}{6}$ подели збиром бројева $1\frac{1}{9}$ и $2\frac{4}{9}$, па затим количнику додај број $5\frac{3}{4}$.

255. Израчунај вредност израза:

а) $\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}$; б) $\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)$;

в) $\left(\frac{55}{84}:\frac{11}{252}+1\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{33}$; г) $1\frac{1}{3}:\left(14+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}$;

д) $2+7\cdot\left(6+\frac{4}{3}\right):\frac{11}{3}$.

256. Израчунај вредност израза:

а) $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):\left(0{,}358-0{,}108\right)\right)\cdot1{,}6-\frac{19}{25}$;

б) $(3+4{,}2:0{,}1):\left(\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot0{,}3125\right)$;

в) $\left(\left(\frac{1}{3}:0{,}125+\frac{2}{3}:5\frac{4}{5}-\frac{14}{25}\right)\cdot17\right):\left(\left(1{,}5-\frac{1}{12}\right):1\frac{4}{25}\right)$;

г) $\left(26{,}7-13\frac{1}{5}\right):\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)+22\frac{3}{55}$;

д) $\left(2\frac{1}{2}\cdot3{,}2-4{,}25\right):\left(3{,}75:0{,}4-7\frac{1}{2}\right)$.

257. Израчунај вредност следећих израза:

а) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; б) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$;

д) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$.

258. Израчунај вредност израза:

а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{4}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(3{,}5-2{,}25\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{24}\right):\frac{1}{7}$;

в) $\left(3\frac{1}{3}\cdot1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}\right):\left(\frac{62}{75}-0{,}16\right)$.

259. Колико пута је израз:

а) $3\frac{3}{4}:7\frac{1}{2}-5{,}25:10\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:2$ већи од израза

$\left(2\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11}-1:\frac{2}{3}\right):1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:2$?

б) $\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot3$ већи од израза

$\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}$?

260. Израчунај:

а) $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{21}}$ б) $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}$ в) $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{25}{81}}$

г) $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{49}}$; д) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{2\frac{2}{4}}$; ђ) $\dfrac{2\frac{1}{3}}{3\frac{5}{6}}$;

е) $\dfrac{3:(0{,}3-0{,}2)}{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{12}+\frac{19}{12}\right)}$; ж) $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+\frac{8}{21}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$.

261. Израчунај вредност израза:

а) $\dfrac{3\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}}$ б) $\dfrac{2\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{17}}{1\frac{19}{81}\cdot\frac{40}{51}}$ в) $\dfrac{3\frac{2}{3}\cdot1\frac{1}{2}}{2\frac{4}{9}:\frac{5}{3}}$

г) $\dfrac{\left(5\frac{1}{4}\cdot4\frac{1}{2}\right):31\frac{1}{2}}{2\frac{4}{9}:\frac{5}{3}}$

262. Израчунај вредност израза:

а) $\dfrac{\left(\left(12\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{4}{5}\right):\frac{1}{15}-6:\frac{1}{28}\right)\cdot\frac{4}{11}}{\left(5\cdot2\frac{2}{5}-8\frac{3}{22}\right):42\frac{1}{2}}$

б) $\dfrac{1-\frac{2}{5}\cdot1\frac{1}{4}+3:1\frac{1}{5}}{\left(\frac{13}{5}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot1\frac{3}{7}}-\dfrac{1+\dfrac{4}{2-\frac{2}{5}}}{7-\dfrac{2}{2-\frac{2}{3}}}$

263. Израчунај вредност израза:

а) $\dfrac{\left(15\frac{3}{4}-6{,}125:1\frac{3}{4}\right):\left(1\frac{2}{5}\cdot1\frac{3}{7}+4{,}25\right)}{\left(12{,}1:1\frac{5}{6}-\frac{1}{100}\cdot611\right):\frac{1}{4}}$

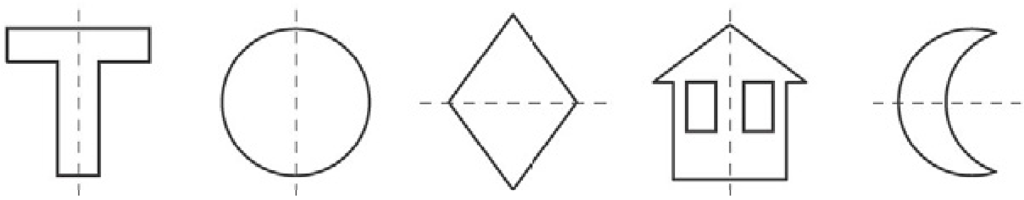
б) $\dfrac{2{,}8+5\frac{1}{2}:\left(3+0{,}2\cdot2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}}{\left(\left(5\frac{3}{7}\cdot4\frac{1}{5}\right):8+2{,}45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-1{,}25}:2\frac{4}{5}$

7 ОСНА СИМЕТРИЈА

7.1. Осна симетрија

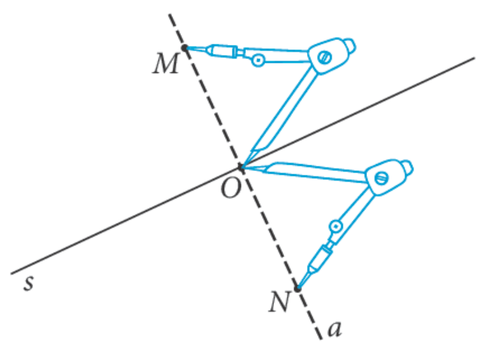
Ако на листу папира нацртамо воденим бојицама фигуру као на слици, а затим, пре него што се цртеж осуши, пресавијемо папир дуж праве s и преклопимо га са други делом папира, као отисак појавиће се друга половина срца.

Постоји велики број фигура које имају сличан изглед, тј. како се то каже, које су **симетричне** у односу на извесну праву. Неке од њих приказане су на сликама.



Нека је M произвољна тачка и s права. Нацртамо праву n нормалну на праву s, тако да садржи тачку M. Права n сече праву s у тачки O. Затим, на правој n одредимо тачку N, тако да дужи MO и NO буду једнаке ($N \neq M$).

За овакве тачке M и N кажемо да су **осносиметричне** у односу на праву s. Саму праву s називамо **осом симетрије**.



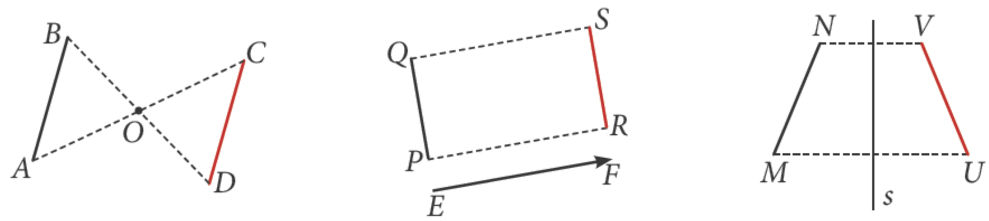
Пресликавање које свакој тачки M придружује њој симетричну тачку N у односу на дату праву s назива се **осна симетрија** у односу на праву s.

Особине осносиметричних тачака су:

- Тачка N припада нормали n из тачке M на правој s;
- Тачке M и N су са разних страна праве s;
- Тачке M и N су једнако удаљене од праве s.

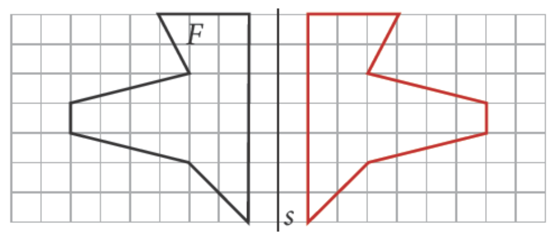
Свака тачка која припада правој s осносиметрична је самој себи, тј. пресликава се у себе саму.

Осна симетрија има једно значајно својство које смо већ уочили код централне симетрије и транслације. Наиме, сва ова пресликавања пресликавају дату дуж у подударну дуж.



На слици видимо да се дуж AB пресликава у дуж CD централном симетријом у односу на тачку O, дуж PQ се пресликава у дуж RS транслацијом за вектор $\overrightarrow{EF}$ и дуж MN се пресликава у дуж UV осном симетријом у односу на праву s.

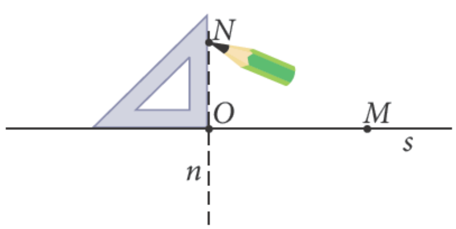
ПРИМЕР 1. Фигура симетрична фигури F у односу на праву s у квадратној мрежи приказана је на слици.

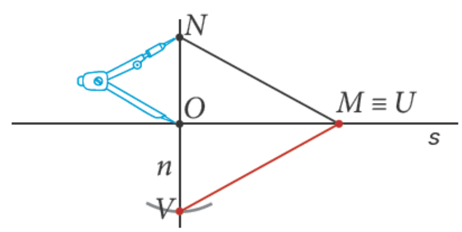


ПРИМЕР 2. Дата је права s и тачке M и N, $M \in s$, $N \notin s$. Нацртај дуж UV осносиметричну дужи MN у односу на праву s.

РЕШЕЊЕ

Помоћу троугаоног лењира нацртамо праву n, $N \in n$, $n \perp s$. Нека је $n \cap s = \{O\}$. Шестаром, чији је врх у тачки O, пренесемо дуж ON тако да добијемо тачку V, $V \in n$. Слика тачке M биће сама та тачка.





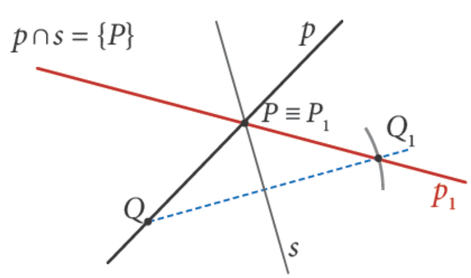
Тачке које припадају оси симетрије, осном симетријом се пресликавају у себе.

ПРИМЕР 3. Дате су права p и права s. Конструисати праву осносиметричну правој p у односу на праву, тј. осу s.

РЕШЕЊЕ Размотрићемо три случаја узајамних положаја ове две праве:

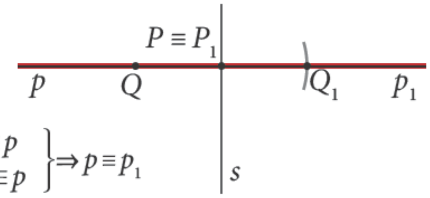
1. **Права p сече осу s у тачки P**

Једну тачку Q праве p ћемо осносиметрично пресликати у односу на осу. Њена слика је тачка Q_1 и она са тачком P одређује праву p_1, која је осносиметрична слика праве p.



2. **Права *p* је нормална на осу *s*.**

Слика праве p поклапа се са самом правом p. То доказујемо одређивањем произвољне тачке Q праве p, која се пресликава у тачку Q_1, која такође припада истој правој, само са разних страна осе s.

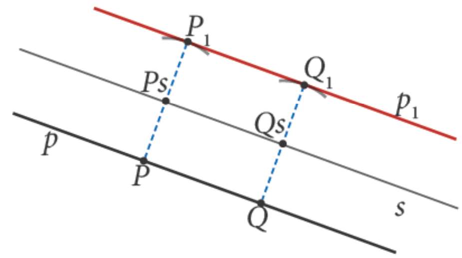


$$\left.\begin{array}{l} Q \in p \\ Q_1 \in p \end{array}\right\} \Rightarrow p \equiv p_1$$

3. **Права *p* је паралелна оси *s*.**

Пошто права p и оса s немају заједничких тачака, одредићемо две произвољне тачке P и Q праве p и пресликати их осном симетријом у односу на s.

Тачка P се пресликава у тачку P_1 а тачка Q у тачку Q_1. Обе новодобијене тачке P_1 и Q_1 одређују праву p_1, која је такође паралелна оси s.



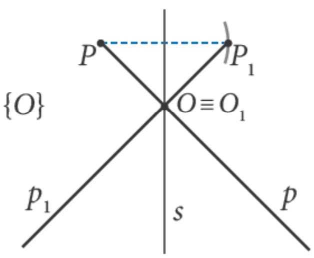
ПРИМЕР 4. Дата је полуправа Pp и права s. Конструисати полуправу осносиметричну полуправој Pp у односу на праву – осу s.

РЕШЕЊЕ Размотрићемо међусобне положаје полуправе Pp и праве s:

1. **Полуправа *Pp* сече осу *s***

Пошто полуправа сече осу, нека је њихова пресечна тачка, тачка O. Она припада оси, па се пресликава у саму себе, тј. $O \equiv O_1$. Почетна тачка P полуправе пресликава се у тачку P_1. Тачке P_1 и $O \equiv O_1$ одређују полуправу Pp_1, тј. слику полуправе Pp у односу на осу s.

$$Pp \cap s = \{O\}$$

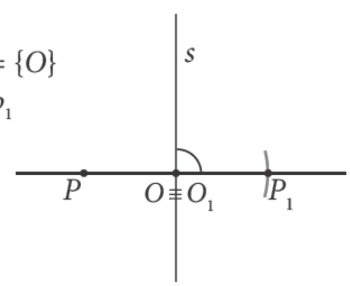


2. **Полуправа *Pp* је нормална на осу *s***

Полуправа Pp сече осу s у тачки O. Тачка O припада оси s, па се пресликава у саму себе, тј. $O \equiv O_1$. Почетна тачка P полуправе Pp пресликава се у односу на осу s у тачку P_1. Полуправа Pp је нормална на осу s, па ће тачка P_1 припадати полуправој Pp, али са друге стране осе s.

Осносиметрична слика полуправе Pp је полуправа P_1p_1 са почетком у тачки P_1, која се поклапа са полуправом Pp у тачкама између P и P_1.

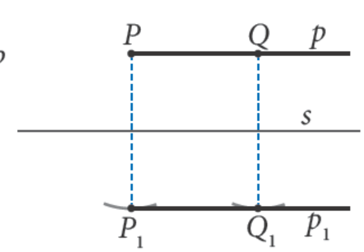
$$Pp \perp s$$
$$Pp \cap s = \{O\}$$
$$Pp \equiv P_1p_1$$



3. **Полуправа *Pp* је паралелна оси *s***

Почетну тачку P полуправе и једну њену произвољну тачку Q пресликавамо осносиметрично у односу на праву s. Њихове слике P_1 и Q_1 одређују полуправу P_1p_1, која је паралелна и полуправој Pp и оси s.

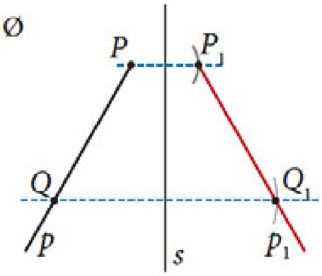
$$P, Q \in p$$
$$P_1, Q_1 \in p$$
$$p \parallel s \parallel p_1$$



4. **Полуправа *Pp* нема заједничких тачака са осом *s***

Пошто је пресек полуправе Pp са осом празан скуп, поред почетне тачке P пресликаћемо и неку њену произвољну тачку Q у односу на осу и добити тачке P_1 и Q_1 које одређују полуправу P_1p_1 која са осом такође нема заједничких тачака.

$Pp \cap s = \varnothing$
$Q \in Pp$



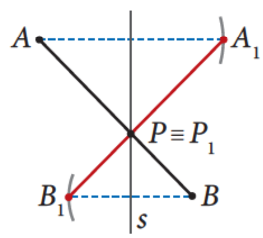
ПРИМЕР 5. Дата је дуж AB и права s. Конструисати дуж A_1B_1 осносиметричну дужи AB у односу на праву – осу s.

РЕШЕЊЕ Размотрићемо 4 случаја међусобног положаја дужи и праве:

1. **Дуж *AB* сече осу *s***

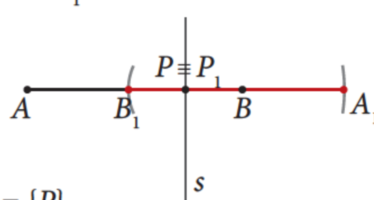
Нека је пресек дужи и осе тачка P. Пошто припада оси, тачка P се пресликава у саму себе. Крајње тачке дужи A и B пресликавају се у односу на осу у тачке A_1 и B_1. Оне ће одређивати дуж A_1B_1 – осносиметричну слику дужи AB.

$AB \cap s = \{P\}$



2. **Дуж *AB* је нормална на осу *s* и сече је у тачки *P***

Тачке A и B налазе се са разних страна осе s и пресликавају се у тачке A_1 и B_1 које ће такође бити са разних страна осе. Оне одређују дуж A_1B_1 која, као и дуж AB, припада правој нормалној на осу. Дужи AB и A_1B_1 поклапају се у тачкама између B и B_1.

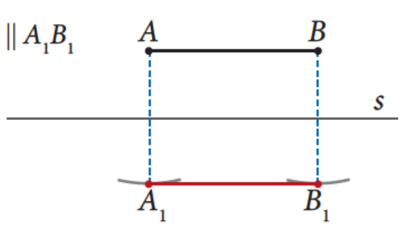


$Pp \perp s$
$AB \cap s = \{P\}$

3. **Дуж AB је паралелна оси *s***

Крајње тачке дужи AB пресликавамо осном симетријом у односу на осу у тачке A_1 и B_1 које одређују дуж A_1B_1. Како је дуж AB паралелна оси s, то ће и осносиметрична дуж A_1B_1 бити њој паралелна, а такође ће и обе дужи међусобно бити паралелне.

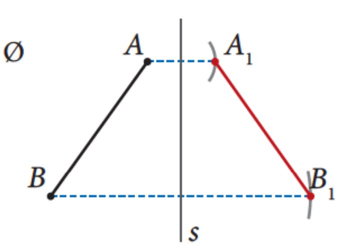
$AB \parallel s \parallel A_1B_1$



4. **Дуж *AB* нема заједничких тачака са осом *s***

Крајње тачке дужи AB пресликамо у осносиметричне тачке A_1 и B_1 које одређују дуж A_1B_1, тј. слику дужи AB у односу на осу. И ова нова дуж неће имати заједничких тачака са осом.

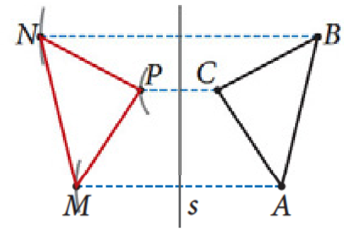
$AB \cap s = \varnothing$



ПРИМЕР 6. Дат је троугао ABC и права s. Нацртај троугао MNP симетричан троуглу ABC у односу на праву s.

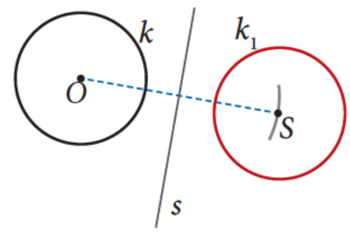
РЕШЕЊЕ

Тражени троугао добијамо тако што темена A, B, C датог троугла ABC пресликамо редом у тачке M, N и P.



ПРИМЕР 7. Осном симетријом пресликај кружницу $k(O, r)$ у односу на дату праву s.

РЕШЕЊЕ Најпре одредимо тачку S осносиметричну тачки O у односу на праву s, а затим конструишемо кружницу $k_1(S, r)$.



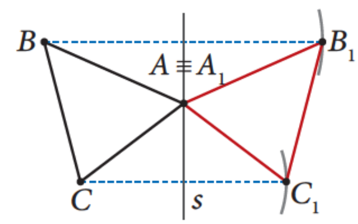
У претходна два примера разматрали смо случајеве када троугао и кружница немају заједничких тачака са осом. Троугао и кружница могу заузимати и друге положаје у односу на осу s, што важи и за остале фигуре у равни. Размотрићемо још неколико њихових међусобних положаја у односу на осу симетрије.

ПРИМЕР 8. Пресликај троугао ABC осном симетријом у односу на праву s.

РЕШЕЊЕ

а) **Оса s садржи једно теме троугла**

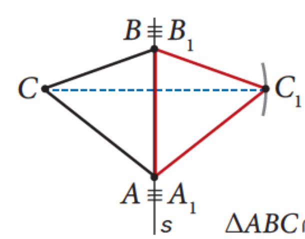
Нека је пресек троугла ABC и осе тачка A, која је теме троугла. Пошто припада оси, тачка A се пресликава у саму себе. Осносиметрично пресликавамо темена B и C у тачке B_1 и C_1. Добили смо темена осносиметричног троугла AB_1C_1, који је слика задатог троугла ABC.



$\Delta ABC \cap s = \{A\}$

б) **Оса s садржи једну страницу троугла**

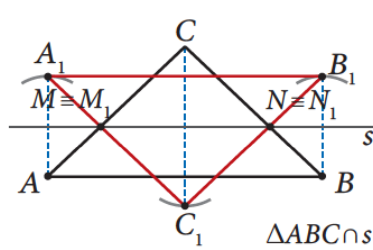
Нека страница AB припада оси s. Тада се темена A и B пресликавају у саме себе. Тачка C се осносиметрично пресликава у тачку C_1. Добићемо осносиметричан троугао ABC_1 датом троуглу ABC.



$\Delta ABC \cap s = AB$

в) **Оса s сече две странице троугла ABC**

У овом случају пресликаћемо сва три темена троугла у односу на осу и добити тачке A_1, B_1 и C_1 које ће бити темена осносиметричног троугла $A_1B_1C_1$.



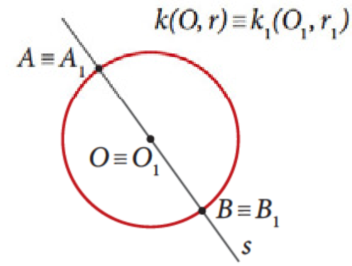
$\Delta ABC \cap s = MN$

ПРИМЕР 9. Пресликај кружницу $k(O, r)$ осном симетријом у односу на праву s.

РЕШЕЊЕ Размотрићемо три међусобна положаја кружнице и осе симетрије:

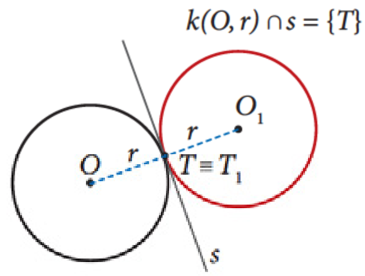
а) **Оса s садржи пречник кружнице**

Центар O се пресликава у самог себе као и пресечне тачке A и B осе и кружнице. Заправо, свака тачка кружнице се осносиметрично пресликава у себи дијаметрално супротну тачку на кружници, тј. кружница се пресликава у саму себе.



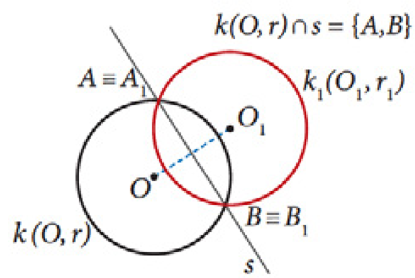
б) **Кружница и оса имају једну заједничку тачку**

Нека кружница $k(O, r)$ и оса s имају за пресек тачку T. Тада је оса заправо тангента кружнице и тачка T се пресликава у себе саму. Центар O се осном симетријом пресликава у тачку O_1, која ће бити центар осносиметричне кружнице $k_1(O_1, r)$.



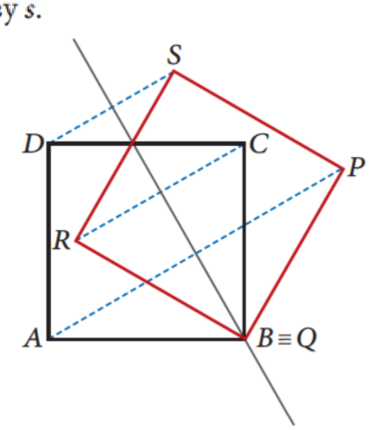
в) **Оса s сече кружницу у двема тачкама A и B**

Пошто тачке A и B припадају оси, оне се пресликавају у саме себе. Центар O се осном симетријом пресликава у тачку O_1, која ће бити центар осносиметричне кружнице $k_1(O_1, r)$ истог полупречника као и задата кружница. Ове две кружнице се секу у тачкама A и B.



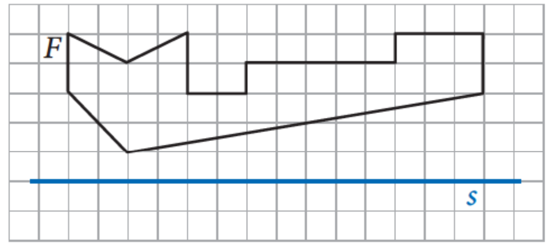
ПРИМЕР 10. На слици су дати квадрат $ABCD$ и права s. Нацртати квадрат $PQRS$ симетричан датом квадрату у односу на праву s.

РЕШЕЊЕ За сва четири темена A, B, C, D датог квадрата одредимо симетричне тачке. Добијене тачке P, Q, R, S $(Q \equiv B)$ су темена траженог квадрата.



ЗАДАЦИ

1. Пресликај у свеску са квадратном мрежом фигуру F и нацртај њој симетричну фигуру у односу на праву s.



2. Нацртај праву s и две дужи AB и CD, које су обе нормалне на праву s, тако да је дуж AB не сече, а дуж CD сече. Затим нацртај основсиметричне слике ових дужи у односу на праву s.

3. Дате су праве p и s, $p||s$. Нацртај праву q која је осносиметрична правој p у односу на праву s, тако што ћеш најпре одредити тачке E и F осносиметричне тачкама M и N ($M \in p$, $N \in p$) у односу на праву s.

4. Нацртај правоугаоник $ABCD$ и праву s, а затим симетричну слику правоугаоника $ABCD$ у односу на праву s.

5. Нацртај угао pOq чије теме O припада датој правој s и пресликај угао pOq осном симетријом у односу на праву s.

6. У свесци са квадратном мрежом нацртај праву s, један троугао, један квадрат и једну кружницу, а затим њима симетричне фигуре у односу на праву s.

7. Нацртај произвољне векторе $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ и праву s, а затим векторе осносиметричне нацртаним векторима у односу на праву s.

8. Нацртај две праве p и q које се секу у тачки M и произвољну праву s. Одреди затим тачку симетричну тачки M у односу на праву s, као и праве осносиметричне датим правама p и q.

9. Нацртај три праве a, b и s тако да је $a||b$ и $a \perp s$. Шта ће бити осносиметрична слика праве b у односу на праву s?

10. Нацртај две дужи AB и CD које су паралелне и праву s. Нацртај затим осносиметричне слике тих дужи у односу на праву s. Да ли се слике дужи AB и CD секу или су паралелне?

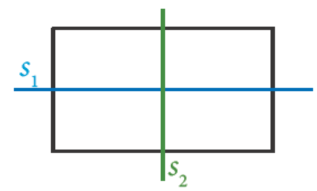
Све примере у лекцији уради користећи алат на сајту:
www.geogebra.org

7.2. Осносиметричне фигуре

Подсетимо се да се за фигуру F каже да је осносиметрична, ако постоји права s таква да се осном симетријом у односу на праву s фигура F пресликава у саму себе. Права s се назива осом симетрије фигуре F.

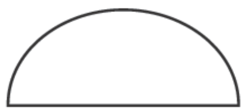
ПРИМЕР 1. Да ли је правоугаоник осносиметрична фигура?

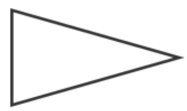
РЕШЕЊЕ Јесте, сваки правоугаоник има две осе симетрије.



ПРИМЕР 2. Које од фигура на слици су осносиметричне?


1)


2)


3)


4)

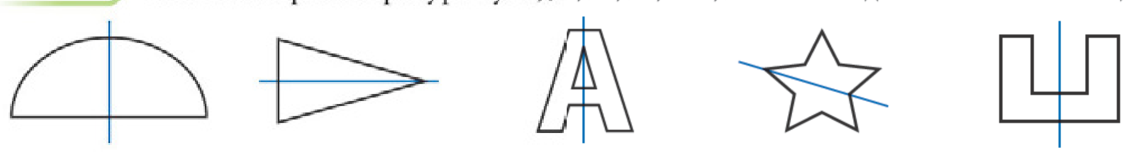

5)


6)


7)


8)

РЕШЕЊЕ Осносиметричне фигуре су: 2), 3), 5), 7) и 8), што се види на сликама испод.



Реченице које се читају исто слева на десно и здесна на лево зову се палиндроми – осносиметричне реченице.
На пример:

Ана воли Милована.
Они воле бело вино.
Сир има мирис.

- Смисли и напиши два палиндрома.

____

____

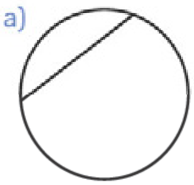
Реши **тест број 44** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

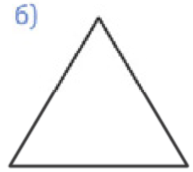
ЗАДАЦИ

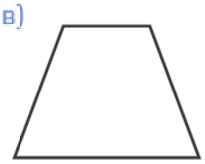
11. Која велика штампана слова наше азбуке су осносиметрична?

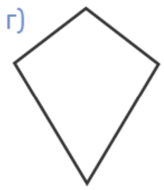
12. Колико оса симетрије има: а) квадрат; б) круг?

13. Колико оса симетрије имају фигуре на слици?

а) 

б) 

в) 

г) 

14. Нацртај један троугао који је осносиметричан и један троугао који није осносиметричан.

15. Нацртај фигуру која се састоји од два концентрична круга (то су кругови који имају заједнички центар). Колико ова фигура има оса симетрије?

16. Да ли је права осносиметрична фигура?

17. Колико оса симетрије има дата дуж AB? Нацртај их.

18. Колико оса симетрије има кошаркашки терен?

19. Да ли је:

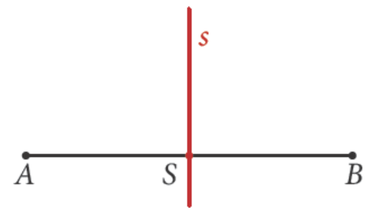
а) застава Републике Србије (са грбом) осносиметрична?

б) застава Србије (без грба) осносиметрична?

20. Нацртај дуж OS дужине 6 cm и два круга $K_1(O, 3\text{ cm})$ и $K_2(S, 3\text{ cm})$. Да ли је добијена фигура осносиметрична и уколико јесте, колико има оса симетрије?

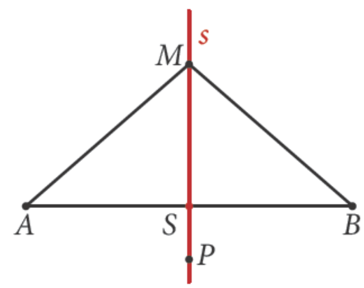
7.3. Симетрала дужи и конструкција нормале

Нека је тачка S средиште дате дужи AB, тј. тачка те дужи таква да су дужи AS и SB једнаке. Посматрајмо сада праву s која садржи тачку S и нормална је на дуж AB. Ова права је уједно и оса симетрије дужи AB, јер се тачка A пресликава у тачку B осном симетријом у односу на праву s. Та права s се назива **симетрала дужи** AB.



Симетрала дужи има једно важно својство. Наиме, нека је М произвољна тачка симетрале дужи AB, тада је $MA = MB$.

Важи и обрнуто, ако је P било која тачка једнако удаљена од крајева неке дужи, тада тачка P припада симетрали те дужи.



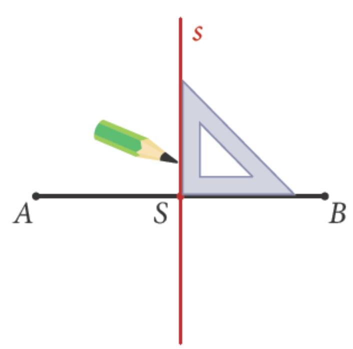
Свака тачка симетрале дужи подједнако је удаљена од крајева те дужи.

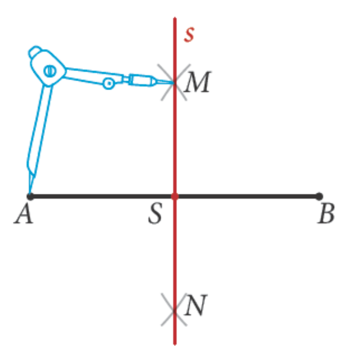
ПРИМЕР 1. Дата је дуж $AB = 4\,\text{cm}$. Уз помоћ троугаоног лењира нацртај симетралу дужи AB.

РЕШЕЊЕ Најпре лењиром измеримо 2 cm од тачке A и тако на дужи AB одредимо тачку S, а затим, користећи прав угао троугаоног лењира, нацртамо праву s.

Конструкција симетрале дужи

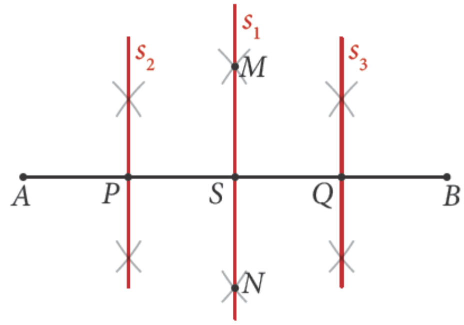
Симетрала дате дужи AB може се нацртати и без мерења и коришћења правог угла троугаоног лењира. Конструисаћемо две једнаке кружнице (довољни су само њихови делови) $k_1(A, r)$, $k_2(B, r)$, тако да се оне секу у тачкама M и N. Тачке M и N су на једнакој удаљености од тачака A и B, па припадају симетрали s дужи AB.





ПРИМЕР 2. Дату дуж AB поделити на четири једнака дела.

РЕШЕЊЕ Најпре ћемо конструисати кружнице $k_1(A, r)$ и $k_2(B, r)$ које се секу у тачкама M и N. Права s која садржи тачке M и N је симетрала дужи AB и сече ту дуж у тачки S, која је њено средиште. На исти начин конструишемо симетрале дужи AS и SB. Оне секу дуж AB редом у тачкама P и Q. Како је $AP = PS = SQ = QB$, тачке P, S и Q деле дуж AB на четири једнака дела.



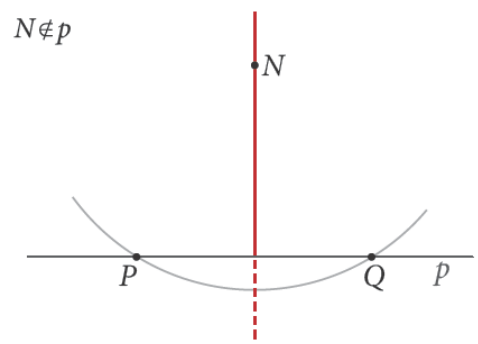
Конструкција нормале на праву из тачке ван праве

Нека је дата права p и тачка N ван те праве. Показаћемо сада како се коришћењем шестара и лењира може конструисати нормала из тачке N на праву p.

Конструишемо најпре кружницу $k(N, r)$, тако да је њен полупречник r већи од одстојања тачке N од праве p, тј. да кружница k сече праву p у двема тачкама P и Q.

Да не бисмо оптерећивали слику великим бројем линија, нацртаћемо само неопходне делове ове кружнице.

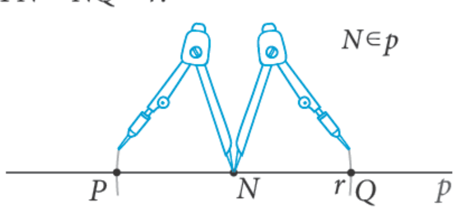
На већ описан начин конструишемо симетралу дужи PQ. Та права садржи тачку N и нормална је на правој p.

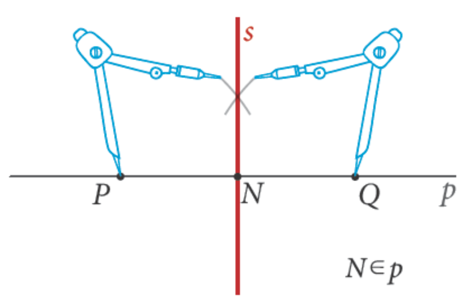


Конструкција нормале у тачки која припада правој

ПРИМЕР 3. Нека тачка N припада датој правој p. Конструисати, помоћу лењира и шестара, нормалу на праву p у тачки N.

РЕШЕЊЕ Конструишемо прво кружницу $k(N, r)$. Она сече дату праву у тачкама P и Q. Симетрала дужи PQ је уједно и тражена нормала, јер садржи тачку N због $PN = NQ = r$.

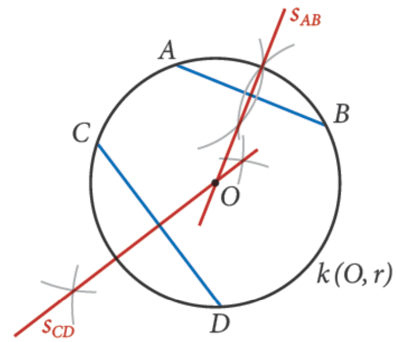




ПРИМЕР 4. Одреди центар кружнице који је избрисан случајно.

РЕШЕЊЕ

На кружници без центра, нацртаћемо две њене тетиве AB и CD и применити особину симетрале дужи. Симетрала тетиве AB ће се сећи са симетралом тетиве CD и та пресечна тачка O ће бити подједнако удаљена како од тачака A и B, тако и од тачака C и D јер припада обема симетралама. Дужи OA, OB, OC и OD су једнаке по дужини и представљају полупречнике те кружнице, а тачка O је њен центар.



Реши **тест број 45** на електронској платформи еЗбирка:
http://www.ezbirka.math.rs

Све примере у лекцији уради користећи алат на сајту:
www.geogebra.org

ЗАДАЦИ

21. Дате су дужи AB и BC такве да тачке A, B и C не припадају једној правој. Конструиши симетрале датих дужи и означи пресечну тачку тих симетрала са O. Да ли важи $OA = OB = OC$?

22. Дата је кружница $k(O, r)$ и на њој тачка T. Применом лењира и шестара конструиши тангенту кружнице у тачки T.

23. Дату дуж AB применом лењира и шестара подели на осам једнаких делова.

24. Нацртај две праве a и b које се секу у тачки A и праву n. Затим, конструиши праву која садржи тачку A и нормална је на правој n.

25. На датој правој p одреди две тачке A и B и конструиши праве m и n нормалне на p тако да $A \in m$ и $B \in n$. Да ли се праве m и n секу или су паралелне?

26. Конструиши симетрале странице: а) AB датог квадрата $ABCD$; б) PQ датог правоугаоника $PQRS$.

27. Нацртај кружницу полупречника 2 cm и произвољну праву p, а затим применом лењира и шестара конструиши праву, која садржи центар кружнице и нормална је на праву p.

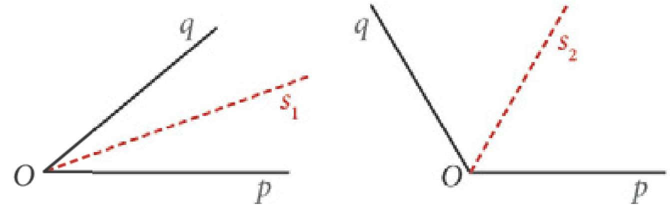
28. Нацртај правоугаоник $ABCD$, а затим конструиши праве p и q које садрже тачку B, односно D и нормалне су на дуж AC.

29. Нацртај произвољни троугао ABC и изабери неку тачку M ван троугла. Затим, конструиши праве које садрже тачку M и нормалне су на праве одређене страницама троугла ABC.

30.* Нацртај дуж AB и одреди једну тачку P ван те дужи. Конструиши затим, праву која садржи тачку P и нормална је на симетралу дужи AB. Какав је однос дужи AB и те нормале?

7.4. Симетрала угла

Угао је осносиметрична фигура. На сликама су приказане осе симетрије једног оштрог и једног тупог угла.

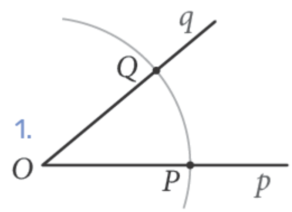


Осу симетрије угла pOq називамо **симетралом** тог угла. Уочимо да симетрала дели угао на два једнака дела. Каже се и да полови тај угао.

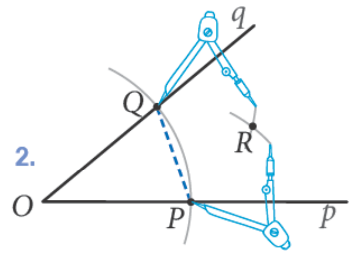
Конструкција симетрале угла

Показаћемо како се конструише симетрала угла:

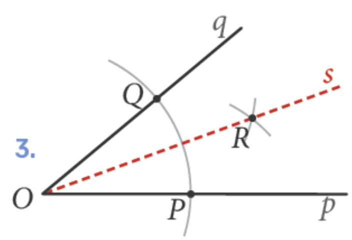
1. Нека је дат угао pOq. Конструишемо најпре кружницу $k(O, r)$. Она сече краке угла Op и Oq редом у тачкама P и Q.



2. Конструишемо сада кружнице $k_1(P, r_1)$ и $k_2(Q, r_1)$ које се секу у тачки R. Да би се секле у тачки R, полупречник кружница r_1 мора да буде већи од половине дужине тетиве PQ.



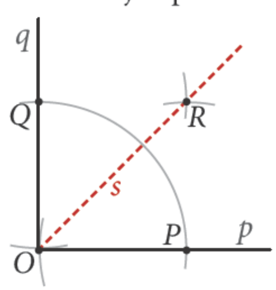
3. Права s одређена тачкама O и R је симетрала угла pOq. Наиме, полуправе Op и Oq се пресликавају једна у другу осном симетријом у односу на осу s.



На овај начин, применом лењира и шестара, конструисали смо симетралу угла pOq.

ПРИМЕР 1. Дат је прав угао pOq. Конструиши његову симетралу.

РЕШЕЊЕ Решење је приказано на слици.

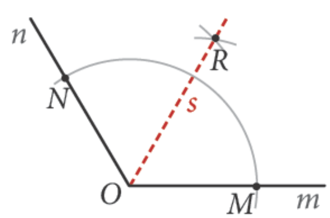


Примере уради користећи алат на сајту:

www.geogebra.org

ПРИМЕР 2. Дати туп угао mOn на слици подели на два једнака угла.

РЕШЕЊЕ



На већ описан начин конструишемо симетралу угла mOn. Та симетрала полови дати угао, тј. дели га на два једнака угла.

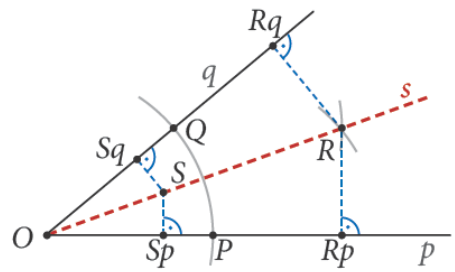
Такође, и симетрала угла има једну важну особину:

Свака тачка симетрале угла је подједнако удаљена од кракова тог угла.

ПРИМЕР 3. Конструиши симетралу угла pOq и покажи да је произвољна тачка R на њој подједнако удаљена од кракова тог угла.

РЕШЕЊЕ За произвољну тачку R на симетрали, њена нормална растојања од кракова Op и Oq су једнаке дужине. RRp је нормално на Op, где тачка Rp припада краку Op. Такође, RRq је нормално на Oq, где тачка Rq припада краку Oq, и биће $RRp = RRq$. То исто можемо да закључимо и за било коју другу тачку са симетрале, на пример за тачку S.

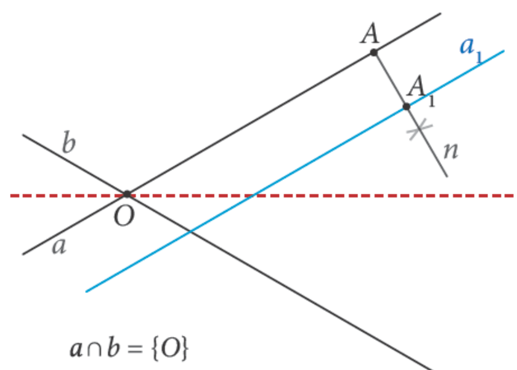
$R \in s$	$S \in s$
$RR_p \perp Op$	$SS_p \perp Op$
$RR_q \perp Oq$	$SS_q \perp Oq$
$RR_p = RR_q$	$SS_p = SS_q$



ПРИМЕР 4. Нацртати праве a и b које се секу, па конструисати круг полупречника 2 cm, тако да су праве a и b његове тангенте.

РЕШЕЊЕ

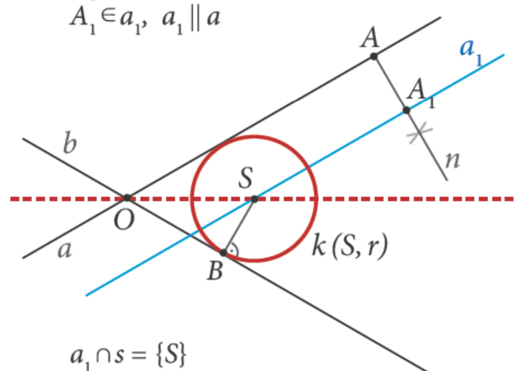
Конструишимо симетралу угла aOb, где је тачка O пресек правих a и b и искористимо особину симетрале угла да је свака њена тачка подједнако удаљена од кракова угла.



$a \cap b = \{O\}$
$AA_1 = 2\,\text{cm}$
$A_1 \in n,\ \ n \perp Oa$
$A_1 \in a_1,\ \ a_1 \parallel a$

Пошто растојање од кракова угла мора да буде 2 cm, у произвољној тачки A на краку Oa конструишемо нормалу на тај крак. На нормали уочавамо тачку A_1 која је од тачке A удаљена тачно 2 cm и кроз њу конструишемо праву a_1, која је паралелна краку Oa.

Права a_1 сече симетралу угла s у тачки S чије нормално растојање од крака Oa мора, такође, бити 2 cm. Према особини симетрале угла исто растојање мора бити и до крака Ob. Зато је тачка S центар круга полупречника 2 cm који додирује краке угла, тј. краци угла су тангенте тог круга.



$a_1 \cap s = \{S\}$
$SB = 2\,\text{cm} = r$

Реши **тест број 46** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

ЗАДАЦИ

31. Конструиши симетралу датог опруженог угла.

32. Нацртај три праве p, q и r тако да се праве p и q секу у тачки A, а праве q и r у тачки B, а затим конструиши симетрале углова pAq и qBr.

33. Нацртај два упоредна угла, а затим њихове симетрале.

34. Дати угао pOq подели помоћу лењира и шестара на четири једнака угла.

35. Конструиши симетрале углова датог:

а) квадрата $ABCD$; б) правоугаоника $PQRS$.

36. Помоћу угломера нацртај угао од 110°, а затим га помоћу лењира и шестара подели на два једнака дела.

37. Нацртај један прав угао pOq и одреди праву r, тако да угао pOr буде једнак $\frac{3}{4}$ угла pOq.

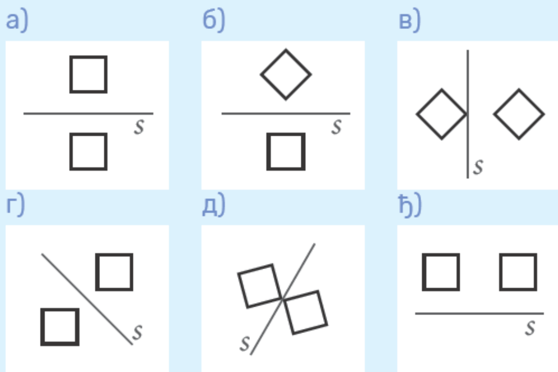
38. Нацртај унакрсне углове и конструиши њихове симетрале.

39. Нацртај произвољан угао pOq и на краку Op одреди произвољну тачку M. Конструиши затим праву која садржи тачку M и нормална је на симетралу угла pOq.

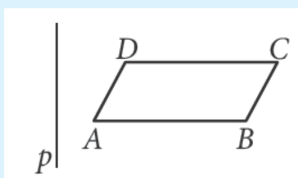
40. Нацртај један троугао ABC и симетрале сва три његова угла.

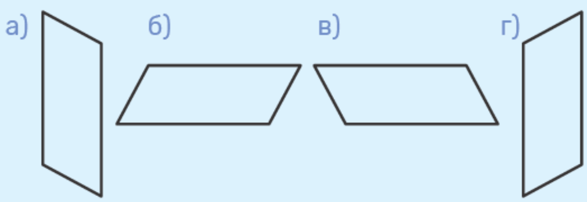
РАЗНИ ЗАДАЦИ

41. На којој од слика су приказани осносиметрични квадрати у односу на праву *s*?

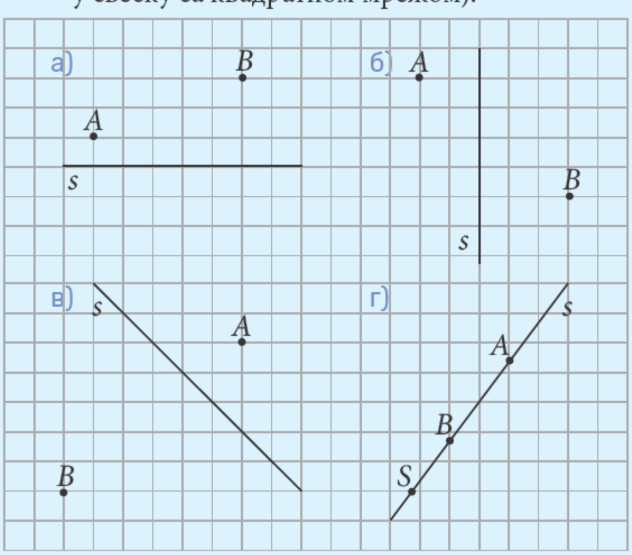


42. На којој од слика а), б), в) или г) је приказан паралелограм симетричан паралелограму *ABCD* у односу на праву *p*?

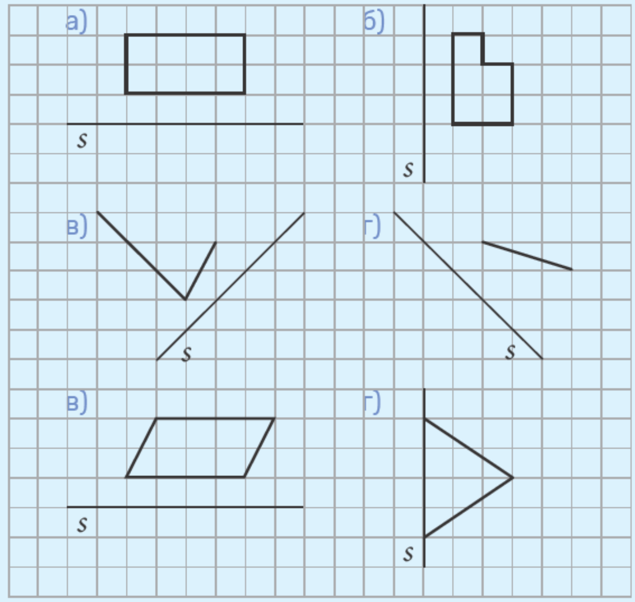




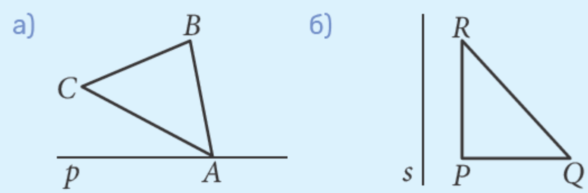
43. Придружи тачкама *A* и *B* симетричне тачке у односу на праву *s* (слике претходно прецртај у свеску са квадратном мрежом).



44. Дате слике прецртај у своју свеску са квадратном мрежом и нацртај симетричне фигуре у односу на осу симетрије *s*.



45. Нацртај у свесци један троугао и једну праву као на сликама (а) и (б), а затим осном симетријом пресликај троугао *ABC* у односу на праву *p* и троугао *PQR* у односу на праву *s*.



46. Користећи квадратну мрежу, нацртај произвољну угаону линију *pOq*, а затим је пресликај осносиметрично у односу на неку праву *s* такву да је $s \| Op$.

47. Нацртај произвољни троугао *ABC* и праву *p* паралелну страници *BC*, тако да сече странице *AB* и *AC*. Затим, осном симетријом у односу на праву *p* пресликај троугао *ABC*.

48. Нацртај правоугаоник *ABCD* и његову симетричну слику у односу на праву *AC*.

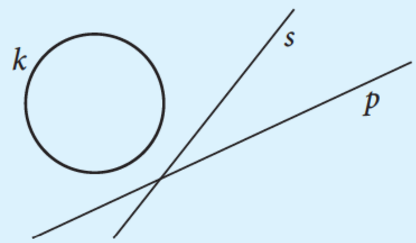
49. Нацртај паралелограм *ABCD* и његову симетричну слику у односу на праву *BD*.

50. Конструиши правоугаоник осносиметричан правоугаонику $ABCD$ у односу на неку праву c која садржи теме C.

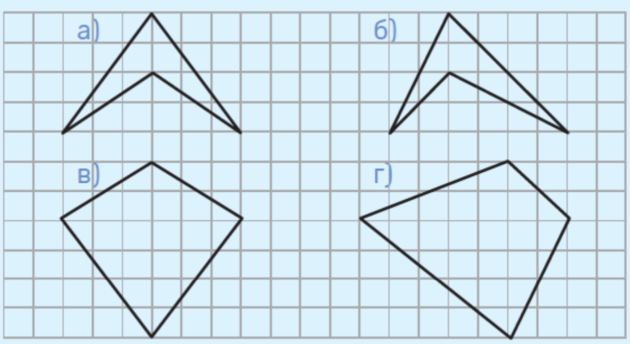
51. Конструиши квадрат осносиметричан датом квадрату $ABCD$ у односу на праву s која сече странице AB и CD.

52. Нацртај кружницу $k(O, 2\,\text{cm})$ и у њеној тачки T тангенту t кружнице k. Затим, конструиши кружницу симетричну кружници k у односу на праву t.

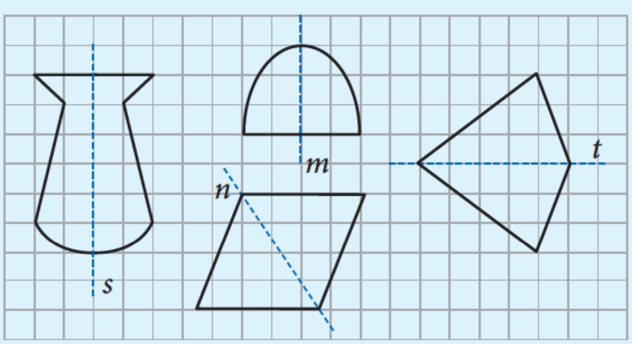
53. Дате су праве s и p и кружница k, као на слици. Одреди на кружници k тачку која је симетрична произвољној тачки праве p у односу на праву s. Колико овај задатак има решења?



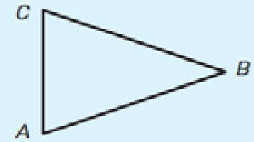
54. Које од фигура приказаних на сликама су осносиметричне?



55. Које фигуре на слици су осносиметричне?



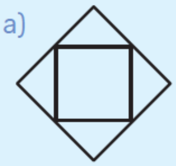
56. Нацртај осу симетрије троугла ABC на слици.

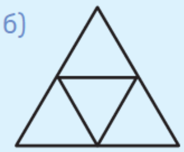


57. Која слова на слици су осносиметрична?

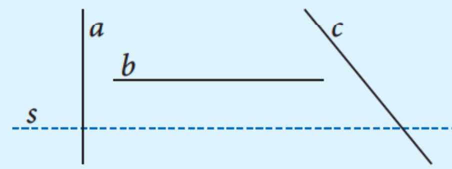
ПЕТ

58. Колико оса симетрије имају фигуре на слици?

а) 

б) 

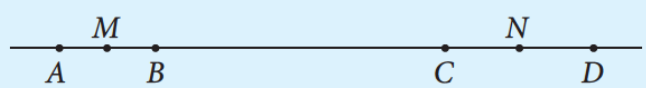
59. Које од правих a, b, c су осносиметричне у односу на осу s?



60. Нацртај круг и једну његову тетиву, која:
а) садржи центар; б) не садржи центар круга.
Нацртај затим осу симетрије ове фигуре.

61. Нацртај дуж $MN = 64$ mm и уз помоћ троугаоног лењира мерењем је подели на два једнака дела и нацртај симетралу те дужи.

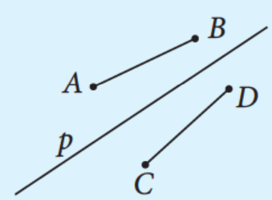
62. На правој p су дате тачке A, B, C, D као на слици.



Ако је $AB = 2\,\text{cm}$, $AC = 8\,\text{cm}$, $BD = 9\,\text{cm}$ одреди дужину дужи MN при чему су тачке M и N редом средишта дужи AB и CD.

63. Нацртај дуж: а) $AB = 5\,\text{cm}$; б) $MN = 9\,\text{cm}$ и конструкцијом је подели на четири једнака дела.

64.* Дужи AB и CD су осносиметричне у односу на праву p.
Помоћу лењира и шестара на правој p одреди тачку E такву да је $AE = BE = CE = DE$.



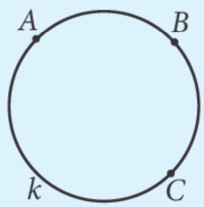
65. Нацртај произвољну дуж AB, а затим коришћењем лењира и шестара одреди тачке C, D и E на тој дужи тако да је:

а) $AC = \frac{1}{2} \cdot AB$; б) $AD = \frac{1}{4} \cdot AB$; в) $AE = \frac{3}{4} \cdot AB$.

66. На датој дужи MN одреди тачке P и Q коришћењем лењира и шестара, тако да је:

а) $MP = \frac{3}{8} \cdot MN$; б) $MQ = \frac{7}{8} \cdot MN$.

67. На кружници k одређене су тачке A, B и C. Користећи лењир и шестар одреди центар кружнице.



68. Нацртај и конструиши симетрале страница једног:

а) троугла;
б) правоугаоника;
в) паралелограма.

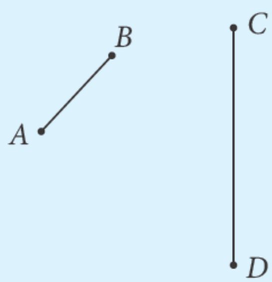
69. Дате су праве p и q које се секу и тачка M која им не припада. Конструиши праве a и b које садрже тачку M и за које важи $a \perp p$, $b \perp q$, а затим измери растојање тачке M од правих p односно q.

70. Нацртај две паралелне праве, а затим помоћу лењира и шестара конструиши растојање између њих.

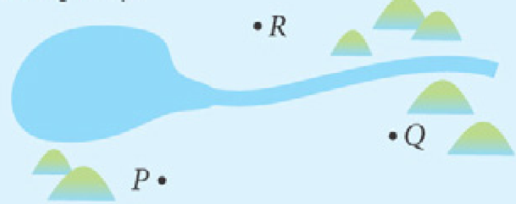
71. Нацртај произвољни троугао ABC, а затим праву која садржи тачку C и нормална је на правој одређеној тачкама A и B.

72.* Дате су тачке A и B и права p. На правој p одреди тачку једнако удаљену од тачака A и B.

73. Нацртај у својој свесци дужи AB и CD као на слици. Затим одреди тачку M такву да је $AM = MB$ и $CM = MD$.



74. Три села P, Q и R су распоређена као на слици. Где би требало саградити школу тако да буде једнако удаљена од сва три села? Покажи то на свом цртежу.



75. Нацртај правоугаоник $ABCD$ и конструиши симетрале његових углова.

76. Коришћењем угломера нацртај задате углове, а затим констуиши њихове симетрале:

а) $40°$;
б) $130°$

77. Конструиши (користећи се лењиром и шестаром) углове од:

а) $90°$; б) $45°$; в) $22°30'$;
г) $67°30'$; д) $135°$; ђ) $112°30'$.

78. Нацртај произвољни троугао ABC, а затим конструиши симетралу странице AB и симетралу угла BAC.

79. Нацртај једну кружницу, њен произвољни централни угао и симетралу тог угла.

80. Дат је оштар угао pOq. Конструиши кружницу k тако да додирује оба крака датог угла. Где се налази центар те кружнице?

81.* Дата је права p и угао aOb. Одреди на правој p тачку једнако удаљену од кракова датог угла.

82.* Нацртај један оштар угао pOq и тачку $M \in Op$. Конструиши затим симетралу угла pOq и кружницу уписану у тај угао која крак Op додирује у тачки M.

8 РАЗЛОМЦИ – *Трећи део*

8.1. Проценти и примена процената

Подсетимо се да помоћу разломака једноставно одређујемо део неког броја. Тако, на пример, трећину броја 30 одређујемо изразом $\frac{1}{3} \cdot 30$, а десетину броја 100 изразом $\frac{1}{10} \cdot 100$. Као што смо учили раније, део целине одређујемо коришћењем операције множења.

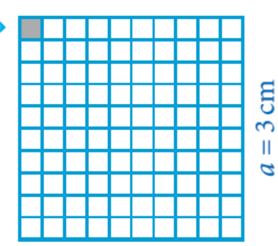
$\frac{1}{3}$ ОД 30 → $\frac{1}{3} \cdot 30$	$\frac{1}{10}$ ОД 100 → $\frac{1}{10} \cdot 100$

Разломци, чији је именилац 100, користе се када тражимо одређен број стотих делова неког броја. На пример:

- стоти део броја 1 200 је $\frac{1}{100} \cdot 1\,200 = 12$,
- 30 стотих делова броја 350 је $\frac{30}{100} \cdot 350 = 105$.

Стоти део неке величине назива се **проценат** и обележава се ознаком **%.**
У свакодневном говору често се користе и називи „посто” и „одсто”, што је скраћено од „по сто” или „део од сто”, јер се говори о стотим деловима неке целине.

На пример, осенчен квадрат на слици чини један проценат квадрата странице $a = 3\,\mathrm{cm}$.



$1\% = \frac{1}{100}$, $2\% = 2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$, $3\% = \frac{3}{100}$, итд, па закључујемо да важи:

$$\boldsymbol{n\% = n \cdot \frac{1}{100} = \frac{n}{100}}$$

$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $100\% = \frac{100}{100} = 1$

1% броја 100 износи: $\frac{1}{100} \cdot 100 = 1$

50% броја 120 износи: $50\% = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$

Разломак се записује у процентном запису тако што се напише колико има стотих делова и допише знак за проценат %.

ПРИМЕР 1. Бројеве изрази у облику процената:

$\frac{9}{100}$; $\frac{71}{100}$; $\frac{4}{1000}$; $\frac{21}{1000}$; $\frac{511}{1000}$; $\frac{750}{1000}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{25}$; 1; 0,6; 3,25; 8,5; $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3}$.

РЕШЕЊЕ

$\frac{9}{100}=9\%$; $\quad\frac{71}{100}=71\%$; $\quad\frac{4^{:10}}{1000_{:10}}=\frac{0{,}4}{100}=0{,}4\%$;

$\frac{21^{:10}}{1000_{:10}}=\frac{2{,}1}{100}=2{,}1\%$; $\quad\frac{513^{:10}}{1000_{:10}}=\frac{51{,}3}{100}=51{,}3\%$; $\quad\frac{750^{:10}}{1000_{:10}}=\frac{75}{100}=75\%$;

$\frac{3^{\cdot 25}}{4_{\cdot 25}}=\frac{75}{100}=75\%$ $\quad\frac{8^{\cdot 4}}{25_{\cdot 4}}=\frac{32}{100}=32\%$ $\quad 1=\frac{1^{\cdot 100}}{1_{\cdot 100}}=\frac{100}{100}=100\%$;

$0{,}6=\frac{6^{\cdot 10}}{10_{\cdot 10}}=\frac{60}{100}=60\%$; $\quad 3{,}25=\frac{325}{100}=325\%$; $\quad 8{,}5=\frac{85}{10}=\frac{850}{100}=850\%$;

$\frac{1^{\cdot 125}}{8_{\cdot 125}}=\frac{125^{:10}}{1000_{:10}}=\frac{12{,}5}{100}=12{,}5\%$; $\quad\frac{2}{3}=2:3=0{,}666...\approx 0{,}67=\frac{67}{100}=67\%$

ПРИМЕР 2. Представи проценте у децималном запису: 1%, 7%, 25%, 158%, 200%, 240%.

РЕШЕЊЕ $1\%=\frac{1}{100}=0{,}01$ $\quad 7\%=\frac{7}{100}=0{,}07$ $\quad 25\%=\frac{25}{100}=0{,}25$

$158\%=\frac{158}{100}=1\frac{58}{100}=1\frac{29}{50}=1{,}58$ $\quad 200\%=\frac{200}{100}=2$

$240\%=\frac{240}{100}=\frac{24}{10}=2\frac{4}{10}=2\frac{2}{5}=2{,}4$

ПРИМЕР 3. Израчунај: а) 50% броја 1 000; б) 25% броја 376; в) 75% броја 12; г) 50% броја 42; д) 30% броја 11; ђ) 74% броја 12,8; е) 215% броја 92.

РЕШЕЊЕ а) 50% броја 1 000 је: $\frac{50}{100}\cdot 1\,000=500$;

б) 25% броја 376 је: $\frac{25}{100}\cdot 376=94$;

в) 75% броја 12 је: $\frac{75}{100}\cdot 12=9$;

г) 50% броја 42 је $\frac{50}{100}\cdot 42=\frac{5}{10}\cdot 42=\frac{1}{2}\cdot 42=21$;

д) 30% броја 11 је $\frac{30}{100}\cdot 11=\frac{3}{10}\cdot 11=\frac{33}{10}=3{,}3$;

ђ) 74% броја 12,8 је: $\frac{74}{100}\cdot 12{,}8=\frac{74^{:2}}{\cancel{100}_{:2}}\cdot\frac{\cancel{128}^{:2}}{10_{:2}}=\frac{37}{\cancel{50}_{:2}}\cdot\frac{\cancel{64}^{:2}}{5}=\frac{37}{25}\cdot\frac{32}{5}=\frac{1\,184}{125}=9{,}472$;

е) 215% броја 92 је: $\frac{215^{:5}}{100_{:5}}\cdot\frac{92}{1}=\frac{43}{\cancel{20}_{:2}}\cdot\frac{\cancel{92}^{:2}}{1}=\frac{43}{10}\cdot\frac{46}{1}=\frac{1\,978}{10}=197{,}8$.

Примена процената

ПРИМЕР 4. У једној школи са 720 ученика, 45% су дечаци. Колико у тој школи има дечака а колико девојчица?

РЕШЕЊЕ Ако све ученике школе посматрамо као једну целину која представља 100%, тада ће број дечака износити 45% броја 720, а број девојчица 100% – 45% = 55% броја 720.

45% од 720 је: $\frac{45}{100}\cdot\frac{720}{1}=\frac{45}{10}\cdot\frac{72}{1}=\frac{9}{2}\cdot\frac{72}{1}=9\cdot 36=324$ дечака

55% од 720 је: $\frac{55}{100}\cdot\frac{720}{1}=\frac{55}{10}\cdot\frac{72}{1}=\frac{11}{2}\cdot\frac{72}{1}=11\cdot 36=396$ девојчица

ПРИМЕР 5. У излогу једне продавнице је написано да свако ко купи два производа, добија попуст од 75% на јефтинији производ. Јована је купила кошуљу за 2 340 динара и мајицу по цени од 780 динара. Колики је добила попуст и колико је укупно платила на каси?

РЕШЕЊЕ Јована је добила попуст од 75% на цену мајице: $\frac{75}{100} \cdot 780 = \frac{3}{4} \cdot 780 = 585$

Платила је 585 динара мање, односно $780 - 585 = 195$ динара.

Тако је Јована на каси укупно платила $2\,340 + 195 = 2\,535$ динара.

ПРИМЕР 6. Жељкова месечна зарада износи 44 500 динара. Пословођа је одлучио да га награди и да му зараду повећа за 10%. Колика ће бити Жељкова нова месечна зарада?

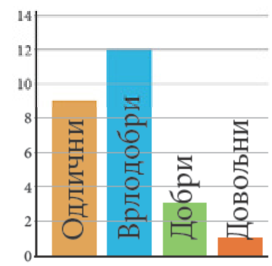
РЕШЕЊЕ 1. начин: Повећање Жељкове месечне зараде је 10% од 44 500 динара.

$$\frac{10}{100} \cdot 44\,500 = 4\,450$$

Његова нова месечна зарада је: $44\,500 + 4\,450 = 48\,950$ динара.

2. начин: Означимо досадашњу зараду са 100%. После повећања од 10%, нова зарада ће износити $100\% + 10\% = 110\%$, а то је:
$\frac{110}{100} \cdot 44\,500 = 1{,}1 \cdot 44\,500 = 48\,950$ динара.

ПРИМЕР 7. На слици је приказан успех једног одељења V разреда на крају школске године. Изразити број одличних, врлодобрих, добрих и довољних ученика у процентима. Недовољних ученика нема.



РЕШЕЊЕ Видимо да у одељењу има $9 + 12 + 3 + 1 = 25$ ученика. Заступљеност ученика по успеху у процентима се израчунава на следећи начин:

- Одличних је деветоро, што је $\frac{9}{25}$ од укупног броја, а када тај разломак проширимо са 4, добићемо $\frac{9 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{36}{100}$, што је 36%.
- Врлодобрих $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100}$, односно 48%.
- Добрих $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100}$, што је 12%.
- Довољан је 1 ученик, дакле $\frac{1}{25} = \frac{1 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{4}{100}$, односно 4%.

ПРИМЕР 8. а) Број 10 је 5% неког броја. Одреди тај број.
б) Број 72 је 5% неког броја. Одреди тај број.

РЕШЕЊЕ

а) 10 је 5% од x

5% од x је: $\frac{5}{100} \cdot x = 10$

$x = 10 : \frac{5}{100}$

$x = \frac{\cancel{10}^{:5}}{1} \cdot \frac{100}{\cancel{5}_{:5}}$

$x = \frac{2}{1} \cdot \frac{100}{1}$

$x = 200$

б) 5% од x је 72

$\frac{5}{100} \cdot x = 72$

$x = 72 : \frac{5}{100}$

$x = \frac{72}{1} \cdot \frac{100}{5}$

$x = \frac{72}{1} \cdot \frac{20}{1}$

$x = 1440$

ПРИМЕР 9. У једном туристичком аутобусу има 5 Грка, 15 Срба и 20 Мађара.

а) Прикажи дате податке о броју туриста у табели.
б) Одреди колико процената туриста сваке националности има у аутобусу.
в) Прикажи кружним дијаграмом проценат туриста сваке националности у аутобусу.

РЕШЕЊЕ

а)

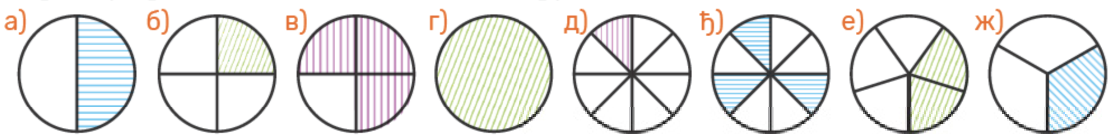
Националност	Грци	Срби	Мађари
Број туриста	5	15	20

б) У аутобусу има укупно $5 + 15 + 20 = 40$ туриста.
Цео круг дијаграма одговара укупном броју туриста.
Грка има $\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$. Проценту Грка одговара $\frac{1}{8}$ круга.
Срба има $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$. Проценту Срба одговара $\frac{3}{8}$ круга.
Мађара има $\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 50\%$. Проценту Мађара одговара $\frac{1}{2}$ круга.

в)

ЗАДАЦИ

1. Изрази у процентима осенчене делове круга:



2. При печењу, месо изгуби 30% своје масе.
а) Колико масе ће преостати после печења 600 g меса?
б) Колико је потребно сировог меса да би се добило 280 g печеног?

3.*** Један производ је најпре појефтинио 10%, а затим поскупео за 10%. За колико процената се променила почетна цена?

4. Од 160 t руде добијено је 40 kg бакра.
Колики је проценат бакра садржан у тој руди?

5. Цена килограма малина прошле године је била 200 динара, а ове је 300 динара. За колико процената је повећана цена малина?

6. Колико износи 5% од: а) 6 000; б) 1 200?

7. Колико процената од целог круга износи:
а) половина круга; б) четвртина круга; в) петина круга;
г) цео круг; д) три петине круга; ђ) цео круг и његова половина?

8.* Возач аутобуса је једног дана на пумпи наточио 58,2 l горива, а другог дана 5% више. Колико је платио гориво, ако је тих дана цена била 150 динара по литру?

9. Књига, која је коштала 600 динара, после снижења кошта 480 динара. Колико износи снижење у процентима?

10.*** Цена једног производа повећана је за 100%. За колико процената треба снизити нову цену да би се вратила на првобитну?

8.2. Размера. Аритметичка средина

Подсетимо се да већ знамо да се разломци могу проширивати и скраћивати, а да се притом не мења њихова вредност. Тако, на пример, разломак $\frac{8}{24}$ можемо да скратимо са 2, 4 или 8, па ћемо добити редом $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$, односно $\frac{1}{3}$.

Исти разломак можемо да проширимо са 2, 3 или 5, па ћемо добити редом $\frac{16}{48}$, $\frac{24}{72}$, $\frac{40}{120}$.
Дакле, важи $\frac{8}{24}=\frac{4}{12}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{16}{48}=\frac{24}{72}=\frac{40}{120}$.

За два броја a и b $(b \neq 0)$ кажемо да је њихова **размера** количник $a:b$ (односно $\frac{a}{b}$).

ПРИМЕР 1. Знамо да је на географским картама увек дата размера растојања на карти и у природи, која представља однос растојања изражених истим мерним јединицама. На пример, растојање између два града на карти је 2 cm, а у природи 200 km. То би значило да је размера 2 : 20 000 000, где је 200 km заправо 20 000 000 cm.

Количник две величине изражене истим јединицама мере називамо размером, а вредност тог израза је **вредност размере**.

На карти у претходном примеру размера је износила 2 : 20 000 000, а вредност размере је $\frac{2}{20\,000\,000}=\frac{1}{10\,000\,000}=0,0000001$.

Величине које се јављају у размери називамо **члановима размере**.
Ако размере имају једнаке вредности, кажемо да су оне једнаке.

ПРИМЕР 2. Нека је једна размера 3 : 4. Њена вредност је $\frac{3}{4}=0{,}75$. Нека је друга размера дата са 12 : 16. Њена вредност је $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=0,75$. То значи да су ове две размере једнаке, јер имају једнаке вредности, односно $3:4=12:16$.

Видимо и да се вредност размере није променила, јер су чланови друге размере заправо исто што и чланови прве, само помножени истим бројем.
$\frac{12}{16}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 4}=0,75$

Ако чланове размере помножимо или поделимо истим природним бројем, вредност размере се не мења.

ПРИМЕР 3. а) Колико пута је број 28 већи од броја 7? Колика је размера 28 : 7?

б) Колико пута је број $\frac{2}{5}$ већи од броја 12? Одреди вредност размере $\frac{2}{5} : 12$?

РЕШЕЊЕ

а) Број 28 је 4 пута већи од броја 7, па је вредност размере 28 : 7 једнака 4.

б) Како је $\frac{2}{5} : 12 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{30}$, то је број $\frac{2}{5}$ већи $\frac{1}{30}$ пута од броја 12.

ПРИМЕР 4. Истраживач Бранко је пронашао стару гусарску мапу, где је означено место на коме је закопано благо.

На полеђини мапе пише: „Када стигнеш на острво, пронађи стару палму и велику стену. Копај тачно на средини између палме и стене. Ту ћеш на дубини од 3 m наћи закопано благо".
У углу мапе је написано да је направљена у размери 1 : 1000. Бранко је на мапи измерио растојање између палме и стене и то је износило 12 cm.

Колико је тачка испод које је закопано благо удаљена од палме?

РЕШЕЊЕ То што је мапа рађена у размери 1 : 1 000, значи да је удаљеност 12 cm на мапи представља 12 000 cm =120 m у природи. Место на коме треба да започне копање је на средини овог растојања, а то значи да је 60 m удаљено од палме.

ПРИМЕР 5. У одељењу V1 има укупно 24 ученика. На првом писменом задатку из математике 8 ученика је добило петицу, а два ученика недовољну оцену. У ком односу је:

а) број одличних ученика према укупном броју ученика;
б) број недовољних ученика према укупном броју ученика;
в) број одличних ученика према броју недовољних ученика?

РЕШЕЊЕ а) $8 : 24 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$; б) $2 : 24 = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$; в) $8 : 2 = \frac{8}{2} = 4$.

ПРИМЕР 6. Миленина месечна зарада износи 54 000 динара, а њена сестра Светлана зарађује 48 000 месечно. У ком односу су Миленина и Светланина зарада?

РЕШЕЊЕ $54\,000 : 48\,000 = \frac{54\cancel{000}}{48\cancel{000}} = \frac{54^{:6}}{48_{:6}} = \frac{9}{8}$

Однос Миленине и Светланине зараде је 9 : 8.

ПРИМЕР 7. Растојање градова A и B је 90 km. Компанија „Ауто-петрол” одлучила је да изгради бензинску станицу на месту које дели пут од A до B у размери 3 : 2. На којој удаљености од A ће се градити бензинска станица?

РЕШЕЊЕ Дату дуж треба поделити најпре на 5 делова.

Како је $\frac{90}{5} = 18$, дужина дужи AC је $3 \cdot 18 = 54$.

Удаљеност од града A до места где ће се градити бензинска станица износи 54 km.

Реши **тест број 67** на електронској платформи еЗбирка:

http://www.ezbirka.math.rs

Аритметичка средина два или више бројева

Врло често се у свакодневном животу појављује потреба да се израчуна средња вредност неког скупа података. На пример, колика је средња дневна температура ваздуха у неком подручју, колика је средња вредност плата запослених у предузећу за одређен месец и сл.

ПРИМЕР 8. Ако је температура ваздуха измерена у подне 25°C, а после два часа 28°C, колика је средња вредност температуре ваздуха у овом периоду?

РЕШЕЊЕ $\frac{25°C + 28°C}{2} = \frac{53°C}{2} = 26,5°C$

Ова вредност назива се **аритметичка средина два броја**.

ПРИМЕР 9. На крају школске године Марко је написао све своје оцене из математике: 3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 5. Која је Маркова средња оцена из математике?

РЕШЕЊЕ Марко је сабрао све своје оцене, а затим је збир поделио са бројем оцена. Добио је $\frac{3 + 4 + 4 + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 5}{9} = \frac{39}{9} \approx 4,33$.

Ова средња вредност назива се **аритметичка средина датих бројева**.

Аритметичка средина два или више бројева је количник њиховог збира и њиховог броја.

Аритметичка средина n бројева $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ је број $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$.

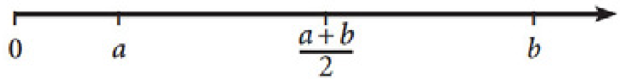
Аритметичка средина бројева се још назива и **просечан број**.

ПРИМЕР 10. На четири утакмице кошаркашког првенства Милица је постигла 12, 17, 19 и 14 кошева. Колика је аритметичка средина (просечан број) Миличиних постигнутих кошева?

РЕШЕЊЕ $\frac{12 + 17 + 19 + 14}{4} = \frac{62}{4} = 15,5$

Милица је просечно постигла 15,5 кошева на једној утакмици.

На бројевној полуправој, аритметичкој средини два различита броја a и b одговара средиште дужи чији су крајеви тачке које одговарају тим бројевима.



ПРИМЕР 11. Одреди аритметичку средину бројева 1,5; 3,8 и 2,7 и показати да она није мања од најмањег броја нити већа од највећег од њих.

РЕШЕЊЕ

$$1{,}5 \leq \frac{1{,}5+3{,}8+2{,}7}{3} \leq 3{,}8$$

$$1{,}5 \leq \frac{8}{3} \leq 3{,}8$$

$$1{,}5 \leq 2{,}67 \leq 3{,}8$$

Аритметичка средина датих бројева не може бити мања од најмањег нити већа од највећег од тих бројева.

ЗАДАЦИ

11. Колико пута је број 144 већи од броја 48? Одреди вредност размере 144 : 48.

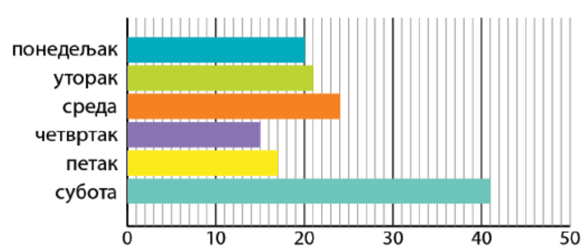
12. На плану Београда рађеног у размери 1 : 10 000, дужина Улице храстова износи 15 cm. Колика је права дужина ове улице?

13.** Јован жели да на листу папира димензија 20 cm и 27 cm нацрта план свог стана. Колика је најмања размера у којој то може да уради, ако је стан облика правоугаоника дужине 8,1 m и ширине 6,2 m. За израчунавање користи .

14. Дуж AB дужине 24 cm подели тачком C у размери 3 : 5. Колике су дужине дужи AC и BC?

15. Број дечака у три одељења петог разреда је редом 11, 9 и 10. Колики је просечан број дечака у петом разреду?

16. На слици је приказана дневна продаја патика у једној продавници у току једне радне недеље.



Колика је просечна дневна продаја патика у тој продавници у току те недеље?

17. Да ли се вредност размере мења, ако се оба њена члана помноже (или поделе) једним истим бројем различитим од нуле?

18. Да ли се вредност размере мења, ако се њеним члановима дода исти број различит од нуле?

19. Да ли су следеће размере једнаке? а) $\frac{51}{3} : \frac{62}{3}$ и $4 : 5$; б) $3{,}6 : 2{,}4$ и $3 : 2$.

20. Аутобус је возио ученике на екскурзију. Првог дана је прешао 192,6 km, другог 83,5 km и трећег 218 km. Колико километара је аутобус просечно прелазио дневно? За израчунавање користи .

РАЗНИ ЗАДАЦИ

21. Бројеве представи у процентном запису:

а) 2,7; б) 0,13; в) 5,49; г) 3,02.

22. Разломке напиши у процентном запису:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $1\frac{1}{2}$; г) $3\frac{3}{8}$.

23. Представи у облику разломка $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$:

а) 5%; б) 32%; в) 25%;
г) 12,5%; д) 60%; ђ) 35%.

24. Шта је веће 40% од $\frac{7}{20}$ или $\frac{2}{5}$ од 35%?

25. Река Сава је пловна 567 km, што износи 60% њене дужине. Колика је дужина реке Саве?

26. На тесту из математике од 60 могућих бодова Миланка је освојила 48. Изрази број њених бодова у процентима.

27. Ивана је на распродаји купила мајицу која је коштала 1 080 динара пре снижења. Снижење цена свих производа је било 45%. Колико је Ивана уштедела?

28. У једној канцеларији $\frac{4}{5}$ запослених су жене. Одреди проценат мушкараца у тој канцеларији.

29. У балетској школи има седам пута више девојчица него дечака. Изрази у процентима број девојчица и број дечака у тој школи.

30. Јовица је пре две године имао 45 kg. Његова маса се од тада повећала за 16%. Колико килограма сада има Јовица?

31. У једном одељењу од 20 ученика 60% су дечаци, а у другом од 24 ученика 50% су дечаци. У ком одељењу има више дечака?

32. У једном одељењу петог разреда од 24 ученика 6 је добило петице на писменом задатку из математике, 12 четворке, 4 тројке, а остали двојке. Изрази ове податке у процентима.

33. Јелица је хтела да у књижари купи свеске по цени од 50 динара. Међутим, тог дана је цена снижена за 15%. Колико је Јелица уштедела ако је купила четири свеске?

34. Мирко је пошао од куће са 480 динара. У пекари је потрошио 15%, а у књижари 60%. Колико му је динара преостало?

35. Цена свеске је снижена са 40 на 32 динара. За колико процената је снижена цена?

36.*** Деда Јанко је имао шталу облика правоугаоника дужине 8 m и ширине 5 m. Његов унук Радиша му је помогао да прошире шталу и то дужину за 25%, а ширину за 20%. За колико процената се повећала површина штале?

37. Базен је напуњен водом до $\frac{2}{3}$ своје запремине. Затим је отворена одводна цев и истекло је $\frac{2}{5}$ воде из базена. Изрази у процентима колики је део првобитно испуњеног базена остао напуњен водом после отицања.

38. Горан жели да купи патике. Обишао је четири продавнице у којима је у току снижење цена и показало се да је цена једног модела:

Продавница	Цена (у динарима)	Снижење
Прва	3 600	15%
Друга	3 000	10%
Трећа	4 000	30%
Четврта	4 200	40%

У којој продавници је најповољнија цена патика које Горан жели да купи?

39. У једној продавници аутомобила установили су да имају 25% црвених, 20% црних и 10% белих аутомобила. Преосталих 36 аутомобила су у другим бојама. Колико укупно аутомобила има у тој продавници?

40. Збир три броја је 2 400. Ако први број износи $\frac{2}{3}$ суме, а други 15% суме, колики је трећи број?

41. У једној школи постоје четири одељења петог разреда. У првом одељењу има 24 ученика, у другом 12,5% више него у првом, а у трећем $\frac{7}{9}$ броја ученика другог одељења, док је у четвртом одељењу три пута мање ученика него у прва три одељења заједно. Колико ученика петог разреда има у тој школи?

42.* Када трговац продаје неку робу по цени од 350 динара остварује зараду од 10%. Колика би била зарада (у процентима) ако би цену робе подигао на 378 динара?

43.* На изборе је изашло 60% гласача, од којих је 20% гласало за једну странку. Који је део (у процентима) од укупног броја гласача гласао за ту странку?

44. Игор има 275 динара, Јовица 200, а Коста 225 динара. Изрази у облику размере односе новца које имају:

а) Игор и Јовица;
б) Јовица и Коста;
в) Коста и Игор.

45. Дате су дужине дужи a и b:

а) $a = 3\,\text{dm}$, $b = 15\,\text{cm}$;
б) $a = 8{,}4\,\text{cm}$, $b = 0{,}7\,\text{cm}$;
в) $a = 222\,\text{mm}$, $b = 3\,\text{cm}\ 7\,\text{mm}$;
г) $a = 7\,\text{mm}$, $b = 9\,\text{cm}\ 8\,\text{mm}$.

Одреди вредност размере $a : b$.

46. Страница једног квадрата има дужину 3 cm, а другог 4 cm. У којој размери се налазе њихове површине?

47. Које од размера: а) $4 : 10$; б) $5 : 12{,}5$; в) $1 : \frac{5}{2}$; г) $7 : 18$ су једнаке размери $2 : 5$?

48. Дату дуж AB подели користећи се лењиром и шестаром у размери:
а) $5 : 3$; б) $6 : 2$; в) $1 : 7$; г) $4 : 4$.

49. Нацртај дуж $a = 2\,\text{cm}$, а затим дуж b такву да је према дужи a у размери: а) $1 : 3$; б) $3 : 2$.

50. Мајстор Јова прави подрумска врата висине 2 m и ширине 60 cm. Претходно је направио скицу у размери 1 : 20. Колика је висина, а колика ширина врата на скици?

51. Растојање између два града на карти је 2 cm. Одреди право растојање у километрима између та два града, ако је размера карте 1 : 5 000 000.

52. Растојање градова A и B је 20 km. Колико је то растојање на карти рађеној у размери 1 : 500 000?

53. Растојање града M од језера на карти рађеној у размери 1 : 250 000 једнако је 6 cm. Колико километара је град M удаљен од језера?

54. Димензије фискултурне сале облика правоугаоника су 25 m и 30 m. Нацртај под сале у размери 1 : 500.

55. Висине мајке и ћерке су у размери 6 : 5. Колико је висока ћерка, ако је мајка висока 174 cm?

56. Ученик је за два дана прочитао књигу од 72 стране. Колико страна је прочитао првог, а колико другог дана, ако је однос прочитаних страна та два дана 3 : 5?

57. У једном одељењу од 30 ученика има 12 девојчица. Изрази у облику размере број дечака и девојчица у том одељењу.

58. Два суплментна угла односе се као:

а) 4 : 5; б) 2 : 3. Одреди те углове.

59. Два угла се односе као 2 : 7. Одреди те углове ако су они:

а) комплементни;
б) суплементни;
в) углови са паралелним крацима.

60. Два угла са паралелним крацима односе се као 4 : 5. Израчунај мере тих углова.

61. Ако је 21% броја a једнако 77% броја b, израчунај размеру.

62. Ако је $b : a = 5 : 2$, напиши израз $a : b$ у облику размере.

63. Аутобус пређе пут од места A до места B за 4h, а воз за 6h. Одреди однос брзина воза према аутобусу.

64. Александар је пет дана мерио висину снежних падавина и добио следеће вредности:

Дан у недељи	Висина снежних падавина
Понедељак	7,5 cm
Уторак	6,75 cm
Среда	5,15 cm
Четвртак	20,05 cm
Петак	8,1 cm

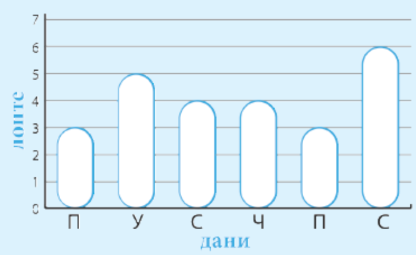
Колика је просечна дневна вредност висине снежних падавина за тих пет дана?
За израчунавање користи .

65. У табели је приказан успех ученика једног одељења на писменом задатку из математике:

Оцена	Број ученика
5	7
4	12
3	8
2	5
1	1

Израчунај просечну оцену овог одељења на две децимале.

66. Графиком је приказана продаја кошаркашких лопти у продавници за шест дана:



Колико је просечно продато лопти за један дан?

67. Висине кошаркаша стартних петорки два тима су приказане у табели:

Тим A	Тим B
1,90 m	1,84 m
1,92 m	1,96 m
2,02 m	2,00 m
2,05 m	2,07 m
2,12 m	2,09 m

Која од две петорке има већу просечну висину?
За израчунавање користи .

68. На првих пет утакмица кошаркашки клуб „Пионир” имао је 728, 840, 639, 952 и 512 гледалаца. Управа клуба је одлучила да пресели клуб у већу халу, уколико просечна посета у првих пет кола буде већа од 720 гледалаца по утакмици. Да ли ће кошаркаши „Пионира” прећи у већу халу?
За израчунавање користи .

69. Аритметичка средина четири броја, од којих су три: 5,2; 2,17 и 3,53, износи 4. Колики је четврти број?
За израчунавање користи .

70. У току школске године Аца је из математике добијао следеће оцене: 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3. Коју оцену треба да добије на последњем писменом задатку да би му просечна оцена на крају школске године била 3,5?

71. Помоћу угломера нацртај угао од 60°, а затим га подели на два угла у односу 2 : 1. Колика је мера тако добијених углова?

72.* Просек година старости 11 играча фудбалског тима је 22 године. У току игре један играч је искључен, а један је због повреде изашао ван терена. Просек година старости преосталих 9 играча је 20 година. Када се вратио у игру повређени играч, онда је просек старости 10 играча на терену био 21 година. Колико година има искључени, а колико повређени играч?

9 РЕШЕЊА

1 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ И ДЕЉИВОСТ (Први део)

1. а) Највише је продато у петак, а најмање у суботу; б) 54; в) два пута; г) 477.

2. а) 1 000; б) 90; в) 10.

3. а) 1 589; б) 1000; в) 70; г) 1 700.

4. а) и в). **5.** 7 и 8. **6.** 2.

7. За $n = 9$, $n = 10$ или $n = 11$.

8. а) 0; б) 50; в) 26, г) 16.

9. а) 60; б) 30; в) 54; г) 90.

10. $5\,040 - 31 \cdot 140 = 700$ динара.

11. $x = 90$ дин. **12.** $x = 94$. **13.** $x = 236$.

14. $x = 18$. **15.** $x \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

16. а) $x < 57$; б) $x = 234$.

17. а) 9 и 6; б) 12 и 56; в) 5 и 570.

18. 138, 805 и 2 300.

19. а) $270 = 87 \cdot 3 + 9$; б) $343 = 46 \cdot 7 + 21$; в) $315 = 21 \cdot 15 + 0$; г) $28 = 13 \cdot 2 + 2$.

20. 0, 1, 2, 3 или 4.

21. На пример: 19, 31, 43.

22. $q = 0$, $r = 7$. **23.** $(1\,125 - 125) : 5 = 200$.

24. 7. **25.** Да, $323 = 17 \cdot 19$.

26. а) 3; б) 7; в) 6.

27. а) $x = 25 \cdot 8 + 17 = 217$; б) $x = 76 \cdot 4 + 39 = 343$.

28. 6, 8, 9, 12.

29. Делиоци нуле су сви природни бројеви, дакле нула има бесконачно много делилаца.

30. Да, јер $17|34$. **31.** 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

32. Шест. То су: 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

33. а) 17, 34 и 51; б) 24 и 48.

34. Да, $(52 \cdot 15) : 20 = 39$. **35.** Не.

36. Упутство: $b = d - a - c$.

37. То су правоугаоници чије су дужине страница: 1 cm, 18 cm; 2 cm, 9 cm; 3 cm, 6 cm.

38. а) и г). **39.** Дељиви су.

40. а) 10, 12, 20 и 22; б) 10 и 20.

41. а) Бројем 2; б) бројем 5; в) бројем 5; г) бројевима 2, 5 и 10.

42. 335, 345, 355, 435, 445, 455, 535, 545 и 555.

43. а) 0, 2, 4, 6 или 8; б) 0 или 5; в) 0.

44. $a, b, m, n \in N$, $a > b$, $m > n$ следи $a = 5m$, $b = 5n$, следи $a + b = 5(m + n)$, $a - b = 5(m - n)$.

45. б) и г). **46.** а) Да; б) Не.

47. а) 986; б) 985; в) 980. **48.** 0.

49. Не, јер број 538 није дељив са 4.

50. Дељиви су бројеви: а), в) и г).

51. 00. **52.** Не. **53.** Да.

54. 424, 428, 444, 448, 484 и 488.

55. 144 cm и 196 cm – може, а 121 cm и 198 cm не може.

56. Не. **57.** 5. **58.** 123 и 126. **59.** а) Да; б) Не.

60. Цифром 5. **61.** На пример: 108, 405, 4122, 5616.

62. 108, 981. **63.** 5. **64.** 9 999 и 1 002.

66. в). **67.** 99 996.

68. а) {10,15,20}, б) {А, Е, И, О, У}, в) {10, 100, 1 000, 10 000, 100 000}.

69. 7. **71.** $B \subset A$. **72.** а) $\in$; б) $\notin$; в) $\in$; г) $\notin$; д) $\in$.

73. Да, имају по два елемента. **74.** Коначан.

75. а) 5 228; б) 3 045 и 531; в) 7 405 и 3 045; г) 531.

76. Скупови су једнаки, па имају исти број, по три елемента.

77. 29.

78. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \setminus B = \{2, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 7, 9\}$.

79. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{b, c\}$, $A \setminus B = \{a\}$, $B \setminus A = \{d, e\}$.

80. $\varnothing$. **81.** {6, 12, 18}. **82.** а) и в).

83. {72, 78, 84}. **84.** а) {2, 3, 4}; б) {2, 3, 4}.

85. Да. **86.** а) {6}; б) {2, 4, 8}; в) {3, 9}.

88. а) 112 008; б) 3 003 030.

89. а) Два милиона двадесет хиљада двеста два; б) десет милона сто хиљада десет.

90. 800 кубних метара. **91.** $P = 72\ \text{cm}^2$.

92. а) 97; б) 105; в) 20; г) 356.

93. а) $x = 49$; б) $x = 58$; в) $x = 12$; г) $x = 2$; д) $x = 36$.

94. а) $x \le 2$; б) $x \le 12$; в) $x > 7$; г) $x \le 17$; д) $x \le 14$; ђ) $x < 92$; е) $x < 7$; ж) $x > 3$.

95. Из $(x : 4) \cdot 9 + 1\,486 = 10\,000$ добијамо $x = ((10\,000 - 1486) : 9) \cdot 4$, тј. $x = 3\,784$.

96. а) $56 : 8 + (32 - 7) = 32$; б) $23 \cdot 7 - 72 : 9 = 153$; в) $32 \cdot 8 - 32 : 8 = 252$; г) $128 : 32 + 3 \cdot 9 = 31$.

97. а) $59 \cdot (7 + 3 - 6) = 236$;
б) $526 - 126 + 614 + 386 = 400 + 1\,000 = 1\,400$;
в) $5 \cdot (23 - 17 + 58 - 37) = 135$.

98. Како је $96 : 12 = 8$, то је:
а) $(96 : 6) : (12 : 6) = 96 : 12 = 8$;
б) $(96 \cdot 3) : (12 \cdot 3) = 96 : 12 = 8$.

99. а) Повећа се за 4; б) повећа се за 7;
в) повећа се за 49.

100. 35. **101.** 36 и 9.

102. Тачни су искази а), б) и д).

103. а) 2; б) 1; в) 3; г) 0.

104. а) $7 \cdot q + 3$; б) $11 \cdot q + 2$; в) $5 \cdot q$.

105. а) $b = 2, r = 1$; б) $b = 3, r = 2$;
в) $b = 235, r = 2$; г) $b = 37, r = 5$.

106. а) 8; б) 8.

107. Како је $1\,000 = 6 \cdot 166 + 4$, сваки од дечака треба да добије 166 динара, а 4 динара преостају.

108. Нека је q тражени број. Из $127 = a \cdot q + 7$ и $153 = b \cdot q + 3$ видимо да су бројеви 120 и 150 дељиви са q. Заједнички делиоци бројева 120 и 150 су: 30, 15, 10, 6, 5, 3 и 2. Како q треба да буде веће од 7, долазе у обзир само бројеви: 10, 15 и 30.

109. 22 стола. **110.** а) 9 999 и 1 008; б) 9 996 и 1 001.

111. а) 7; б) 1; в) 7.

112. а) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24; б) 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 и 54.

113. 18, 36, 54, 72 и 90.

114. а) 290, 292, 294, 296 и 298; б) 291, 294 и 297;
в) 292 и 296; г) 290 и 295.

115. На пример: а) 144, 228, 276; 4 208, 8 924, 9 752;
б) 135, 207, 432; 1 071, 2 340, 5 733;
в) 350, 475, 800; 1 025, 5 350, 9 775.

116. $a = 9 \cdot 9 + 8 = 89$.

117. Из $a = 5 \cdot b + 1$ и $a + b = 25$ добијамо $6 \cdot b + 1 = 25$, па је $b = 4$ и $a = 21$.

118. Тачне реченице су б) и в).

119. Упутство: Сваки сабирак израза a дељив је са 4, а сваки сабирак израза b са 5.

121. а) a и c; б) a, b и c; в) b и c; г) a и b; д) c.

122. а) 20, 30, 50, 22, 32, 52; б) 20, 30, 50.

123. Са 3 су дељиви a, b, c, d, e и f, а са 9 су дељиви a и e.

124. а) 10 000; б) 10. **125.** а) 3; б) 5; в) 9.

126. а) * може да буде 0, 3, 6 или 9;
б) * је 4; в) * је 2 или 7.

127. Збир цифара свих бројева $a + 2$ једнак је 3.

128. а) 7; б) 0 или 9.

129. Шест: 135, 153, 315, 351, 513 и 531.

130. а) 0; б) 5; в) 0; г) 2 или 7; д) 0 или 5.

131. Број је дељив са 90, ако је дељив са 9 и 10. Дакле, последња цифра мора да буде нула, а претпоследња 1. Тражени број је 5 310.

132. 5 cm и 4 cm или 10 cm и 2 cm или 20 cm и 1 cm.

133. Збир три узастопна природна броја је дељив са 3. Одговор: г).

134. Ако тражени број напишемо у облику $n = 12 \cdot q + r$ $(0 \le r < 12)$, због услова $q = r$, биће $n = 13 \cdot q$. Најмањи троцифрен број дељив са 13 је број 104. Непосредно се проверава да је $104 = 12 \cdot 8 + 8$.

135. Мањи број је $(1\,451 - 1) : 5 = 290$, а већи $1\,451 - 290 = 1\,161$.

136. а) {С, Р, Б, И, Ј, А}; б) {М, А}; в) {1, 3, 5, 7, 9};
г) {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99};
д) {300, 600, 900}.

137. а) $A = \{36, 45, 54, 63\}$; б) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
в) $C = \{24, 30, 40, 60\}$.

138. Само скуп A.

139. $x = 0$ или $x = 1$; б) $x = 0$ или $x = 1$ или $x = 2$;
в) $x = 1$ или $x = 2$ или $x = 3$; г) $x = 4$ или $x = 5$ или $x = 6$; д) $x = 3$ или $x = 6$ или $x = 9$.

140. Скуп D. **141.** Скуп E није подскуп скупа B.

142. а) {3 330, 72, 1 100, 7 070, 2 250}; б) {225, 3 330, 72, 2 250}; в) {72, 1 100}; г) {225, 3 330, 1 100, 7 070, 2 250}; д) {225, 3 330, 72, 2 250};
ђ) {3 330, 1 100, 7 070, 2 250}; е) {225, 1 100, 2 250}.

143. а) 3; б) 2; в) 3; г) 1. **144.** $A = D$, $B = C$, $E = F$.

145. а) $\in$; б) $\subset$; в) $\subset$; г) $\in$.

146. а) $M = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\ 10\}$; б) Скуп B је подскуп скупа M, скупови A и C нису;
в) Тачни су искази: б), г) и е).

147. а) {1, 2, 3}; б) $\varnothing$; в) {1, 2, 3}; г) {2}.

148. а) {1, 2, 3, 4, 6}; б) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12};
в) {5, 7, 8, 9, 10}; г) {12}.

149. а) $x = 5, y = 2$; б) $x = 6, y = 7$ или обрнуто;
в) $y = 2, x \neq 5$.

150. $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, b, f\}$;
а) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;
б) $A \cap B = \{a, b\}$; в) $A \setminus B = \{c, d, e\}$; г) $B \setminus A = \{f\}$.

151. а) {4, 5}; б) {1, 2}; в) {1, 2, 3, 4, 5, 6};
г) {3, 4, 5}; д) $\varnothing$; ђ) {4, 5}.

152. $A = \{2, 7, 12, 17, 22, 27\}$,
$B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, $C = \{9, 18, 27\}$.
а) {12, 17}; б) {27};
в) {9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 27};
г) {12, 17, 27}; д) {2, 7, 12, 17, 22}; ђ) {12, 17};
е) {9, 18}; ж) {18}.

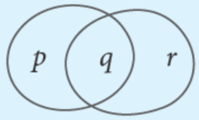
153. $A = \{a, c, d, e, f\}$, $B = \{c, d, b, g\}$. **154.** $C = \{1, 3, 4\}$.

155. $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4\}$.

156. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

157. $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. **158.** $M = \{b, e\}$.

159. а) Означимо са p број ученика који тренирају само кошарку, са q број ученика који тренирају и тенис и кошарку, а са r број ученика који тренирају само тенис.



Тада је $p + q + r = 15$ и $p + q = 8$, одакле је $r = 7$, а број ученика који тренирају тенис је $q + r = 12$. Дакле, тенис тренира 12 ученика, само тенис њих 7, док кошарку тренира 8 ученика а само кошарку њих 3.

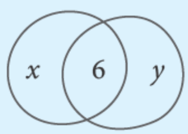
б) $r = 7$.

160. а) $A \setminus B$; 22; б) $B \setminus A$; 18; в) $A \cap B$; 17; г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; 40.

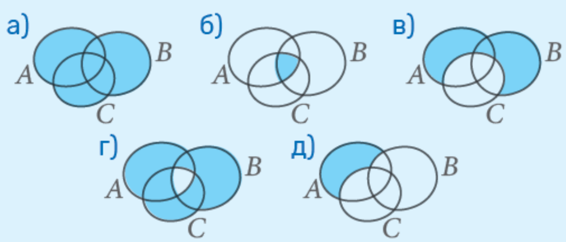
161. И шах и музичка секција – 15, само шах – 9, само музичка – 4.

162. Оба језика – 68, само енглески – 7, само француски – 15.

163. Означимо број елемената ових скупова са $x + 6$ и $y + 6$. Тада је $x + 6 = 15$ и $x + 6 + y = 25$, одакле је $x = 9$ и $y = 10$, па други скуп има $10 + 6 = 16$ елемената.



164.



165. а) $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11\}$; б) $\{7, 8\}$; в) $\{3, 4, 5, 6\}$; г) $\{3\}$; д) $\{4, 5, 6, 9, 10, 11\}$; ђ) $\{7\}$; е) $\{3, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

166. а) 30; б) 18; в) 6; г) 42.

2 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

1. Три. **2.** а) 3; б) 10.

3. а) Права p; б) дуж MN; в) $\{A\}$. **4.** б).

5. а) $\{B\}$; б) AC; в) дуж AB без тачке B; г) дуж BC без тачке B.

6. 6. **7.** 8. **8.** Да.

9. в) Секу се. **10.** а) Да; б) Да.

14. 8. **15.** AB, BF, FC, CE, EA, EF, AC и BC.

17. 5 cm.

18. $AB = 135$ cm, $BC = 163$ cm, $CD = 72$ cm.

19. 305 cm = 3 m 5 cm.

20. а) 3 cm; б) 3 dm; в) 2 dm; г) 2 m; д) 50 cm; ђ) 20 cm.

23. Не. **24.** 3 140 mm. **25.** $MN = PQ$.

26. б). **30.** $O = 12$ cm.

34. $AB + CD = 100$ mm, $AB - CD = 6$ mm.

44. Пречник круга.

45. Бесконачно. **46.** а) 3 cm; б) 6 cm.

47. а) $\varnothing$; б) K_1. **51.** 3. **52.** 6.

55. а) MN је пречник; б) правоугаоник.

57. $F \in CD$.

58. Дате фигуре су централносиметричне у односу на тачку O, која је:

а) пресек дужи AD и BC;

б) средиште дужи BC.

62. Правоугаоник је централносиметрична фигура, а центар симетрије је пресек дужи AC и BD.

63. Права p. **64.** Бесконачно много.

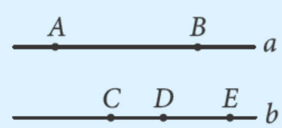
65. Тачне су а) и г). **69.** Различити.

70. $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SA}$.

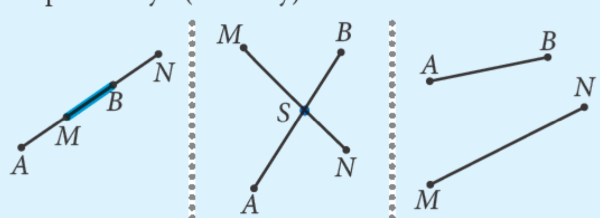
75. (1) б); (2) в). **76.** Тачни су искази а) и в).

82. а) 10; б) 10. **83.** а) Једну; б) Шест.

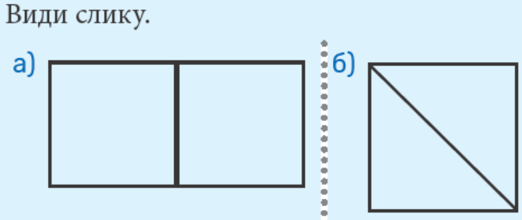
84. а) 8; б) 10 (в. слику).



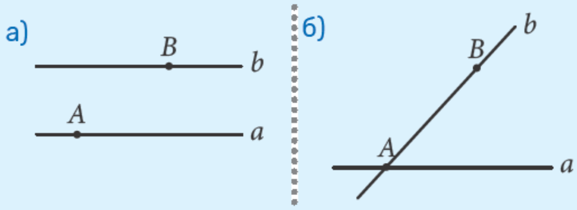
85. Пресек две дужи може да буде дуж, тачка или празан скуп (в. слику).



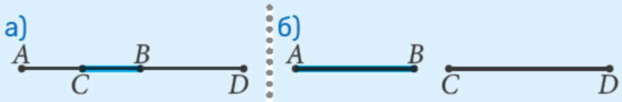
86. Види слику.



89. Види слике.



91. Види слике.



95. $AB = CD$, $BC = DA$. **96.** а) AB; б) GH; в) $CD = EF$.

97. $AB = 2\,570$ mm, $CD = 1\,870$ mm, $EF = 3\,420$ mm.

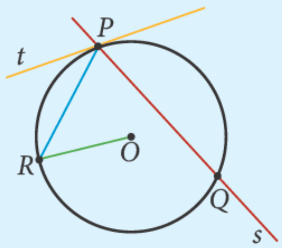
98. $AB = 132$ cm, $CD = 100\,500$ cm, $EF = 143$ cm.

101. а) B; б) пречник; в) AB, BC, BD.

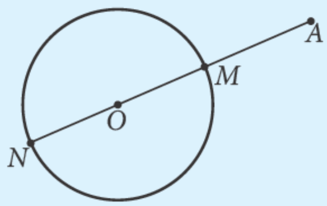
103. а) N; б) M и N; в) P. **106.** а) a и c; б) b; в) d.

107. Тачне су реченице: а), б), д) и ђ).

108.



109. BC и CD. **111.** Види слику.



112. а) Немају заједничких тачака;
б) споља се додирују; в) секу се;
г) додирују се изнутра; д) концентричне су.

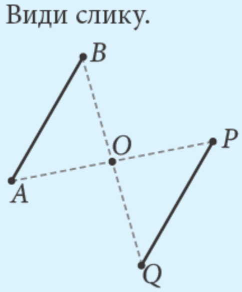
113. а) тачка; б) K_2.

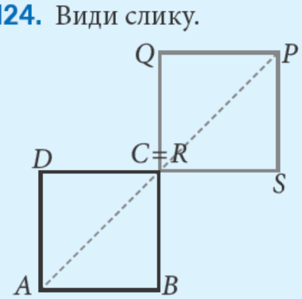
114. а) 35 mm; б) 5 mm. **118.** Кружни лук.

119. Кружница додирује праву b у тачки B, што значи да њен центар припада нормали n конструисаној у тачки B, на праву b. Центар O тражене кружнице је пресек правих n и a, а полупречник дуж OB. Задатак нема решења када су праве a и b нормалне, при чему тачка B не припада правој a.

120. $O = 10$ cm. **121.** $MN + PQ = 6$ cm.

122. Види слику. **124.** Види слику.





126. а) Један; б) безброј.

127. (1) а) CR; б) QO; в) DO; г) QB.
(2) а) $RDSO$; б) $QSAB$.

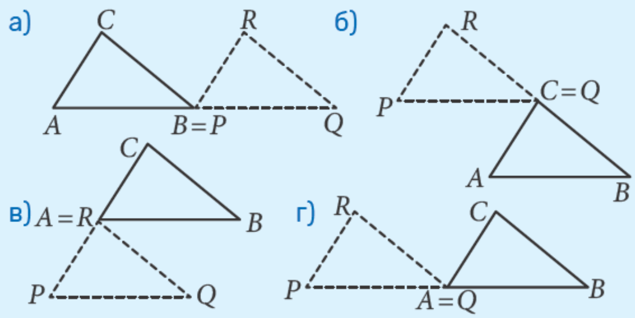
128. (1) а) CS; б) DP; в) QP; г) RP.
(2) Троуглови: а) COB; б) RDO; в) DOP.

130. Ниједан. **131.** $\overrightarrow{DC}$.

133. Тачни су искази: а), в) и е).

134. Не, ти вектори имају различите правце, па не могу бити једнаки.

139. Види слике.



140. За вектор $\overrightarrow{CA}$.

3 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ И ДЕЉИВОСТ (Други део)

1. Само један – то је број 2.

2. 36, 38, 39, 40, 42 и 44.

3. Добија се број 169 који је сложен.

4. а) 101; б) 100. **5.** а) Два; б) два; в) три.

6. $97 + 100 = 197$.

7. Сложен, јер је $391 = 17 \cdot 23$.

8. $1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. **9.** $4 + 6 + 8 + 9 + 10 = 37$.

10. Број $p + q$ је сложен јер је паран и то зато што су бројеви p и q непарни, а збир два непарна броја је паран.

11. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$;
$1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; $2\,020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$.

12. $x = 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

13. $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $49 = 7 \cdot 7$; $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$.

14. $a = 1$ cm, $b = 24$ cm; $a = 2$ cm, $b = 12$ cm;
$a = 3$ cm, $b = 8$ cm; $a = 4$ cm, $b = 6$ cm.

15. Како је $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ такав број не постоји, јер би једна његова цифра морала да буде број 11 или садржалац броја 11, што је немогуће.

16. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$. **17.** 4.

18. Седам другарица по 13 салвета или 13 другарица по 7 салвета.

19. 10 010. **20.** 3 и 13.

21. а) 1, 2, 3, 4 , 6 и 12; б) 1, 2, 5 и 10.

22. а) и б) – јесу; в) – нису.

23. НЗД(15, 21, 33) = 3 cm. **24.** а) 3; б) 11; в) 6.

25. Не, на пример НЗД(26, 33, 102) = 1, али је НЗД(26, 102) = 2, а НЗД(33, 102) = 3.

26. а) 31; б) 16.

27. а) {1, 2, 3, 6}; б) {1, 2, 3, 4, 6, 12}; в) {1, 2, 3, 6}; г) Ø.

30. $a = b = 24$. **31.** 7. **32.** 12. **33.** 20.

34. а) 36; б) 70; в) 72.

35. а) 210; б) 770. **36.** а) 924; б) 1 326.

37. 60. **38.** НЗС(6, 8) = 24.

39. Само број 54. **40.** $12 \cdot 792 = 72 \cdot 132 = 9\,504$.

41. 90. **42.** $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,310$.

43. а) НЗС(24, 18) = 72; б) НЗД(360, 504) = 72.

44. НЗС(16, 24) = 48, 48 + 3 = 51.

45. НЗС(18, 27, 42) = 378, 378 + 1 = 379.

46. НЗС(80, 200) = 400 cm = 4 m.

47. а) B = {31, 37, 41, 43, 47}, C = {30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50};

б) B = {101, 103, 107, 109, 113}, C = {100, 102, 104, 105, 106, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120}.

48. Прости бројеви су: 71, 127 и 439, а сложени: $63 = 9 \cdot 7$, $121 = 11 \cdot 11$ и $391 = 17 \cdot 23$.

49. Сви ови бројеви дељиви су са 3.

50. На пример: а) 2 + 3 + 5 = 10; б) 3 + 5 + 11 = 19.

51. На пример: 2 + 3, 2 + 5, 2 + 11.

52. Број 27 се на следеће начине може написати као збир два броја: 26 + 1 = 25 + 2 = 24 + 3 = 23 + 4 = 22 + 5 = 21 + 6 = 20 + 7 = 19 + 8 = 18 + 9 = 17 + 10 = 16 + 11 = 15 + 12 = 14 + 13. Видимо да је у сваком од збирова бар један сабирак сложен број.

53. Ако је $p = 2$, онда је $3 \cdot p + 2 \cdot q = 6 + 2 \cdot q = 52$, па је $2 \cdot q = 46$ и $q = 23$. Ако је $p > 2$, онда је p непаран број, па је и $3 \cdot p$ непаран број. Како је $2 \cdot q$ паран број, то је збир $3 \cdot p + 2 \cdot q$ непаран и не може да буде једнак 52. Према томе, једина могућност је да буде $p = 2$, $q = 23$.

54. Ако је $p = 2$, број 37 + 2 = 39 је сложен, јер је дељив са 3. Ако је p прост број већи од 2, тада је p непаран број, па је збир $37 + p$ паран број, дакле, сложен.

55. Ако је $p = 2$, онда су бројеви $7 \cdot 2 + 3 = 17$ и $13 \cdot 2 + 5 = 31$ прости. Ако је p прост број већи од 2, онда је број p непаран, па су и бројеви $7 \cdot p + 3$ и $13 \cdot p + 5$ парни, што значи да нису прости.

56. а) Како је $264 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$, сви прости делиоци броја 264 су 2, 3 и 11; б) 2, 5 и 11; в) 2, 3, 5 и 7.

57. $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$; $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$; $2\,400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; $5\,880 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

58. а) $540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; б) $875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$; в) $744 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 31$.

59. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$.

60. $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$, $141 = 3 \cdot 47$, $142 = 2 \cdot 71$, $143 = 11 \cdot 13$, $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$, $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $145 = 5 \cdot 29$, $146 = 2 \cdot 73$, $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$, $148 = 2 \cdot 2 \cdot 37$.

61. а) 3 cm, 7 cm и 11 cm; б) 5 cm, 7 cm и 13 cm.

62. а) безброј; б) ниједан.

63. $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 7 \cdot 8 \cdot 9$.

64. Како је $30 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, постоји 12 тражених бројева: 156, 165, 516, 561, 615, 651, 235, 253, 325, 352, 523 и 532.

65. Ниједан од тражених бројева није дељив са 5 и сви су једноцифрени, јер је $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 > 10\,000$. Када се број 3 024 растави на чиниоце, добија се $3\,024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, па је $3\,024 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

66. а) 1; б) 4; в) 28; г) 15.

67. а) $49 = 35 \cdot 1 + 14$, $35 = 14 \cdot 2 + 7$, $14 = 7 \cdot 2$, НЗД(49, 35) = 7;

б) НЗД(12, 22) = 2;

в) НЗД(102, 222) = 6;

г) НЗД(140, 308) = 28.

68. На пример 3, 5, 7, 9, 25.

69. Узајамно су прости бројеви у примерима а), б) и г), док је НЗД(9, 39) = 3.

70. 14 и 15. **71.** НЗД(16, 24, 36) = 4 m.

72. а) 7 g; б) 8 l; в) 6 cm.

73. НЗД(48, 72) = 24 l.

74. Како је НЗД(48, 56) = 8, укупан број тражених делова је 48 : 8 + 56 : 8 = 13.

75. Како је НЗД(30, 24) = 6, подељени су на 6 група и свака група је добила по 4 лопте.

76. Како је НЗД(42, 30, 12) = 6, то ће ивица тражене коцке да буде дужине 6 cm. Број добијених коцки је $(42 : 6) \cdot (30 : 6) \cdot (12 : 6) = 70$.

77. Како је НЗД(1 386, 420) = 42, то је дужина странице траженог квадрата 42 mm. Број тих квадрата једнак је $(1\,386 \cdot 420) : (42 \cdot 42) = 330$, а површина сваког од њих је $1\,764\ mm^2$.

78. а) $5 \cdot 1 = 5$, $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 3 = 15$, $5 \cdot 4 = 20$,...

б) $7 \cdot 1 = 7$, $7 \cdot 2 = 14$, $7 \cdot 3 = 21$, $7 \cdot 4 = 28$,...

79. а) 24, 48, 72, 96; б) 30, 60, 90.

80. а) 105; б) 24; в) 1 960; г) 180.

81. а) НЗС(2, 3, 5) = 30; б) НЗС(2, 3, 7) = 42; в) НЗС(2, 5, 7) = 70; г) НЗС(2, 4, 6) = 12; д) НЗС(3, 7, 9) = 63.

82. а) 120; б) 315; в) 210; г) 72.

83. НЗС(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$ = 2 520.

84. а) 12; б) 144.

85. а) НЗД(24, 36, 60) = 12, НЗС(24, 36, 60) = 360;
б) НЗД(54, 36, 24) = 6, НЗС(54, 36, 24) = 216.

86. а) НЗД(18, 24, 36, 60, 72) = 6,
НЗС(18, 24, 36, 60, 72) = 360;
б) НЗД(15, 25, 45, 105, 225) = 5,
НЗС(15, 25, 45, 105, 225) = 1 575;
в) НЗД(9, 18, 24, 45, 120) = 3,
НЗС(9, 18, 24, 45, 120) = 360.

87. НЗС(15, 18, 24) = 360. Како у току једне школске године има мање од 360 радних дана, неће се поновити овакав случај да све три контролне вежбе буду истог дана.

88. Тражени број је НЗС(12, 28) + 5 = 84 + 5 = 89.

89. Имамо да је 79 – 7 = 72, 111 – 3 = 108, 155 – 11 = 144, па је тражени број једнак НЗС(72, 108, 144) = 36.

90. Како је НЗС(2, 3, 4, 5, 6) = 60, број 61 при дељењу са 2 и са 3 и са 4 и са 5 и са 6 даје остатак 1. Садржаоци броја 60 су бројеви 60, 120, 180,... Од бројева 61, 121, 181, 241, 301, 361,... најмањи који је дељив са 7 је број 301.

4 РАЗЛОМЦИ (Први део)

1. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{5}{8}$.

2. Грађанско в. – 6, Верска н. – 18 ученика.

3. а) $\frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}$; б) $\frac{5}{5}, \frac{14}{2}, \frac{18}{9}$; в) $\frac{4}{3}, \frac{27}{13}$.

4. $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$, $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$, $\frac{17}{16} = 1\frac{1}{16}$, $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$,
$\frac{38}{7} = 5\frac{3}{7}$, $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{2}$, $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$, $\frac{45}{13} = 3\frac{6}{13}$,
$\frac{58}{19} = 3\frac{1}{19}$, $\frac{34}{21} = 1\frac{13}{21}$, $\frac{100}{20} = 5$, $\frac{77}{11} = 7$.

5. На пример: $\frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{111}{37}$.

6. а) 50; б) 8; в) 20; г) 60; д) 16; ђ) 28; е) 16; ж) 46; з) 42.

7. $\frac{7}{2}, \frac{25}{9}, \frac{58}{11}, \frac{37}{8}, \frac{29}{3}, \frac{122}{11}, \frac{124}{45}, \frac{31}{16}, \frac{31}{2}, \frac{27}{8}, \frac{47}{8}, \frac{104}{5}, \frac{65}{9}$.

8. $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$.

9. На пример: $\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}$.

10. а) $\frac{5}{23}$; б) $\frac{7}{9}$; в) $\frac{12}{10} = 1\frac{2}{5}$; г) $\frac{38}{18} = 2\frac{2}{18}$.

Сваки ће добити по 2 оловке, али ће такође 2 остати неподељене.

11. а) $6 = \frac{12}{2}$, $9 = \frac{18}{2}$; б) $6 = \frac{18}{3}$, $9 = \frac{27}{3}$; в) $6 = \frac{30}{5}$, $9 = \frac{45}{5}$.

15. $\frac{7}{3} < \frac{11}{3}$. **16.** $\frac{1}{3} < \frac{4}{5} < \frac{7}{7} < \frac{9}{7} < \frac{14}{5}$.

18. $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}$.

20. Једнако су удаљене од тачке која одговара броју 2.

21. $3\frac{1}{2}$. **22.** $\frac{35}{45}, \frac{54}{45}$.

23. НЗД(24, 42) = 6, $\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$. **24.** $\frac{2}{3}$.

25. $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{5}{5} < \frac{7}{5} < \frac{11}{5}$.

26. НЗС(42, 56) = 168, $\frac{17}{42} = \frac{68}{168} < \frac{69}{168} = \frac{23}{56}$.

27. НЗС(4, 6, 9) = 36, $\frac{19}{9} < \frac{13}{6} < \frac{9}{4}$.

28. а) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{7}{21}$; б) $\frac{12}{9} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$.

29. а) Не; б) Да.

30. НЗС(18, 27) = 54, $\frac{5}{18} = \frac{15}{54}$, $\frac{7}{27} = \frac{14}{54}$.

31. $\frac{1}{7} = \frac{15}{105} > \frac{14}{105} = \frac{2}{15}$. **32.** $0{,}75\,\text{l} = \frac{75}{100}\,\text{l} = \frac{3}{4}\,\text{l}$.

33. 0,03; 0,33; 3,33. **34.** 0,14; 6,55; 2,023.

35. а) $\frac{31}{4} = 7{,}75$; б) $\frac{21}{25} = 0{,}84$; в) $\frac{11}{9} = 1{,}222...$

36. а) $\frac{37}{100}$; б) $8\frac{101}{100} = \frac{8\,101}{1\,000}$; в) $74\frac{3}{10} = \frac{743}{10}$;
г) $\frac{5}{10\,000} = \frac{1}{2\,000}$.

37. $\frac{2}{3} = 0{,}666...$; $\frac{5}{6} = 0{,}8333...$.

38. б). **39.** 1,5; 0,75; 0,375; 0,3.

40. 5,5; 11,75; 12,4; 125,125.

41. а) 0,8 m; б) 0,75 m; в) 0,03 m; г) 0,013 m.

42. $a < c = e < b < d$. **43.** Једнаки су.

44. а) 5,11; б) 317,24; в) 0,48; г) 1,33; д) 7,24; ђ) 8,18.

45. а) 7,05432154; б) 7,0543215; в) 7,054322.

46. 52 km. **47.** а) b; б) d. **48.** а) 0,667; б) 0,714.

49. а) 15€; б) 20€; в) 26€. **50.** в).

51. 23,2 m; 19,3 m. **54.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$.

55. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{5}$.

56. Тачна су тврђења: а), б), в) и д).

57. а) 1 : 3; б) 5 : 2; в) 4 : 7; г) 5 : 9; б) $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}$.

58. Прави разломци су: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$,
а неправи: $\frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}$ и $\frac{9}{5}$.

59. а) 4; б) 2; в) 2; г) 3; д) 3.

60. а) 13; б) 3; в) 3; г) 5; д) 2; ђ) 5.

61. На пример: $\frac{12}{3}, \frac{16}{4}$ и $\frac{20}{5}$.

62. а) $1\frac{4}{5}$; б) $2\frac{1}{3}$; в) $5\frac{7}{11}$.

63. а) $4\frac{2}{3}$; б) $4\frac{1}{2}$; в) $1\frac{3}{4}$; г) $17\frac{2}{7}$; д) $74\frac{9}{23}$.

64. а) $2\frac{1}{2}$; б) $2\frac{1}{3}$; в) $3\frac{3}{4}$; г) $3\frac{1}{8}$; д) $2\frac{5}{6}$.

65. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{18}{5}$; в) $\frac{11}{4}$; г) $\frac{33}{7}$; д) $\frac{61}{7}$; ђ) $\frac{15}{7}$;
е) $\frac{11}{3}$; ж) $\frac{117}{8}$; з) $\frac{1\,564}{9}$.

66. а) $q \in N$ и $q > 7$; б) $q = 7$ в); $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

67. а) $\{\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\}$; б) $\{\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{4}{1}\}$; в) $\{\frac{4}{1}\}$.

68. $\frac{3\,456}{36} = 96$ или $\frac{3\,852}{36} = 107$, $\frac{4\,320}{45} = 96$
или $\frac{4\,725}{45} = 105$.

73. $\frac{3}{5} < \frac{3}{4} < \frac{3}{3} < \frac{3}{2}$.

74. $\frac{4}{5} < 1$, $\frac{5}{6} < 1$, $\frac{5}{4} > 1$, $\frac{6}{5} > 1$.

75. $\frac{44}{45} < 1$, $\frac{45}{44} > 1$, па је $\frac{45}{44} > \frac{44}{45}$.

76. а) $\frac{4}{20}$; б) $\frac{28}{12}$; в) $\frac{16}{100}$; г) $\frac{44}{60}$.

77. а) $\frac{4}{10}$; б) $\frac{8}{20}$; в) $\frac{16}{40}$; г) $\frac{32}{80}$.

78. а) $\frac{5}{10}$; б) $\frac{25}{50}$; в) $\frac{50}{100}$.

79. а) $\frac{21}{35}$ и $\frac{10}{35}$; б) $\frac{16}{24}$ и $\frac{12}{24}$; в) $\frac{11}{99}$ и $\frac{27}{99}$; г) $\frac{14}{18}$ и $\frac{11}{18}$;
д) $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{6}$; ђ) $\frac{24}{144}$ и $\frac{63}{144}$; е) $\frac{21}{72}$ и $\frac{20}{72}$;
ж) $\frac{21}{24}$ и $\frac{10}{24}$; з) $\frac{20}{45}$ и $\frac{21}{45}$; и) $\frac{10}{15}, \frac{3}{15}$ и $\frac{7}{15}$;
ј) $\frac{10}{35}, \frac{7}{35}$ и $\frac{11}{35}$; к) $\frac{3}{12}, \frac{10}{12}$ и $\frac{5}{12}$; л) $\frac{32}{48}, \frac{24}{48}$ и $\frac{15}{48}$.

80. а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{13}{27}$; д) $\frac{16}{17}$;
ђ) $\frac{21}{23}$; е) $\frac{9}{13}$; ж) $\frac{103}{217}$.

81. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{12}{5}$; г) $\frac{3}{8}$; д) $\frac{3}{2}$.

82. $\{\frac{1}{4}, \frac{13}{24}\}$. **83.** а) $a = 21$; б) $b = 5$; в) $c = 14$.

84. а) $x = 9$; б) $y = 12$. **85.** $\frac{16}{22}$.

86. а) $\frac{32}{48}$; б) $\frac{62}{93}$; в) $\frac{14}{21}$.

87. а) $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$; б) $\frac{2}{9} < \frac{5}{9}$; в) $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$; г) $\frac{5}{12} < \frac{5}{8}$.

88. а) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{7}{10}$; б) $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} < \frac{5}{18}$; в) $\frac{3}{20} > \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$;
г) $\frac{11}{14} > \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$; д) $\frac{3}{5} = \frac{21}{35} > \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$; ђ) $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$;
е) $\frac{3}{4} = \frac{27}{36} < \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$; ж) $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$.

89. а) $\frac{8}{7}, \frac{15}{8}$ и $\frac{17}{11}$; б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{11}{13}$.

90. а) НЗС(2, 3, 4, 9, 12, 18) = 36;
б) $\frac{18}{36}, \frac{24}{36}, \frac{27}{36}, \frac{20}{36}, \frac{21}{36}, \frac{26}{36}$;
в) $\frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$.

91. а) $\frac{5}{13} < \frac{6}{13} < \frac{7}{13} < \frac{8}{13}$; б) $\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$;
в) $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5}$; г) $\frac{1}{4} < \frac{5}{12} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$.

92. $\frac{2}{5} = \frac{8}{20} > \frac{7}{20}$.

93. Жана је прочитала више јер је $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} > \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$.

94. Ани, јер је $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$.

95. а) Из $\frac{2 \cdot n}{2 \cdot 5} < \frac{11}{10}$ добијамо $2 \cdot n < 11$, тј. $n \le 5$.
Дакле, постоји пет оваквих бројева.
б) шест; в) седам; г) пет.

96. $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

97. а) Доведимо разломке на заједнички именилац 220. Бројилац траженог разломка мора да буде између 60 и 80, а да је дељив са 11 – то су бројеви 66 и 77. После скраћивања добијамо тражене разломке $\frac{66}{220} = \frac{6}{20}$ и $\frac{77}{220} = \frac{7}{20}$.
б) Имамо да је $\frac{4}{11} = \frac{40}{110}$ и $\frac{5}{11} = \frac{50}{110}$. Нека је тражени разломак $\frac{p}{10} = \frac{11 \cdot p}{110}$ $(p \in N)$. Треба да буде $40 < 11 \cdot p < 50$, па је $p = 4$.

98. а) 0,11; б) 3,07; в) 5,5; г) 1,023.

99. а) Два цела један десети;
б) нула целих седамнаест стотих;
в) три цела двестаједан хиљадити;
г) четири цела два стота.

100. в). **101.** Тачне су а) и г).

102. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{10}$; в) $\frac{1}{20}$; г) $\frac{3}{250}$.

103. а) 0,6; б) 1,75; в) 0,125; г) 0,8125.

104. а) $\frac{1}{2} = 0{,}5$; б) $\frac{3}{4} = 0{,}75$; в) $\frac{4}{5} = 0{,}8$; г) $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

105. а) 0,25; 0,4; 0,375; 5,25; 6,6; 1,5;

б) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{50}$; $11\frac{3}{10}$; $5\frac{2}{5}$; $6\frac{3}{100}$.

106. а) $\frac{1}{4}$; б) 5,4; в) $3\frac{3}{4}$.

107. а) $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0{,}2$; б) $\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0{,}12$;

в) $\frac{17}{50} = \frac{34}{100} = 0{,}34$; г) $\frac{13}{20} = \frac{65}{100} = 0{,}65$;

д) $\frac{7}{4} = \frac{175}{100} = 1{,}75$.

108. Како је $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$ дужина периода понављања цифара иза децималног записа је 6. На шездесетом месту налази се цифра 7.

109. а) <; б) <; в) <; г) >; д) <; ђ)>.

110. а) Алекса и Дарко; б) Горан.

111. а) $n \in \{10, 11, 12\}$; б) $n \in \{96, 97, 98, 99, 100, 101, 102\}$.

112. $0{,}02 < 0{,}2 < 0{,}22 < 2{,}02 < 2{,}2$.

113. $\frac{1}{7} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. **115.** б).

116. Најхладније је било у Новом Саду, а најтоплије у Нишу.

117. а) $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4 < 1{,}41$; б) $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75 > 1{,}73$;

в) $5\frac{5}{8} = \frac{45}{8} = 5{,}625 < 5{,}63$.

118. $\frac{5}{3} > 1{,}5 > \frac{4}{3} > 1{,}3$.

119. $\frac{5}{12} < \frac{4}{9}$, па је сестра старија.

120. $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

121. Радмила је прочитала највећи, а Мирко најмањи део књиге.

122. б). **123.** а) 0,44; б) 0,83; в) 1,86; г) 0,82.

124. Заокругљено на две децимале: а) $\frac{17}{13} = 1{,}31$;

б) $\frac{213}{17} = 12{,}53$, па је $1 < \frac{17}{13} < 2$ и $12 < \frac{213}{17} < 13$.

125. а) 4,1; б) 4,10; в) 4,104; г) 4,1036; д) 4,10358.

126. 666,67 динара. **127.** г).

5 УГАО

1. α и γ су конвексни, δ није. **3.** Шест.

4. $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$, $\sphericalangle DOB$.

7. а) 2 ; б) 6. **9.** 8. **11.** $\alpha > \beta$.

12. $2 \cdot \alpha = \beta$. **13.** $\alpha < \beta < \gamma < \delta$.

21. а) Туп; б) прав;

в) може бити оштар, прав или туп угао.

22. а) Суплементни угао

оштрог угла је • → • туп угао

правог угла је • → • прав угао

тупог угла је • → • оштар угао

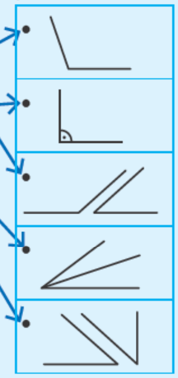
б) суплементни углови •

суседни углови •

прав угао •

туп угао •

комплементни углови •



31. а) 120'; б) 720'; в) 10 800'.

34. $\alpha + \beta = 178°35'14''$; $\alpha - \beta = 50°38'46''$.

35. 50°43'5"; 140°43'5". **36.** 122°48'28".

37. 108°32'. **38.** $\alpha - \beta > \gamma + \delta$. **39.** 96°35'55".

40. 35°29'2". **43.** 37°2'55". **44.** 87°44'16".

48. 149°41'16". **51.** $\alpha = \delta = 61°$, $\gamma = 119°$.

52. $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 62°6'30''$,

$\beta_1 = \delta_1 = \delta_2 = 117°53'30''$.

54. $\alpha = 60°$. **55.** $\alpha = 98°$.

56. Три угла по 38°30' и четири угла по 141°30'.

57. 60° и 120°. **60.** Да.

61. $\alpha = 97°$, $\beta = 83°$. **62.** $\alpha = 75°$, $\beta = 105°$.

63. $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$. **64.** $\sphericalangle PQR$, $\sphericalangle QRS$, $\sphericalangle RST$.

67. а), в), д), ђ). **68.** а), г). **69.** а), г). **73.** Шест.

76. а) Оштар; б) прав; в) прав; г) туп; д) оштар; ђ) опружени.

78. $AB < CD$, $\sphericalangle AOB < \sphericalangle COD$. **80.** б).

81. а) β; б) α и δ; в) γ.

84. а) p и q; б) r и s. **85.** в).

87. $(180° - 51°43') - (90° - 23°17'54'') = 61°34'54''$.

89. 20°. **90.** $\alpha = 160°$. **91.** 90°.

93. $\alpha = 30°$ и $\beta = 75°$. **94.** 67°30′.

95. $\alpha = 20°$ и $\beta = 110°$. **96.** 45° и 135°.

97. 40°. **98.** а) 22°30′; б) 11°15′.

99. а) 91°31′30″; б) 88°28′30″.

100. 172°54′8″.

101. а) $x = 20°$; б) $x = 60°$; в) $x = 50°$; г) $x = 40°$.

102. Две петине опруженог угла износи 72° и тај угао је већи од $\frac{7}{9}$ правог угла што износи 70°.

103. 135° и 45°.

107. а) $x = 61°$; б) $x = 37°$.

108. а) 31°35′28″; б) 121°35′28″; в) 58°24′32″.

109. $\sphericalangle pOs = 150°$, $\sphericalangle sOq = 60°$ и $\sphericalangle rOq = 120°$.

110. $\gamma = 34°$ и $\alpha = 58°$, $\delta = \beta = 88°$.

111. а) $y = 33°$, $x = 147°$; б) $38°$.

112. $\gamma = \beta = 62°$, $\alpha = 118°$. **113.** в).

114. $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$. **117.** $80°47'51''$.

118. Означимо тражене углове са α и β. Из $\alpha + \beta = 180°$ и $\alpha + \frac{1}{4}\beta = 99°$, следи $\frac{3}{4} \cdot \beta = 81°$, па је $\beta = 108°$ и $\alpha = 72°$.

119. в). **120.** $\beta = 128°$, $\alpha = \gamma = 52°$.

121. $x = 60°$. **122.** $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$.

123. а) Улица ружа и Улица лала;
б) Улица божура и Улица нарциса.

124. $\beta = \beta_1 = \delta_1 = 28°$, $\alpha = \gamma = \alpha_1 = \gamma_1 = 152°$.

125. а) $\alpha = 43°$, $\beta = 143°$; б) $\alpha = 59°$, $\beta = 72°$.

126. $\beta = 60°$, $\alpha = 120°$, $\gamma = 80°$, $\delta = 100°$.

127. $\alpha = 71°30'$, $\beta = 36°$. **128.** $150°$ и $30°$.

129. Из $\alpha + 24° = 63°$ налазимо $\alpha = 39°$.

130. $\alpha = 55°$, $\beta = 47°$, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 78°$.

131. $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 140°$.

132. $\alpha = 81°$. **133.** $101°3'$.

6 РАЗЛОМЦИ (Други део)

1. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{10}{11}$; г) $\frac{4}{7}$; д) $\frac{3}{13}$; ђ) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

2. а) $\frac{73}{24} = 3\frac{1}{24}$; б) $\frac{11}{21}$; в) $\frac{42}{55}$.

3. а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{13}{24}$; в) $\frac{37}{36} = 1\frac{1}{36}$; г) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

4. а) $\frac{47}{7} = 6\frac{5}{7}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$.

5. $\frac{69}{84} = \frac{23}{28}$. **6.** $\frac{1}{2}$.

7. а) $\frac{21}{7} = 3$; б) $\frac{1}{7}$.

8. а) $27\frac{2}{3}$; б) $2\frac{4}{7}$; в) $15\frac{1}{6}$; г) $9\frac{5}{6}$.

9. $5\frac{19}{21}$. **10.** $5\frac{1}{4}$.

11. а) 16,42; б) 22,08; в) 153,438; г) 32,467.

12. а) 1,22; б) 1,53; в) 0,87; г) 1,225.

13. $a = 6{,}555 > 6{,}278 = b$.

14. 1,25 l. **15.** 16,2 cm.

16. Како је $13{,}2 - (0{,}83 + 1{,}5) = 13{,}2 - 2{,}33 = 10{,}87$, преостало јој је 10,87 m канапа.

17. а) 6,47; б) 1,72; в) 2,13.

18. а) 7,9; б) 17,48.

19. а) $5{,}37 + 4{,}52 - 1{,}89 = 8$;
б) $13{,}22 - 11{,}22 + 19{,}08 = 21{,}08$;
в) $2{,}58 - (1{,}32 + 0{,}68) = 2{,}58 - 2 = 0{,}58$.

20. 6 минута. **21.** а) $\frac{5}{6}$; б) 8,02; в) $3\frac{41}{75}$.

22. 22,76. **23.** 8,75. **24.** 4,1.

25. 0,05. **26.** а) 0,5; б) 0,58; в) 4,872.

27. а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{26}{35}$. **28.** а) 0,6; б) $\frac{71}{70} = 1\frac{1}{70}$.

29. $x = \frac{1}{10}$ l. **30.** 118,06. **31.** 13,6.

32. Природни бројеви се добијају као решења у једначинама а) и в).

33. Није. **34.** $x = 2$.

35. Из $3{,}2 + 2{,}9 + x = 14$, налазио $x = 7{,}9$ t.

36. а) $1{,}2 \le x \le 5{,}1$; б) $x > 1{,}79$; в) $0 \le x \le 34{,}75$;
г) $x \ge 4\frac{3}{4}$; д) $x > 1\frac{1}{7}$; ђ) $0 \le x < 3\frac{3}{5}$;
е) $0 \le x < \frac{5}{14}$; ж) $\frac{1}{2} \le x < 0{,}62$; з) $0 \le x < 2{,}95$.

37. Решење се представља на бројевној полуправој.

38. Треба да буде већи од 0,93. **39.** Мање од $1\frac{1}{4}$ kg.

40. а) $0 \le x < 3{,}9$; б) $x \ge 0$; в) $0 \le x < 4$.

41. а) $0 \le x \le \frac{5}{7}$; б) $x \ge 1$.

42. а) $x > 3\frac{1}{2}$; б) $0 \le x \le 4\frac{2}{3}$.

43. 123 динара. **44.** а) $x > 1{,}75$; б) $2\frac{1}{6} \le x \le 12{,}5$.

45. $\frac{5}{6} \le x < 5$.

46. $0 \le x \le 1{,}75$. **47.** $x > 7{,}8$. **48.** $2\frac{29}{36} \le x \le 8\frac{1}{4}$.

49. а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$; в) $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; г) 25.

50. а) $\frac{3}{20}$; б) $4\frac{9}{14}$; в) $\frac{2}{63}$; г) $\frac{2}{17}$; д) $\frac{6}{7}$; ђ) $\frac{1}{10}$; е) $\frac{2}{9}$.

51. а) $\frac{5}{21}$; б) $\frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}$. **52.** $6\frac{1}{4}$.

53. 80 kg. **54.** 18 cm^2.

55. а) $11\frac{1}{7}$; б) $1\frac{2}{5}$; в) $3\frac{3}{5}$.

56. 262 500 динара. **57.** $\frac{21}{50}$ l.

58. $\frac{7}{3}$ година, односно две године и четири месеца.

59. а) 2,86; б) 3,66; в) 0,00513;
г) 0,5096; д) 0,0203.

60. 5,76 cm^2. **61.** а) $1\frac{107}{200}$; б) 1,39.

62. 240 динара.

63. $1{,}2 \cdot 80 + 0{,}55 \cdot 220 = 217$ динара.

64. $2{,}25 \cdot \frac{2}{3} = 1{,}5\ \text{cm}^2 > 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{5} = 1{,}44\ \text{cm}^2$.

65. а) 0,078432; б) 0,78432; в) 7,8432.

66. а) 10; б) 0,02; в) 0,0161; г) 3,22.

67. 18,18. **68.** 236,25 km.

69. а) $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{9}$; в) 33; г) $\frac{85}{26}$;
д) $\frac{55}{114}$; ђ) $4\frac{2}{7}$; е) $\frac{5}{34}$; ж) $\frac{1}{2}$.

70. $\frac{26}{35}; \frac{16}{35}; \frac{3}{15}; \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$.

71. $\frac{4}{3} : \frac{2}{7} = \frac{14}{3} > \frac{4}{3} + \frac{2}{7} = \frac{34}{21}$.

72. 100 динара. **73.** $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ cm.

74. а) $\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$; б) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; в) $\frac{12}{15}$; г) 20.

75. а) $2\frac{1}{26}$; б) $\frac{36}{49}$; в) 21; г) $\frac{5}{13}$.

76. $\frac{5}{11}$. **77.** Производ је мањи.

78. 1,8 m.

79. а) 0,29; б) 5,3; в) 13,4; г) 3,5;
д) 178; ђ) 15,39.

80. 5,6603; 1,07. **81.** 0,0289. **82.** 2,211.

83. а) 1,13; б) 113; в) 11,3; г) 113 000.

84. 3,24.

85. Први начин: $1\frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.
Други начин: $1{,}25 : 0{,}4 = 12{,}5 : 4 = 3{,}125$.

86. $2{,}75 : 0{,}2 = 13{,}75$ km/h.

87. а) 2,5 m; б) 1,75 m; в) 5,2 cm.

88. Два пута. **89.** а) $\frac{67}{96}$; б) $\frac{70}{31} = 2\frac{8}{31}$; в) 2,5.

90. 0,8432. **91.** 3,9. **92.** 6,625.

93. $1\frac{10}{13}$. **94.** $\frac{16}{83}$. **95.** $\frac{98}{15} = 6\frac{8}{15}$.

96. 46,1. **97.** 750 дин. **98.** 5.

99. а) $x = 11$; б) $x = 1\frac{4}{17}$; в) $x = \frac{1}{3}$; г) $x = \frac{1}{5}$.

100. а) $x = 1\frac{3}{4}$; б) $x = 1{,}022$; в) $x = 5{,}12$; г) $x = 1\frac{7}{8}$.

101. $3\frac{9}{25}$. **102.** 0,3l. **103.** 7.

104. 13. **105.** 54. **106.** 2,4 cm.

107. 3,845 kg. **108.** а) $x = 2{,}45$; б) $x = 19{,}5$.

109. а) $0 \le x < \frac{3}{11}$; б) $x \ge 5$; в) $0 \le x \le 32$.

110. а) $0 \le x < 6{,}37$; б) $x \ge \frac{1}{7}$; в) $0 \le x \le 4{,}68$.

111. 169.

112. а) $0 \le x \le 1\frac{1}{2}$; б) $x > 6\frac{1}{5}$; в) $0 \le x \le 20\frac{4}{5}$.

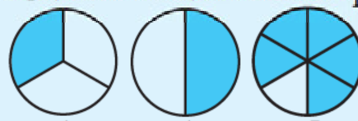
113. а) $0 \le x \le 0{,}84$; б) $x > 10$; в) $0 \le x \le 28{,}8$.

114. а) $\frac{1}{2} \le x < 3$; б) $x \ge 3{,}5$. **115.** 12 пута.

116. а) $x > 5$; б) $0 \le x \le 3$. **117.** $1\frac{4}{7} < x < 2\frac{5}{7}$.

118. Број може да буде већи од $1\frac{11}{18}$.

119.



$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

120. а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{7}{9}$; д) $\frac{6}{6} = 1$;
ђ) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; е) $\frac{11}{14}$; ж) $\frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}$.

121. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $1\frac{1}{4}$; д) $\frac{7}{8}$; ђ) $\frac{10}{21}$.

122. а) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
д) $\frac{1}{5}$; ђ) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; е) $\frac{4}{9}$; ж) 0.

123. а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{5}{5} = 1$; г) $\frac{4}{11}$.

124. а) 0,123; б) 0,03507.

125. а) $5\frac{6}{7}$; б) $2\frac{2}{11}$; в) $1\frac{4}{5}$; г) $4\frac{4}{9}$.

126. а) Збир се повећа за $3\frac{3}{5} + 2\frac{1}{4} = 5\frac{17}{20}$;
б) Збир се повећа за $5{,}5 - 2\frac{1}{8} = 3\frac{3}{8}$.

127. $4\frac{2}{5}$. **128.** $26\frac{3}{4}$.

129. а) $10\frac{1}{6}$ cm; б) $17\frac{23}{35}$ cm.

130. а) $20\frac{1}{5}$ cm; б) $21\frac{4}{5}$ cm.

131. Како је $\frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{1}{5}$, њих тројица ће за пет дана завршити посао ако раде заједно.

132. Како је $\frac{3}{8} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{15}{40} + \frac{4}{40} + \frac{16}{40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$, а то значи да патке чине $\frac{1}{8}$ бака Ружине живине.

133. Зоран за један минут уради $\frac{1}{21}$ део домаћег. Заједно са Гораном за минутураде $\frac{1}{14}$ део домаћег, што је за $\frac{1}{42}$ више од $\frac{1}{21}$. Дакле, Горан сам за минут уради $\frac{1}{42}$ део домаћег, па му је за цео домаћи задатак потребно 42 минута.

134. За један сат.

135. а) 2,6; б) 6,21; в) 6,68; г) 3,405;
д) 15,579; ђ) 15,459.

136. а) 2,4; б) 13,13; в) 22,113; г) 1,02.

137. а) 24,5; б) 5,4; в) 21,5; г) 16,81.

138. а) 1,4; б) 2,1; в) 0,01; г) 1,126.

139. а) 0,9; б) 3,7; в) 2,55; г) 7,79; д) 0,893; ђ) 9,2582.

140.

a	0,1	13,37	23,01
b	0,05	3,74	20,51
$a+b$	0,15	17,11	43,52
$a-b$	0,05	9,63	2,5

141. а) $6 - 2{,}11 = 3{,}89$; б) 5,83; в) 0,08; г) 4,67.

142. а) 4,5; б) 3,78; в) 7,247; г) 0,48.

143. а) $8 - (3{,}2 + 1{,}8) = 8 - 5 = 3$; б) 0,87; в) 3,22; г) 1,901.

144. а) 14,2; б) 6,44; в) 0,455.

145. а) $0{,}5 + 0{,}23 = 0{,}73$; б) 0,18; в) 3,395; г) 0,67; д) 0,085; ђ) 1,895.

146. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; б) $\frac{1}{4}$; в) $3\frac{1}{2}$; г) $\frac{28}{10} = 2\frac{4}{5}$.

147. а) 10,2 cm; б) 5,01 mm.

148. $24 - 6{,}3 - 2{,}07 = 15{,}63$ m.

149. а) $x = \frac{1}{4}$; б) $x = 5\frac{1}{2}$; в) $x = 7\frac{1}{8}$; г) $x = 7\frac{4}{5}$; д) $x = 1$; ђ) $x = 4\frac{1}{2}$.

150. а) $x = 1{,}88$; б) $x = 7{,}27$; в) $x = 8{,}45$; г) $x = 8{,}1$; д) $x = 1$.

151. а) $x = 6{,}85$; б) $x = 7\frac{5}{6}$; в) $x = 1\frac{5}{6}$; г) $x = \frac{1}{2}$; д) $x = 5\frac{13}{14}$; ђ) $x = 9\frac{3}{5}$; е) $x = 5{,}3$.

152. Није.

153. Једначина нема решење, јер се од мањег броја не може одузети већи у скупу N.

154. 61,95. **155.** $(12\frac{1}{3} - 4\frac{3}{5}) + x = 20$, $x = 12\frac{4}{15}$.

156. $3\frac{7}{9}$. **157.** $3\frac{5}{6}$. **158.** 2,4 cm.

159. 8,82. **160.** $34\frac{5}{12}$ l.

161. а) $0 \le x \le \frac{1}{3}$; б) $x \ge \frac{1}{14}$; в) $\frac{1}{3} \le x \le \frac{4}{9}$; г) $x > \frac{9}{10}$.

162. а) $0 \le x \le 0{,}475$; б) $x > 1{,}67$; в) $x \ge 0{,}86$; г) $0 \le x < 7{,}89$; д) $x > 6$; ђ) $1{,}1 \le x \le 6{,}51$; е) $x > 16$.

163. а) $x \ge 1{,}3$; б) $0 \le x \le 4{,}8$; в) $0 \le x < \frac{27}{70}$; г) $x > 8{,}8$; д) $2\frac{1}{5} \le x \le 7{,}6$; ђ) $1{,}2 \le x \le 1{,}3$; е) $4\frac{1}{3} \le x < 9\frac{8}{15}$.

164. Из $214{,}3 + x < 500$ налазимо $x < 500 - 214{,}3$, тј. пут од школе до библиотеке је краћи од 285,7 m.

165. Из $x - 3{,}17 > 2{,}83$ налазимо $x > 6$. Дакле тражени број је било који број већи од 6.

166. а) $0 \le x < 7\frac{1}{3} - 5{,}6$, тј. $0 \le x < 1\frac{22}{30}$, па је једини природан број који задовољава неједначину – број 1.

б) $0 \le x < 8{,}2 - 3\frac{1}{3}$, па је $0 \le x < 4\frac{13}{15}$, неједначину задовољавају природни бројеви из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$.

167. а) $x \in \{1, 2\}$; б) $x \in \{1, 2, 3\}$; в) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; г) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

168. а) $0 \le x < 4$; б) $x \ge 9$; в) $0 \le x < \frac{1}{2}$; г) $x \ge 16\frac{5}{6}$; д) $x > 8{,}4$; ђ) $0 \le x \le 2{,}2$.

169. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{4}{11}$; в) 1; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$; ђ) $\frac{1}{2}$; е) $3\frac{1}{4}$; ж) $6\frac{2}{3}$; з) 1.

170. а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $17\frac{2}{7}$; д) 84; ђ) $2\frac{2}{5}$.

171. а) 8; б) 20. **172.** а) $3\frac{3}{5}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 12.

173. а) 10; б) 6; в) 8; г) 3; д) 10; ђ) 200; е) 25.

174. а) 3; б) 6; в) 21; г) 30; д) $\frac{2}{45}$; ђ) $\frac{9}{13}$; е) $\frac{10}{121}1$; ж) 15.

175. а) 60; б) 44; в) $87\frac{1}{2}$.

176. $\frac{7}{16} \cdot 640 = 280$; $\frac{17}{40} \cdot 640 = 272$.

177. $\frac{5}{12} \cdot 132 = 55$. **178.** $\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20} \cdot 240 = 21$.

179. $2\frac{12}{55}$ t. **180.** $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{40} = \frac{1}{40}$.

181. $8 \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 24$ сата.

182. $\frac{4}{15} \cdot 120 = 32$, $\frac{3}{10} \cdot 120 = 36$. Дакле Иван је излио из бурета већу количину течности.

183. 4.

184. а) 53; б) 47; в) 110,2; г) 0,7; д) 22,32; ђ) 0,11.

185. а) 3,5; б) 0,042; в) 7,77; г) 0,518; д) 49; ђ) 0,0014.

186. а) 0,52; б) 1,48; в) 9,68; г) 18,62; д) 36,61; ђ) 79,92; е) 1,1; ж) 0,268.

187. а) 787,5; б) 78,75; в) 78,75; г) 7,875; д) 0,7875; ђ) 7,875; е) 7,875; ж) 7,875; з) 0,7875.

188. а) 0,525; б) 2; в) 0,296; г) 0,8375; д) $\frac{4}{5}$; ђ) 0,0528; е) $\frac{77}{130}$; ж) 1.

189. а) 0,82; б) 1; в) 2,14; г) 6,18.

190. а) $\frac{5}{6} \cdot 0,3 = \frac{1}{4}$; б) 0,55; в) $1\frac{3}{5}$; г) 12,72.

191. а) 361,2 m; б) 5418 m; в) 444,276 m.

192. Прва соба има површину 16,875 m², а друга 18,98 m². Дакле друга соба има већу површину за 2,105 m².

193. $180 \cdot 117{,}92 = 21\,225{,}6$ динара.

194. а) 2 253,3; б) 6,66; в) 21.

195. а) 43,65; б) 33,002; в) 1,3; г) 19,09.

196. а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{48}{25}$; в) 4; г) 2; д) $\frac{5}{33}$; ђ) $\frac{2}{23}$; е) $\frac{2}{35}$; ж) $\frac{1}{27}$; з) 12; и) $\frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$; ј) 2; к) $6\frac{6}{7}$; л) $\frac{1}{4}$.

197. а) $3\frac{1}{2}$; б) 4; в) $7\frac{1}{3}$; г) $1\frac{7}{8}$.

198. б) и в).

199. а) $1\frac{11}{12}$; б) $\frac{7}{12}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $1\frac{7}{8}$.

200. Нека је $a = 1\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1\frac{1}{2}$; $b = 1\frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$; $c = 1\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{25}$; $d = 1\frac{1}{5} : \frac{3}{10} = 4$.

Добијамо $c < b < a < d$.

201. $a = 21\frac{3}{5} : 4 = 5\frac{2}{5}$; $P = 29\frac{4}{25}$ cm².

202. а) $3\frac{7}{24}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{17}{15}$; г) $21\frac{1}{9}$.

203. $75 : 2\frac{1}{2} = 30$ km.

204. $220 : \frac{4}{5} = 275$.

205. $410 : 21\frac{1}{9} = 4\frac{1}{2}$ h.

206. $4\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{14}{3} : \frac{2}{3} = \frac{14}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = 7$.

207. а) $x = 9 : \frac{3}{5} = 15$; б) $x = 15 : \frac{5}{8} = 24$; в) $x = 21 : \frac{3}{7} = 49$; г) $x = \frac{9}{11} : \frac{3}{5} = \frac{15}{11} = 1\frac{4}{11}$.

208. а) 0,37; б) 2,341; в) 0,07; г) 10,5105.

209. а) 3,132; б) 0,2407; в) 0,051; г) 0,0073.

210. а) 7,2; б) 3,8; в) 0,09; г) 1,877; д) 0,1405; ђ) 0,00265.

211. а) 55; б) 61; в) 2,81; г) 6.

212. а) 20; б) 1,9; в) 20; г) 500; д) 0,004; ђ) 7153,333...

213. а) 0,2533; б) 7,099; в) 102,5111; г) 1,638633.

214. а) 9; б) 50; в) 8.

215. а) 15; б) $\frac{5}{84}$; в) $\frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{25}{32}$; ђ) 13,95.

216. 7,14 cm.

217. 127,65 km.

218. $14{,}5 : 5 = 2{,}9$ m.

219. $7{,}4 : 4 = 1{,}85$.

220. $V = 0{,}15652$ m³. У посуду стане 156,52 l воде.

221. $(43{,}2 \cdot 0{,}3) : (43{,}2 : 0{,}3) = 12{,}96 \cdot 144 = 0{,}09$.

222. а) $4{,}95 : (3 \cdot 3{,}3 \cdot 0{,}25) = 2$; б) $(4\frac{2}{3} : \frac{2}{9}) : 2\frac{1}{3} = 9$.

223. $42 : 1{,}5 = 28$.

224. $12\,500 : 108{,}79 \approx 114{,}9$ франака.

225. $a = 10$; $b = 0{,}1$; $c = 0{,}4$; $d = 0{,}1$; $b = d < c < a$.

226. 8,67 dm и 3,36 dm.

227. а) $x = 2$; б) $x = 5$; в) $x = 6$; г) $x = 9$; д) $x = 6$; ђ) $x = 2$.

228. а) $x = 3$; б) $x = 4$.

229. а) $\frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$; б) $\frac{14}{15}$.

230. а) $x = 16$; б) $x = 44$; в) $x = 26$; г) $x = 125$.

231. а) $x = \frac{15}{16}$; б) $x = 1$; в) $x = 7\frac{1}{2}$; г) $x = \frac{43}{90}$.

232. а) $\frac{3}{5} \cdot x = 24$, $x = 24 : \frac{3}{5} = 40$; б) 65; в) $\frac{5}{7}$; г) $x = 3\,\frac{7}{16}$.

233. 280.

234. 60 km.

235. 1 500 m.

236. Тражени број је $4{,}2 : 1\frac{2}{5} = 3$.

237. $(0{,}8 : \frac{1}{5}) \cdot 2\frac{1}{2} = 4 \cdot 2{,}5 = 10$.

238. Из $7{,}6 \cdot 5{,}5 \cdot x = 125{,}4$ добијамо $41{,}8 \cdot x = 125{,}4$, тј. $x = 125{,}4 : 41{,}8$ и $x = 3$ m.

239. Прва: –20, друга: –30.

240. Из $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15} = 80$ налазимо $\frac{1}{3}a = 80$, па је $a = 240$.

241. Нека је x пређени пут. Тада је $\frac{5}{2}x = 45$, па је $x = 45 : \frac{5}{2}$, тј. $x = 108$ km.

242. 189.

243. Разлика од 30 година представља $\frac{5}{7}$ мајчиних година (означимо их са x).

Из $\frac{5}{7}\,x = 30$ налазимо $x = 42$,

па ћерка има 12 година.

244. а) $x \geq 1$; б) $\frac{50}{12} \leq x \leq \frac{57}{12}$; в) $x > \frac{47}{24}$; г) $\frac{51}{40} \leq x < \frac{113}{40}$.

245. а) $x \geq \frac{2}{3}$; б) $3 \leq x \leq 3\frac{4}{7}$; в) $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$; г) $x \geq 2\,\frac{5}{12}$; д) $x > 26$; ђ) $1 \leq x < 3\frac{5}{8}$.

246. а) $x > \frac{2}{3}$; б) $0 \le x < 0{,}75$.

247. а) $x \ge 0{,}9$; б) $x > 1{,}3$; в) $0 \le x < 0{,}7$; г) $x \ge 18\frac{21}{55}$.

248. $\frac{5}{4} < x < \frac{9}{4}$.

249. а) $3{,}5 \le x < 3{,}8$; б) $4\frac{2}{3} < x \le 6\frac{3}{4}$.

250. а) Из $\frac{2}{12} \le \frac{n}{12} \le \frac{8}{12}$ налазимо $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

б) Из $\frac{20}{60} < \frac{12 \cdot n}{60} < \frac{55}{60}$ налазимо $n \in \{2, 3, 4\}$.

251. Из $1 < \frac{37}{2 \cdot p} < 2$ добијамо $\frac{2 \cdot p}{2 \cdot p} < \frac{37}{2 \cdot p} < \frac{4 \cdot p}{2 \cdot p}$, одакле је $2 \cdot p < 37$ и $4 \cdot p > 37$, односно $p < \frac{37}{2}$ и $p > \frac{37}{4}$. Ове услове задовољавају прости бројеви 11, 13 и 17.

252. а) Како је $x \ge 5$ и $x < \frac{19}{3}$, неједначину задовољавају бројеви 5 и 6; б) $x = 5$, $x = 6$ или $x = 7$.

253. $\frac{7}{16}$. **254.** $(5\frac{1}{3} \cdot 2\frac{5}{6}) : (1\frac{1}{9} + 2\frac{4}{9}) + 5\frac{3}{4} = 10$.

255. а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $2\frac{1}{2}$; г) $\frac{37}{44}$; д) 16.

256. а) 1; б) 144; в) 30, 9248; г) $25\frac{189}{440}$; д) 2.

257. а) 1; б) $1\frac{1}{2}$; в) $1\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{1}{4}$.

258. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{13}{64}$; в) 16.

259. а) Два пута. б) 32 пута.

260. а) $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{21}} = \frac{2}{7} : \frac{4}{21} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; б) $1\frac{1}{2}$;

в) $5\frac{2}{5}$; г) $1\frac{3}{4}$; д) $\frac{7}{5}$; ђ) $\frac{14}{23}$; е) 6; ж) 6.

261. а) 4; б) $5\frac{101}{320}$; в) $3\frac{3}{4}$; г) $\frac{45}{88}$.

262. а) 107; б) $2\frac{19}{22}$. **263.** а) 1; б) $1\frac{1}{2}$.

7 ОСНА СИМЕТРИЈА

9. Права b. **10.** Паралелне су.

11. А, В, Д, Е, Ж, З, К, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ц, Ш.

12. а) четири; б) бесконачно много.

13. а) једну; б) три; в) једну; г) једну.

15. Бесконачно много. **16.** Да. **17.** Две.

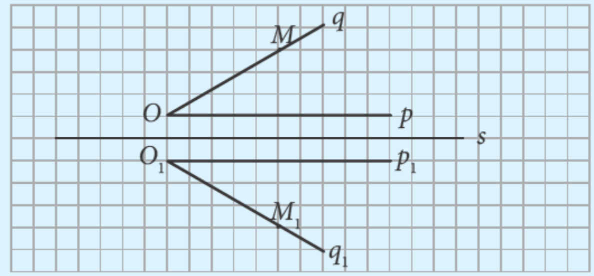
18. Две. **19.** а) Није; б) Јесте.

20. Фигура је осносиметрична и има две осе симетрије.

21. Да. **25.** $m \| n$. **30.** Паралелне су.

41. а), г) и д). **42.** в).

46. Види слику.

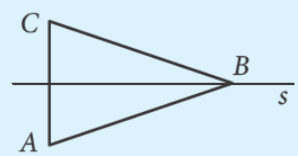


53. Конструиши праву q симетричну правој p у односу на праву s. Тражена тачка је пресек праве q и кружнице k. Задатак има два решења.

54. а) и в).

55. Све фигуре су осносиметричне у односу на одговарајуће праве.

56. Види слику.



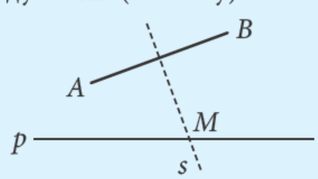
57. Сва три. **58.** а) 4; б) 3.

59. Само права a. **62.** $MN = 8$ cm 5 mm.

64. Упутство. Тачка E је пресек симетрала дужи AB и CD.

67. Центар је пресечна тачка симетрала дужи AB и BC.

72. Тражена тачка је пресек праве p и симетрале дужи AB (в. слику).



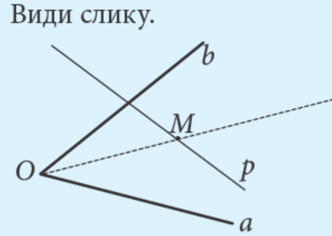
73. Тачка M је пресек симетрала дужи AB и CD.

74. Школа треба да се изгради у пресеку симетрала дужи PQ, QR и RP.

77. Упутство. а) Искористи симетралу опруженог угла; б) конструиши симетралу правог угла; в) конструиши симетралу угла од 45°; г) 67°30' = 45° + 22°30'; д) 135°= 90°+ 45°; ђ) 112°30' = 90°+ 22°30'.

80. Центар кружнице припада симетрали угла pOq.

81. Види слику.



Тражена тачка је пресек праве p и симетрале угла aOb.

8 РАЗЛОМЦИ (Трећи део)

6. а) 300; б) 60.

7. а) 50%; б) 25%; в) 20%; г) 100%;
д) 60%; ђ) 150%.

8. 17 896,5 динара **9.** 20%.

10. За 50%. **17.** Не мења се.

18. Зависи од размере. Код размера облика $x : x$ $(x \neq 0)$ вредност се не мења, а уколико је размера облика $x : y$ $(x \neq y, y \neq 0)$ вредност се мења.

19. а) Нису једнаке; б) једнаке су.

20. 164,7 km.

21. а) 270%; б) 13%; в) 549%; г) 302%.

22. а) 0,75; 75%; б) 0,4; 40%; в) 1,5; 150%;
г) 3,375; 337,5%.

23. а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{8}{25}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{8}$; д) $\frac{3}{5}$; ђ) $\frac{7}{20}$.

24. Ови изрази су једнаки.

25. 945 km. **26.** $\frac{48}{60} = \frac{4}{5} = 80\%$.

27. 486 динара. **28.** 20%.

29. Девојчице – 87,5%; дечаци – 12,5%.

30. 52,2 kg.

31. У оба одељења има по 12 дечака.

32. Петице – 25%; четворке – 50%;
тројке – $16\frac{2}{3}\%$; двојке – $8\frac{1}{3}\%$.

33. 30 динара. **34.** 120.

35. За 20%. **36.** За 50%. **37.** 40%.

38. После снижења цена је била: у првој продавници 3 060 динара, у другој – 2 700 динара, у трећој –2 800 динара, а у четвртој –2 520 динара. Дакле, најповољнија цена је у четвртој продавници.

39. 80.

40. Први број је 1 600, други 360, а трећи 440.

41. 24 + 27 + 21 + 24 = 96.

42. Набавна цена робе је 350 – 10% (350) = 350 – 35 = 315 динара. Ако би цена била 378 динара, онда би зарада износила 378 – 315 = 63 динара. Како је $\frac{63}{315} = \frac{1}{5} = 20\%$, зарада би тада била 20%.

43. 12%.

44. а) 275 : 200 = 11 : 8; б) 200 : 225 = 8 : 9;
в) 225 : 275 = 9 : 11.

45. а) 2 : 1; б) 12 : 1; в) 6 : 1; г) 1 : 14.

46. 9 : 16. **47.** а), б) и в).

50. 10 cm и 3 cm.

51. 10 000 000 cm = 100 000 m = 100 km.

52. 4 cm. **53.** 15 km.

55. 145 cm. **56.** 27 и 45 страна.

57. 18 : 12 = 3 : 2.

58. а) 80° и 100°; б) 72° и 108°.

59. а) 20° и 70°; б) 40° и 140°; в) 40° и 140°.

60. Ова два угла морају да буду суплементни. Један од њих има 80°, други 100°.

61. 11 : 3. **62.** $\frac{2}{5}$.

63. 3 : 2. **64.** 9,51 cm.

65. $\frac{5\cdot7+4\cdot12+3\cdot8+2\cdot5+1\cdot1}{33} \approx 3{,}58$.

66. $\frac{3+5+4+4+3+6}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$.

67. Просечна висина играча тима A је 2,002 m, а играча тима B је 1,992m.

68. Просечна посета у првих пет утакмица је била $\frac{728+840+639+952+512}{5} = 734{,}2$ гледаоца. Дакле, клуб прелази у већу халу.

69. Из $\frac{5{,}2+2{,}17+3{,}53+x}{4} = 4$ налазимо $\frac{10{,}9+x}{4} = 4$, односно $10{,}9 + x = 16$, па је $x = 16 - 10{,}9 = 5{,}1$.

70. Мора да добије оцену 5.

71. 40° и 20°.

72. Нека је a збир година девет играча који нису излазили са терена, а x године повређеног и y године искљученог играча.
Тада је $\frac{a+x+y}{11} = 22$, $\frac{a}{9} = 20$, $\frac{a+x}{10} = 21$.
Одавде је $a = 180$, $x = 30$ и $y = 32$.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

А
алгоритам 86
асоцијативност сабирања 9, 149, 169
асоцијативност множења 9, 169
аритметичка средина два броја 211
аритметичка средина *n* бројева 211

Б
бројилац 94
бесконачан периодичан децимални запис 109
бесконачан непериодичан децимални запис 109
бројевни изрази 149

В
Венови дијаграми 29
вектор 69
вредност бројевног израза 149
вредност размере 209

Г
геометријско пресликавање 62, 70

Д
делилац броја 17
двоцифрени завршетак 23
дисјунктни скупови 31
дужина дужи 44
дужина изломљене линије 52
дијагонале паралелограма 71
довођење разломака на заједнички именилац 105
довођење разломака на заједнички бројилац 105
децимални запис разломка 107
децимална запета 107
децимале 107
децимални разломци 107
дистрибутивност множења према сабирању 9, 169
двојни разломак 164

Е
елемент скупа 27
Ератостеново сито 79
Еуклидов алгоритам 86
Еуклид 86

З
затворена изломљена линија 51
заједнички делилац 83
заједнички садржалац 88
заокругљивање децималних бројева 112

И
између тачака 39
изломљена линија 50
интензитет 69
именилац 94
имагинарне нуле 108
изрази са променљивом 150

Ј
једнаке дужи 44
једначине у вези са сабирањем и одузимањем разломака 151
једначине у вези са множењем и дељењем 172

К
колинеарне тачке 38
крајеви дужи 39
крајње тачке дужи 39
конструктивно сабирати дужи 47
конструктивно одузети дужи 47
конвексна фигура 53
кружни дијаграм 96, 97, 208
кружница (кружна линија) 55
круг (кружна površ) 55
концентричне кружнице 55
концентрични кругови 55
кружни лук 57
криптографија 80
коначан децимални запис 108
конвексан угао 119
краци угла 119
комплементни углови 126
конвексни углови 128
комутативност сабирања 9, 149, 169
комутативност множења 9, 169

М
многоугаона линија 51
многоугао 51
мешовити број 96

Н

неколинеарне тачке 38
надовезане дужи 47
неконвексна фигура 53
наспрамна темена паралелограма 71
наспрамне странице паралелограма 71
највећи заједнички делилац НЗД 83
најмањи заједнички садржалац НЗС 88
неправи разломци 95
несводљив разломак 103
неконвексан угао 119
надовезани углови 123
неконвексни углови 128
нормална права 131
наизменични углови 136
неутрални елемент за сабирање 9, 149, 169
неутрални елемент за множење 9, 169
неједначине у вези са сабирањем и одузимањем разломака 154
неједначине у вези са множењем и дељењем разломака 172
нормала на праву 197

О

отворена изломљена линија 50
обим многоугла 52
оријентисана (усмерена) дуж 69
опружена угаона линија 120
опружен угао 120
оштар угао 126
ортогонална права 131
осна симетрија 187
осносиметричне тачке 187
оса симетрије 187
осносиметричне фигуре 194

П

подскуп скупа 28
празан скуп 28
пресек скупова 31
права 38
полуправа 40
паралелне праве 41
преношење дужи 46
полураван 50
петоугаона линија 51
петоугао 51
полупречник 55
пречник 56
подударна фигура 65
паралелно померање 68
паралелограм 71
прости бројеви 78
прави делиоци 78
прави разломци 95
проширити разломак 101
период 109
правила заокругљивања 112
правило парне цифре 113
преношење углова 123
прав угао 125
пун угао 128
проценат 205
просечан број 211

Р

разлика скупова 32
раван 38
распоред тачака на правој 39
раставити природан број 82
разломак 94
разломачка црта 94
растојање тачке од праве 132
растојање између две паралелне праве 132
реципрочан број 163
размера 209

С

садржалац броја 17
са исте стране тачке 39
са разних страна тачке 39
средиште дужи 45
странице многоугла 51
сечица 56
суседна темена паралелограма 71
странице паралелограма 71
суседне странице паралелограма 71
сложени бројеви 78
степен броја 81
скратити разломак 102
суседни углови 123
суплементни углови 126
сагласни углови 136
супротни углови 136
сложене једначине 173
симетрала дужи 196
симетрала угла 199

Т
тачка 38
тачке самопресецања 50
темена многоугла 51
троугаона линија 51
троугао 51
тетива 56
тангента 56
транслација 68
темена паралелограма 71
теме угла 119
туп угао 126
трансверзала 136
трансверзални углови 136

У
универзални скуп 28
унија скупова 31
упоређивање по дужини 46
узајамно прости бројеви 84
упоређивање разломака једнаких именилаца 103
упоређивање разломака једнаких бројилаца 104
упоређивање разломака различитих именилаца и бројилаца 104
угаона линија 119
угао 119
упоредни углови 125
угломер 128
угаони степен 128
угаони минут 129
угаони секунд 129
унакрсни углови 131

Ц
центар кружнице 55
централно растојање 58
централносиметричне тачке 62
централна симетрија 62
центар симетрије 62
централносиметрична фигура 72
централни угао 120

Ч
чинилац броја 17
четвороугаона линија 51
четвороугао 51
чланови размере 209

Џ
Џон Вен 29

Корисни линкови

Литература и задаци за додатну наставу и математичка такмичења:
Друштво математичара Србије – www.dms.rs

Алат за рад у геометрији и геометријским конструкцијама:
www.geogebra.org

Електронска збирка задатака из математике по областима и разредима:
www.ezbirka.math.rs